
MÉCANIQUE DU SOLIDE & MÉCANIQUE ANALYTIQUE

TD.4

- 1) (a) Déterminer la position du centre de masse G d'un demi-disque homogène de rayon R .
(b) Même question pour un hémisphère plein de rayon R .
- 2) Déterminer la position du centre de masse G d'un cône homogène, plein, de hauteur h et de rayon R .
- 3) (a) Calculer l'opérateur d'inertie I par rapport au centre d'une boule homogène de masse M et de rayon R . (b) Même question pour une sphère homogène de masse M et de rayon R .
- 4) Calculer l'opérateur d'inertie I , par rapport à son centre, d'un ellipsoïde plein, homogène, de masse M et de demi-axes (a, b, c) .
- 5) (a) Déterminer l'opérateur d'inertie I d'un cylindre homogène de masse M , de hauteur h et de rayon R , par rapport à son centre d'inertie. (b) Même question pour une tige de longueur L et de masse M (rotateur). (c) Même question pour un disque homogène de masse M et de rayon R .
- 6) (a) Déterminer l'opérateur d'inertie I_O d'un cône plein, homogène, de masse M , de hauteur h et de rayon R , par rapport à son sommet O . (b) Même question pour I_G où G désigne le centre de masse du système.
- 7) Trouver l'opérateur d'inertie I , par rapport au centre d'inertie G , d'un rotateur formé de N points matériels $(M_i, m_i)_{i=1, \dots, N}$ alignés, les distances d_{ij} entre deux points quelconques M_i et M_j étant fixées.
- 8) On considère une molécule tétraatomique dont les atomes sont situés aux sommets d'une pyramide triangulaire droite de hauteur h et de base un triangle équilatéral de côté a . Les atomes aux sommets du triangle de base ont même masse m_1 et celui situé au sommet de la pyramide a une masse m_2 . (a) Déterminer la position du centre d'inertie G de la molécule. (b) Donner l'opérateur d'inertie I de la molécule par rapport à G .
- 9) L'axe horizontal d'une roue de voiture tourne autour d'un axe vertical fixe avec une vitesse angulaire $\omega_z \mathbf{e}_z$ constante. Cette roue a un rayon a et son centre C reste à distance constante, b , de l'axe vertical. On désigne par $(O, (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z))$ le repère euclidien tournant avec l'axe de la roue.

- (i) Justifier l'expression $\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{e}_r + \omega_z \mathbf{e}_z$ de la vitesse angulaire de la roue.
- (ii) Trouver la vitesse \mathbf{v}_C du point C .
- (iii) En déduire la vitesse \mathbf{v}_I du point de contact I de la roue et du sol.
- (iv) Exprimer la condition de roulement sans glissement de la roue ; en déduire ω_r en fonction de ω_z et des constantes du problème.
- (v) On désire calculer la vitesse \mathbf{v}_M d'un gravillon M logé dans le pneu. Déterminer \mathbf{v}_M à l'instant où \mathbf{CM} fait un angle φ avec la direction \mathbf{e}_θ .
- (vi) Donner l'accélération \mathbf{a}_M du gravillon au même instant.
- (vii) En déduire \mathbf{v}_M et \mathbf{a}_M si $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$. Commentaire ?

10) Un système de deux tiges articulées \mathbf{OA}_1 & $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, de mêmes longueur L et masse M , est mobile dans le plan euclidien $z = 0$, repéré par $(O, (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y))$. Le point O est fixe et le point A_2 se déplace sans frottement sur l'axe des x . La tige \mathbf{OA}_1 fait un angle θ avec \mathbf{e}_x .

- (i) Déterminer les barycentres $\mathbf{R}_1 = \mathbf{OG}_1$ et $\mathbf{R}_2 = \mathbf{OG}_2$ des tiges en fonction de L et θ .
- (ii) Donner les énergies cinétiques des centres de masse G_1 et G_2 .
- (iii) Calculer l'énergie cinétique de rotation de chacune des tiges relativement à son centre d'inertie. $\mathcal{N.B.}$ Justifier que le vecteur instantané de rotation de la tige \mathbf{OA}_1 est $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta} \mathbf{e}_z$ où $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ et celui de la tige $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ égal à $\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}_1$.
- (iv) En déduire l'énergie cinétique totale, T , du système des deux tiges articulées.

11) Une boule de rayon R et de masse M roule sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale ; on désigne par \mathbf{g} l'accélération constante de la pesanteur. On choisit un repère euclidien fixe $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z))$ lié au plan incliné, le vecteur \mathbf{e}_x donnant la direction de plus grande pente. On désigne enfin par (x, y, z) les coordonnées du centre d'inertie G de la boule dans le repère \mathcal{R} .

- (i) Exprimer la vitesse \mathbf{v}_I du point de contact I de la boule et du plan en fonction de la vitesse \mathbf{v}_G de G , du vecteur instantané de rotation $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z$ et du vecteur \mathbf{IG} .
- (ii) On suppose désormais que la boule roule sans glisser ; en déduire l'expression de (\dot{x}, \dot{y}) en fonction de (ω_x, ω_y) et R (formule (A)). Justifier que $z(t) = R$ à chaque instant t .
- (iii) Soit \mathbf{N} la réaction du plan au point de contact I de la boule. Trouver, grâce au Théorème général I l'accélération \mathbf{a}_G du centre d'inertie G de la boule (formule (B)).
- (iv) L'opérateur d'inertie de la boule au point G étant un opérateur scalaire I , donner le moment angulaire $\boldsymbol{\ell}_G$ de la boule en fonction de M, R et $\boldsymbol{\omega}$.
- (v) Déduire de la question précédente et du Théorème général II l'expression de $d\boldsymbol{\omega}/dt$ en fonction de M, R et \mathbf{N} (formule (C)).

(vi) Utiliser les formules (A) et (C) pour déduire de la formule (B) les composantes (\ddot{x}, \ddot{y}) de \mathbf{a}_G en fonction de l'accélération $g = \|\mathbf{g}\|$ de la pesanteur et de l'angle α .

(vii) Intégrer ces équations du mouvement pour déterminer la position $G(t)$ du centre d'inertie à chaque instant t , compte tenu des conditions initiales suivantes : $\mathbf{OG}(0) = R \mathbf{e}_z$, $\mathbf{v}_G(0) = \dot{y}_0 \mathbf{e}_y$ et $\omega_z(0) = 0$. Quelle est la trajectoire de la boule sur le plan incliné ?

(viii) Déduire des résultats précédents l'expression de la réaction \mathbf{N} et celle de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}(t)$ de la boule à chaque instant t .