# Mécanique hamiltonienne, symétries et quantification

Option 2010–2011

Master "Physique & Sciences de la Matière"

Parcours "Physique Théorique & Mathématique,

Physique des Particules & Astroparticules"

C. DUVAL [‡]

Université de la Méditerranée
et
Centre de Physique Théorique [§]
Luminy, Case 907
F-13288 Marseille Cedex 9

9 janvier 2011

[‡] mailto : duval@cpt.univ-mrs.fr

[§] UMR 6207 du CNRS associée aux Universités d'Aix-Marseille I et II et Université du Sud Toulon-Var ; Laboratoire affilié à la FRUMAM-FR2291

# Table des matières


**1 Introduction** **4**

**2 Formulation présymplectique de la mécanique** **6**

2.1 Espace d'évolution, espace des mouvements . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.1.1 Equations de Newton . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.1.2 Chasse aux dénominateurs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2.2 Structure présymplectique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

2.2.1 Définition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

2.2.2 Exemples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

2.3 Espace des mouvements . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

2.3.1 Exemples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

2.4 Invariants intégraux . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.4.1 Dérivée extérieure . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.4.2 Image directe & image réciproque . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

2.4.3 Dérivée de Lie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

2.4.4 Feuilletage caractéristique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

2.5 Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

**3 Symétries en mécanique présymplectique, application moment, théorème de Noether** **20**

3.1 Groupes de symétries . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

3.1.1 Symétrie euclidienne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

3.1.2 Symétrie galiléenne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

3.1.3 Symétrie relativiste sous Poincaré . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

3.2 Groupes et algèbres de Lie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

3.2.1 Définitions générales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

3.2.2 Représentation adjointe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
3.2.3 Représentation coadjointe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
3.3 Application moment . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
3.4 Orbites coadjointes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
3.4.1 Forme de Maurer-Cartan . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
3.4.2 Orbites coadjointes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
3.4.3 Exemples mécanistes d'orbites coadjointes . . . . . . . . . . . . 36

**4 Eléments de quantification géométrique** **41**
4.1 Procédure de préquantification . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
4.1.1 Problème de Dirac . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
4.1.2 Solution de Koopman-Van Hove-Segal . . . . . . . . . . . . . . . 43
4.1.3 Fibré préquantique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
4.1.4 Représentation préquantique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
4.2 Polarisations & quantification . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
4.2.1 Notion de polarisation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
4.2.2 Quantification géométrique (première approche) . . . . . . . . . 51
4.2.3 Application : représentation de spin . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
4.3 Equation de Schrödinger . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
4.3.1 Fibré préquantique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
4.3.2 Fonctions d'onde polarisées . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
4.3.3 Représentation du groupe de Bargmann . . . . . . . . . . . . . . 58
4.4 Spectre d'énergie de l'oscillateur harmonique quantifié et demi-formes . 60
4.4.1 Préquantification . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
4.4.2 Fonctions d'onde polarisées . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
4.4.3 Hamiltonien quantique de l'OH . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

# 1 Introduction

Ces notes de cours constituent une introduction au sujet suivant :

*Mécanique & Quantification géométriques*

dont le fil d'Ariane est la notion de groupe de symétries des systèmes classiques et quantiques.

Les systèmes élémentaires classiques [5] sont interprétés, en termes géométriques, comme espaces homogènes symplectiques de groupes de symétries de l'espace-temps (ou d'espaces fibrés au dessus de l'espace-temps et associés à une théorie de jauge donnée). Les systèmes élémentaires quantiques (particules élémentaires) sont, quant à eux, toujours associés à de tels groupes de symétries, mais ils le sont via leurs représentations unitaires irréductibles [6].

La premières formalisation de la correspondance classique-quantique évoquée ci-dessus [2] est la *Méthode des orbites* ; cette dernière a joué un rôle majeur en théorie des représentations des groupes de Lie et a ouvert la voie à la *Quantification géométrique* qui en constitue la généralisation naturelle [3, 5].

Le programme développé dans ce cours a pour but de décrire les espaces homogènes symplectiques (orbites coadjointes) des groupes de Lie et leur interprétation en tant que systèmes élémentaires classiques en s'appuyant sur quelques exemples emblématiques (particules galiléennes sans spin, particules relativistes massives à spin, photons, etc.) Il ambitionne de montrer également, sur quelques exemples importants qui émaillent le propos, comment les axiomes de la préquantification et de la quantification géométrique conduisent de manière intrinsèque aux équations d'onde de la mécanique quantique et aux représentations unitaires irréductibles des groupes de symétries considérés.

Le cours est organisé comme suit.

Le chapitre 2 traite de la formulation présymplectique de la mécanique des systèmes, et fait jouer un rôle majeur à l'*espace d'évolution* (hébergeant la dynamique des systèmes) au dessus de l'*espace des mouvements*. Certains rappels utiles de géométrie différentielle sont proposés au fil de la section.

Le chapitre 3 aborde systématiquement la notion de groupe de symétries et celle, fondamentale, d'application moment d'un groupe de (pré-)symplectomorphismes, qui conduit à la formulation moderne du théorème de Noether. La construction des orbites coadjointes et de leur structure symplectique canonique (Kirillov-Kostant-Souriau) est présentée de manière détaillée, propre à décrire les exemples des espaces homogènes symplectiques des groupes d'Euclide, Galilée, Heisenberg et Poincaré.

Dans le chapitre 4, on rappelle les axiomes devant, selon Dirac, gouverner toute procédure de quantification (problème de Dirac). Bien que très rigides, ces principes admettent, nous le verrons, une solution connue sous le nom de *préquantification* [3, 5]. Cette dernière ne permettant pas de conduire, même dans le cas élémentaire du groupe de Heisenberg, à la représentation de Schrödinger, une notion supplémentaire s'impose, à savoir la notion de polarisation d'une variété symplectique dont le rôle essentiel est de garantir l'irréductibilité des représentations (unitaires) des groupes de symétries considérés. La préquantification des variétés symplectiques polarisées constitue ainsi la *Quantification géométrique*, l'objet principal de ce chapitre. Cette dernière permet ainsi de retrouver, outre la représentation de Schrödinger, la représentation de spin associée aux orbites coadjointes entières du groupe de spin ; ce chapitre s'achève sur deux exemples supplémentaires traités en grands détails : (i) la formation de l'équation d'onde de Schrödinger et la représentation du groupe de Bargmann associée, ainsi que (ii) la quantification géométrique de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique isotrope via l'utilisation de demi-formes.

# 2 Formulation présymplectique de la mécanique

## 2.1 Espace d'évolution, espace des mouvements

Les lois de la dynamique admettent, nous le savons, nombre de formulations différentes (newtonienne, lagrangienne, hamiltonienne, etc.) Nous choisissons d'introduire, sur quelques exemples élémentaires, un nouveau formalisme de la mécanique des systèmes : le *formalisme présymplectique*.

### 2.1.1 Equations de Newton

Les équations de Newton sur l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^3(\cong T\mathbb{R}^3)$,[1] décrit par les couples position-vitesse ($\mathbf{r}$,$\mathbf{v}$), sont données, dans le cas d'une particule de masse $m$ soumise à une force $\mathbf{F}$, par

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} \qquad \& \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

Attention ! subjectivité de l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^3$ (car le choix d'un référentiel est implicite). La considération de l'espace-temps $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, fibré sur l'axe temporel $\mathbb{R}$, décrit par la variable $t$, ouvre la voie à une formulation intrinsèque de la mécanique.

### 2.1.2 Chasse aux dénominateurs

Soit $V = \mathbb{R} \times T\mathbb{R}^3$ l'espace des triplets $y = (t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Remarquons que $V \cong J^1\mathcal{E}$. Les équations de Newton s'écrivent

$$m\delta\mathbf{v} - \mathbf{F}\delta t = 0 \qquad \& \qquad \delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta t = 0 \tag{2.1}$$

avec $\delta t \in \mathbb{R}$, où la force est $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{F}$.

Le champ de directions $\mathcal{F} : y \mapsto \delta y$ est le feuilletage 1-dimensionnel conduisant aux *équations du mouvement* (paramétrage non fixé). On appelle $V$ **espace d'évolution**.

1. On utilise le produit scalaire euclidien canonique $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

L'espace des feuilles [2] $M = V/\mathcal{F}$ est l'**espace des mouvements**. Se référer à [5].

## 2.2 Structure présymplectique

### 2.2.1 Définition

Soient $\delta y, \delta' y \in T_y V$ deux "variations" de la condition initiale $y \in V$ ; posons

$$\sigma(\delta y, \delta' y) = \langle m\delta \mathbf{v} - \mathbf{F}\delta t, \delta' \mathbf{r} - \mathbf{v}\delta' t\rangle - \langle m\delta' \mathbf{v} - \mathbf{F}\delta' t, \delta \mathbf{r} - \mathbf{v}\delta t\rangle \tag{2.2}$$

pour définir une 2-forme, $\sigma$, de l'espace d'évolution $V$.

$\mathcal{N}.\mathcal{B}$. La 2-forme $\sigma$ de $V$ se lit aussi

$$\sigma = \sum_{i=1}^{3} (m dv_i - F_i dt) \wedge (dx^i - v^i dt)$$

• Si $\delta y \in \mathcal{F}_y$ (feuilletage (2.1)) alors

$$\sigma(\delta y, \delta' y) = 0 \qquad\qquad \forall \delta' y \in T_y V$$

Donc $\mathcal{F} \subset \ker \sigma$. En fait (exercice !)

$$\boxed{\mathcal{F} = \ker \sigma} \tag{2.3}$$

est le feuilletage donnant les **équations du mouvement**.

• La 2-forme $\sigma$ est de rang 6 (constant).

• La force $\mathbf{F}$ est une composante de $\sigma$. ¿Quelle propriété de $\mathbf{F}$ impliquerait la condition supplémentaire

$$\boxed{d\sigma = 0} \tag{2.4}$$

**Théorème 2.1.** *La 2-forme $\sigma$ est fermée* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = 0$ *&* $\partial \mathbf{F}/\partial \mathbf{v} = 0$.

*Démonstration.* Exercice ! □

---

2. On appelle, ici, feuille du feuilletage $y \mapsto \mathcal{F}_y \subset T_y V$ toute courbe de $V$ dont l'espace tangent en chacun de ses points, $y$, est $\mathcal{F}_y$.

Soit $V$ une variété différentiable.

**Définition 2.2.** *On dit que* $(V, \sigma)$ *est une variété* ***présymplectique*** *ssi* $\sigma \in \Omega^2(V)$ *est fermée et de rang constant.*[3] *Le feuilletage (2.3) est le* ***feuilletage caractéristique*** *de* $\sigma$*.*

$\mathcal{N}.\mathcal{B}$. La mécanique présymplectique traite de systèmes conservatifs.

### 2.2.2 Exemples

1. Particule libre non relativiste sans spin : $\mathbf{F} = 0$.
2. Oscillateur harmonique (isotrope) avec $\mathbf{F} = -m\Omega^2\mathbf{r}$.
3. Particule en chute libre dans le champ newtonien $\mathbf{F} = -GMm\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$.

## 2.3 Espace des mouvements

**Théorème 2.3.** *L'****espace des mouvements***[4]

$$M = V/\ker\sigma$$

*hérite d'une* 2*-forme symplectique* $\omega$ *: la projection* $\pi : V \to M$ *est différentiable et*[5]

$$\boxed{\sigma = \pi^*\omega} \tag{2.5}$$

On dit aussi que $(M, \omega)$ est l'espace des **états classiques** du système. (Illustration sur des exemples ; preuve plus bas.)

3. Formulation équivalente : $(V, \sigma)$ présymplectique $\iff d\sigma = 0$ et $\dim(\ker\sigma_y) = \text{const.}\ \forall y \in V$. Dans le cas $\ker\sigma = \{0\}$, la variété $(V, \sigma)$ est dite **symplectique**.

4. C'est l'ensemble des feuilles de $\mathcal{F} = \ker\sigma$, que l'on *supposera* muni d'une structure de variété différentiable.

5. C'est-à-dire $\sigma(\delta y, \delta' y) = \omega(\delta x, \delta' x)$ si $x = \pi(y)$. On dit que $\sigma$ est l'**image réciproque** (ou encore "pull-back") de $\omega$ par l'application différentiable $\pi$.

### 2.3.1 Exemples

• **Particule libre**. Les solutions de (2.1) sont : $m\mathbf{v}(t) = \mathbf{p} = \text{const.}$ et $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{q}$ avec $\mathbf{q} = \text{const.}$, d'où $\sigma = m dv_i \wedge (dx^i - v^i dt) = d(mv_i) \wedge d(x^i - v^i t)$. Donc $\sigma = \pi^*\omega$ avec $\pi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, c'est-à-dire $\omega = dp_i \wedge dq^i$, ou encore

$$\omega = d\overline{\mathbf{p}} \wedge d\mathbf{q} \tag{2.6}$$

où

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad \& \qquad \mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t \tag{2.7}$$

**Remarque 2.4.** On note aussi $\overline{\mathbf{p}} \equiv \langle \mathbf{p}, \cdot \rangle$ le produit scalaire par le vecteur $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

• **Oscillateur harmonique isotrope**. Solutions des équations du mouvement :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \mathbf{A}\cos\Omega t + \mathbf{B}\sin\Omega t, \\
\mathbf{v}(t) &= \Omega(-\mathbf{A}\sin\Omega t + \mathbf{B}\cos\Omega t)
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$. Ici, $\Omega > 0$ représente la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

Variation des constantes :

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= d\mathbf{A}\cos\Omega t + d\mathbf{B}\sin\Omega t + \mathbf{v}dt, \\
d\mathbf{v} &= \Omega(-d\mathbf{A}\sin\Omega t + d\mathbf{B}\cos\Omega t) - \Omega^2\mathbf{r}dt
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sigma &= m(d\overline{\mathbf{v}} + \Omega^2\,\overline{\mathbf{r}}dt) \wedge (d\mathbf{r} - \mathbf{v}dt) \\
&= m\Omega(-d\overline{\mathbf{A}}\sin\Omega t + d\overline{\mathbf{B}}\cos\Omega t) \wedge (d\mathbf{A}\cos\Omega t + d\mathbf{B}\sin\Omega t) \\
&= -m\Omega\, d\overline{\mathbf{A}} \wedge d\mathbf{B}
\end{aligned}$$

On trouve $\sigma = \pi^*\omega$ avec

$$\omega = -m\Omega\, d\overline{\mathbf{A}} \wedge d\mathbf{B}$$

L'espace des **états classiques** de l'OH isotrope est $(\mathbb{R}^6, \omega)$ décrit par $x = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ où

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{r}\cos\Omega t - \frac{\mathbf{v}}{\Omega}\sin\Omega t \\ \mathbf{B} &= \mathbf{r}\sin\Omega t + \frac{\mathbf{v}}{\Omega}\cos\Omega t \end{aligned}$$

**Remarque 2.5.** Posons $\mathbf{Z} = \mathbf{A} - i\mathbf{B} \in \mathbb{C}^3$ ; l'espace des mouvements est $(\mathbb{C}^3, \omega)$ avec la 2-forme symplectique [6]

$$\omega = \frac{m\Omega}{2i} d\overline{\mathbf{Z}} \wedge d\mathbf{Z} \tag{2.8}$$

L'hamiltonien $h = \frac{1}{2}m(\|\mathbf{v}\|^2 + \Omega^2\|\mathbf{r}\|^2)$ passe à l'espace des mouvements selon

$$H = \frac{1}{2}m\Omega^2|\mathbf{Z}|^2 \tag{2.9}$$

• **États stationnaires de l'OH isotrope en dimension** $n$. Considérons la sous-variété plongée $V_E = \{Z \in \mathbb{C}^n | H = E\}$ : mouvements à énergie fixée $E = \text{const.} > 0$. La 2-forme induite sur $V_E \cong S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ est

$$\sigma_E = \frac{E}{i\Omega} d\overline{\mathbf{U}} \wedge d\mathbf{U} \qquad \text{où} \qquad \mathbf{U} := \frac{\mathbf{Z}}{|\mathbf{Z}|} \tag{2.10}$$

Feuilletage caractéristique de $\sigma_E$ : on a $\delta\mathbf{U} \in \ker\sigma_E$ ssi $\delta\mathbf{U} = i\lambda\mathbf{U}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Posant $\lambda = \delta\theta$, on trouve $\mathbf{U}(\theta) = e^{i\theta}\mathbf{U}(0)$ ; l'espace des feuilles

$$M_E = V_E / \ker\sigma_E \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

est décrit par les projecteurs hermitiens de rang un : $P = \mathbf{U}\overline{\mathbf{U}}$. On prouve la

**Proposition 2.6.** *La variété $M_E$ des* ***états stationnaires*** *classiques d'énergie $E$ possède une forme symplectique*

$$\omega_E = \frac{E}{i\Omega}\mathrm{Tr}(PdP \wedge dP)$$

*telle que $\sigma_E = \pi^*\omega_E$.*

6. Bien sûr, $\overline{\mathbf{Z}} = \overline{\mathbf{A}} + i\overline{\mathbf{B}}$ (adjoint, i.e transposé & conjugué complexe, de $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^n$) et $|\mathbf{Z}|^2 := \overline{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}$.

*Démonstration.* On note, alternativement, $\omega_E(\delta P, \delta' P) = E/(i\Omega)\mathrm{Tr}(P[\delta P, \delta' P])$ et on vérifie que $\omega_E$ est bien une 2-forme réelle de $M_E$ ; on montre directement que $\omega_E$ a pour image réciproque $\sigma_E$ (cf. (2.10)) par l'application $\pi : \mathbf{U} \mapsto P = \mathbf{U}\overline{\mathbf{U}}$, i.e. $\omega_E(\delta P, \delta' P) = \sigma_E(\delta \mathbf{U}, \delta' \mathbf{U})$. □

• **Variété des rayons lumineux**. Une droite euclidienne orientée est (non uniquement) définie par un point $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ et une direction $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ (avec $\|\mathbf{u}\| = 1$) ; on note $V = \mathbb{R}^3 \times S^2$ l'espace des droites muni de la 1-forme

$$\beta = k\langle \mathbf{u}, d\mathbf{r} \rangle \tag{2.11}$$

avec $k = \mathrm{const.} > 0$ (couleur).

Feuilletage caractéristique de $\sigma = d\beta$ : on a $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \in \ker \sigma$ ssi $\delta \mathbf{r} = \lambda \mathbf{u}$ & $\delta \mathbf{u} = 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. En intégrant via l'abscisse curviligne, $\lambda = \delta s$, on trouve $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u}$ & $\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}_0$ avec, e.g. $\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{u}_0$.

L'espace des mouvements (ou variété des rayons lumineux)

$$M = V/\ker \sigma \cong TS^2$$

décrit par

$$\mathbf{r}_0 = (1 - \mathbf{u}\overline{\mathbf{u}})\,\mathbf{r} \qquad \& \qquad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$$

hérite donc de la forme symplectique $\omega = d\alpha$ où

$$\alpha = -k\langle \mathbf{r}_0, d\mathbf{u}_0 \rangle$$

• **Equations de Fermat** Les lois de l'optique géométrique en milieu inhomogène et isotrope se formulent via la prescription de Fermat-Cartan consistant à remplacer la 1-forme $\beta$ (donnée en (2.11)) par [7]

$$\hat{\beta} = n \cdot \beta \tag{2.12}$$

où $n \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{>0})$ représente l'indice de réfraction du milieu diélectrique.

7. Abus de notation.

## 2.4 Invariants intégraux

Ce sous-chapitre propose quelques compléments de géométrie différentielle : dérivée extérieure, dérivée de Lie des $k$-formes d'une variété $M$. Voir [4].

### 2.4.1 Dérivée extérieure

La définition générale de la **dérivée extérieure** [8] des formes différentielles se spécialise :

0) Pour tout $f \in \Omega^0(M)$ on a

$$df(X) = X(f)$$

1) Si $\alpha \in \Omega^1(M)$ on a

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) \tag{2.13}$$

2) Si $\omega \in \Omega^2(M)$ on a

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) \;\; &= \;\; +X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad\; - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y) \end{aligned}$$

Vérification pour les premiers degrés :

0) Pour $f \in \Omega^0(M)$, on a $df = \partial_i f \, dx^i$ et $df(X) = \partial_i f \, X^i = X(f)$ (on a posé $\partial_i = \partial/\partial x^i$ pour tout $i = 1, \ldots, \dim(M)$).

8. Rappelons la formule générale pour la dérivée extérieure $d\omega$ d'une $k$-forme $\omega$ sur une variété différentiable $M$, à savoir :

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, \ldots, X_k) &= \sum_{a=0}^{k} (-1)^a X_a(\omega(X_0, X_1, \ldots, \widehat{X_a}, \ldots, X_k)) \\ &+ \sum_{0 \leq a < b \leq k} (-1)^{a+b} \omega([X_a, X_b], X_0, \ldots, \widehat{X_a}, \ldots, \widehat{X_b}, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

pour tous $X_0, X_1, \ldots, X_k \in \mathrm{Vect}(M)$

1) Pour $\alpha = \alpha_j dx^j \in \Omega^1(M)$, on a $d\alpha = \partial_i \alpha_j dx^i \wedge dx^j$ ; il vient ainsi $d\alpha(X) = (\partial_i\alpha_j - \partial_j\alpha_i)X^i dx^j$ et donc

$$\begin{aligned} d\alpha(X,Y) &= (\partial_i\alpha_j - \partial_j\alpha_i)X^iY^j \\ &= X^i\partial_i(\alpha_j Y^i) - \alpha_j X^i \partial_i Y^j - (X \leftrightarrow Y) \\ &= X^i\partial_i(\alpha_j Y^i) - Y^i\partial_i(\alpha_j X^i) - \alpha_j(X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j) \\ &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) \end{aligned}$$

où

$$[X,Y] = (X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

est le **crochet de Lie** [9] des deux champs de vecteurs $X$ et $Y$.

Un résultat très important est fourni par le

**Lemme 2.7** (Poincaré)**.** *(i) Toute forme exacte est fermée :* $d(d\alpha) = 0$*. (ii) Si* $\omega$ *est une forme fermée,* $d\omega = 0$*, alors* $\omega = d\alpha$ ***localement*** *: tout point possède un voisinage ouvert dans lequel* $\omega$ *est exacte.* [10]

### 2.4.2 Image directe & image réciproque

Soient $M$ et $N$ deux variétés différentiables. On définit l'**image directe** $\varphi_* X$ de $X \in \mathrm{Vect}(M)$ par $\varphi \in C^\infty(M,N)$ par

$$(\varphi_* X)(\varphi(x)) = D\varphi(x)X(x) \tag{2.14}$$

**Remarque 2.8.** L'image directe $\varphi_* X$ n'est pas, en général, un champ de vecteurs de $N$. C'est cependant le cas si $\varphi : M \to N$ est un difféomorphisme.

Si $f : N \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable de $N$, son image réciproque par une application différentiable $\varphi : M \to N$ est la fonction (différentiable) $\varphi^* f = f \circ \varphi$ de $M$.

9. On rappelle que $[X,Y]f = XYf - YXf$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

10. Pour certaines variétés toute $k$-forme fermée est exacte : leur $k$-ème espace de "cohomologie de de Rham" est trivial, $H^k(M,\mathbb{R}) = \{0\}$. Mais dans le cas du cercle, par exemple, $H^1(S^1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

**Exercice 2.9.** Si $X$ est un champ de vecteurs de $M$, montrer que son image directe par un *difféomorphisme* $\varphi : M \to N$ est le champ de vecteurs de $N$ suivant

$$(\varphi_* X) : f \mapsto (\varphi^*)^{-1}(X(\varphi^* f)) \tag{2.15}$$

**Définition 2.10.** *Soit $\omega \in \Omega^k(N)$ une $k$-forme de $N$ ; son* ***image réciproque*** *par $\varphi \in C^\infty(M, N)$ est la $k$-forme $\varphi^*\omega$ de $M$ définie par*

$$(\varphi^*\omega)(X_1, \ldots, X_k) = \varphi^* \left(\omega(\varphi_* X_1, \ldots, \varphi_* X_k)\right) \tag{2.16}$$

*pour tous $X_1, \ldots, X_k \in \mathrm{Vect}(M)$.*

**Remarque 2.11.** La formule (2.16) s'étend naturellement au cas où $\omega$ est une $\ell$-forme et $k < \ell$.

### 2.4.3 Dérivée de Lie

La **dérivée de Lie** d'un champ de tenseurs selon un champ de vecteur donne la vitesse de déformation de ce tenseur sous le flot de ce champ de vecteurs. Par exemple :

**Définition 2.12.** *La dérivée de Lie de $\omega \in \Omega^k(M)$ selon $X \in \mathrm{Vect}(M)$, générateur du flot $\varphi_t$ est la $k$-forme*

$$\boxed{L_X \omega = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega \Big|_{t=0}}$$

0) Pour tout $f \in \Omega^0(M)$ on a

$$L_X f = X(f)$$

1) Si $\alpha \in \Omega^1(M)$ on a [11]

$$L_X \alpha(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]) \tag{2.17}$$

11. Par définition $L_X \alpha = (X^i \partial_i \alpha_j + (\partial_j X^i)\alpha_i) dx^j$, d'où

$$\begin{aligned} L_X \alpha(Y) &= X^i(\partial_i \alpha_j) Y^j + (\partial_j X^i) \alpha_i Y^j \\ &= X^i \partial_i(\alpha_j Y^j) - \alpha_j X^i \partial_i Y^j + \alpha_j Y^i \partial_i X^j \\ &= X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]) \end{aligned}$$

k) Formule générale (naturalité) : si $\omega \in \Omega^k(M)$ on a

$$\begin{aligned} L_X\omega(X_1, \ldots, X_k) &= X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) \\ &\quad - \omega([X, X_1], \ldots, X_k) - \ldots - \omega(X_1, \ldots, [X, X_k]) \end{aligned}$$

pour tous $X_1, \ldots, X_k \in \mathrm{Vect}(M)$.

• **Formule magique de Cartan**

C'est une formule très efficace donnant la dérivée de Lie des formes différentielles. (Preuve laborieuse mais sans mystère !)

**Théorème 2.13** (Cartan). *Si $\omega \in \Omega^k(M)$ on a*

$$\boxed{L_X\omega = d(\omega(X)) + (d\omega)(X)} \tag{2.18}$$

*pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$.*

• Vérification pour $k = 0, 1$ :

0) Si $f \in \Omega^0(M)$, la formule est triviale.

1) Si $\alpha \in \Omega^1(M)$ on a par (2.18) : $L_X\alpha(Y) = Y(\alpha(X)) + d\alpha(X, Y) = Y(\alpha(X)) + X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$, c'est-à-dire (2.17).

**Exercice 2.14.** Prouver, grâce à la formule (2.18), que

$$L_X \circ d = d \circ L_X \tag{2.19}$$

pour tout champ de vecteurs $X$.

**Proposition 2.15.** *Si $\omega$ est une forme différentielle, on a*[12]

$$(L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)\omega = L_{[X,Y]}\,\omega \tag{2.20}$$

*pour tous champs de vecteurs $X$ et $Y$.*

12. Cette formule est, en fait, générale et valable pour tous champs de tenseurs.

*Démonstration.* La formule magique de Cartan implique : $L_X(L_Y\omega) - L_Y(L_X\omega) = L_X(d(\omega(Y))) + L_X((d\omega)(Y)) - X \leftrightarrow Y = d(L_X(\omega(Y))) + (L_X d\omega)(Y) + (d\omega)([X,Y]) - X \leftrightarrow Y$ grâce à (2.19) et à la formule de naturalité ci-dessus. On a, de la même façon, $[L_X, L_Y]\omega = d((L_X\omega)(Y) + \omega([X,Y])) + (dL_X\omega)(Y) + (d\omega)([X,Y]) - X \leftrightarrow Y$. Finalement $[L_X, L_Y]\omega = 2L_{[X,Y]}\,\omega + (L_Y(L_X\omega) - X \leftrightarrow Y)$, d'où $2[L_X, L_Y]\omega = 2L_{[X,Y]}\,\omega$. □

### 2.4.4 Feuilletage caractéristique

Un feuilletage d'une variété $V$ est un champ $\mathcal{F} : y \mapsto \mathcal{F}_y \subset T_yV$ de sous-espaces vectoriels, différentiable, [13] et vérifiant une condition supplémentaire que l'on va décrire. On appelle *variété intégrale* de $\mathcal{F}$ une variété $F \subset V$ plongée [14] telle que $T_yF = \mathcal{F}_y$ en tout point $y \in F$. Le champ $\mathcal{F}$ est un *feuilletage* de $V$ si tout point $y \in V$ appartient à une variété intégrale (encore appelée feuille) $F$.

**Théorème 2.16** (Fröbenius)**.** *Un champ $\mathcal{F}$ de sous-espaces tangents d'une variété $V$ est un **feuilletage** si et seulement si, étant donnés deux champs de vecteurs $X$ et $Y$ de $V$ qui vérifient $X_y, Y_y \in \mathcal{F}_y$, on a aussi $[X,Y]_y \in \mathcal{F}_y$ (localement).*

**Exercice 2.17.** Prouver que toute distribution $\mathcal{F}$ de rang $k = 1$ est un feuilletage.

**Définition 2.18.** *Le **feuilletage caractéristique** de la forme $\sigma \in \Omega^k(V)$ est*

$$\mathcal{F}^\sigma = \ker\sigma \cap \ker d\sigma \tag{2.21}$$

**Théorème 2.19.** *Soit $\mathcal{F} \subset TV$ un feuilletage de $V$ (e.g. le feuilletage de Newton). Supposons que l'espace des feuilles $M = V/\mathcal{F}$ soit une variété. Si une forme $\sigma \in \Omega^k(V)$ est un **invariant intégral** de $\pi : V \to M$, i.e. si $\sigma = \pi^*\omega$ où $\omega \in \Omega^k(M)$, alors*

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\sigma$$

13. Un champ $\mathcal{F}$ de sous-espaces vectoriels de dimension $k \leq \dim(V)$ est *différentiable* (on dit que $\mathcal{F}$ est une **distribution** de rang $k$) si, localement, il existe $k$ champs de vecteurs différentiables $X_1, X_2, \ldots, X_k$ de $V$ tels que $\mathcal{F} = \bigoplus_{a=1}^k \mathbb{R}X_a$.

14. L'inclusion $F \to V$ est une application injective et de dérivée injective en tout point de $F$.

*Démonstration.* Soit $X$ champ de vecteurs de $V$, on a alors, voir (2.16), $\sigma(X) = (\pi^*\omega)(X) = \pi^*(\omega(\pi_*X))$ où $(\pi_*X)(x) = D\pi(y)X(y)$ représente l'image du champ de vecteurs $X$ au point $x = \pi(y)$. Si $X$ est tangent à $\mathcal{F}$, i.e. si $\pi_*X = 0$, on a donc $\sigma(X) = 0$ ; de plus $d\sigma(X) = d(\pi^*\omega)(X) = (\pi^*d\omega)(X) = \pi^*(d\omega(\pi_*X)) = 0$. □

On montre que la réciproque du théorème ci-dessus est vraie.

**Remarque 2.20.** Dans le cas de la mécanique on a : $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\sigma$ car $d\sigma = 0$. La forme présymplectique, $\sigma$, de l'espace d'évolution $V$ est ainsi un invariant intégral (au sens d'Elie Cartan) du feuilletage donnant les équations du mouvement ; elle passe à l'espace des mouvements dont elle définit la structure symplectique, $\omega$.

## 2.5 Exercices

1) Soit $(\mathbb{R}^2, \omega = dp \wedge dq)$ ; calculer la dérivée de Lie $L_X\omega$ pour tout champ de vecteurs $X = P(p,q)\partial/\partial p + Q(p,q)\partial/\partial q$. A quelle condition $X$ est-il un **symplectomorphisme infinitésimal**, i.e. tel que $L_X\omega = 0$ ?

2) Même question pour $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = dp_i \wedge dq^i)$ : à quelle condition $X \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^{2n})$ est-il un symplectomorphisme infinitésimal ? Vérifier que cette condition vaut pour $X_H$, champ hamiltonien associé à l'observable $H$.

3) Déterminer explicitement la forme générale des symplectomorphismes infinitésimaux linéaires de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = dp_i \wedge dq^i)$. En déduire qu'ils forment une algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{sp}(n, \mathbb{R})$ dont on donnera la structure et la dimension.

4) Soit $\mathcal{E} = p_i\partial/\partial p_i$ le **champ de vecteurs d'Euler** de $(T^*M, \alpha = p_i dq^i)$. Donner $L_\mathcal{E}\alpha$. En déduire que $\mathcal{E}$ est une "similitude infinitésimale" de poids 1.

5) Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Vect}(M)$ une similitude infinitésimale d'une variété symplectique $(M, \omega)$, i.e. telle que $L_\mathcal{E}\omega = f\omega$ pour une certaine fonction $f \in C^\infty(M)$.

1. Montrer que $f = \mathrm{const.}$ (localement) si $\dim(M) > 2$.
2. Prouver, dans ces conditions, que la forme symplectique, $\omega$, est exacte.

6) Considérons la 2-forme champ magnétique $B = g/\|\mathbf{r}\|^3 \,\mathrm{vol}(\mathbf{r})$ d'un **monopole de Dirac** localisé à l'origine $\mathbf{r} = 0$ de $\mathbb{R}^3$ où $\mathbf{r} = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$ ; la constante $g$ est la “charge magnétique” du monopole.

1. Montrer que
$$B = g\,\frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{2.22}$$
2. Montrer que $dB = 0$ en tout point $\mathbf{r} \neq 0$. La 2-forme $B$ est-elle exacte ?
3. Vérifier que $B = g\,\pi^*\mathrm{surf}_{S^2}$ où $\pi : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to S^2$ est donné par $\pi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$.
4. Calculer la dérivée de Lie $L_Z B$ selon $Z = x\,\partial/\partial y - y\,\partial/\partial x$. Conclusion ?

7) Justifier que les symplectomorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique $(M, \omega)$ forment une algèbre de Lie (cf. (2.20)). Montrer que tout champ de vecteurs hamiltonien $X_H$ est un symplectomorphisme infinitésimal.

8) Soit $V = \mathbb{R}^3$ muni de la 1-forme $\alpha = ydx + dz$.

1. Vérifier que $\alpha \wedge d\alpha$ est une forme volume (on dit alors que $\alpha$ est une **forme de contact**).
2. Calculer $\ker d\alpha$ ; en déduire le feuilletage caractéristique $\mathcal{F}^\alpha$ de la 1-forme $\alpha$.
3. Considérons l'ensemble des champs de vecteurs de $V$ de la forme $X = A(x)\partial_x + B(x, y, z)\partial_y + C(x, y, z)\partial_z$. A quelle condition a-t-on $L_X\alpha = 0$ ? Vérifier que ces champs de vecteurs forment une algèbre de Lie isomorphe à $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}) \ltimes C^\infty(\mathbb{R})$.

9) Déterminer le feuilletage caractéristique de $\hat{\sigma} = d\hat{\beta}$, la 2-forme de Fermat-Cartan (cf. (2.12)) ; prouver qu'il conduit aux **équations de Fermat** de l'optique géométrique.

10) Vérifier que la distribution $\mathcal{F}^\sigma$ définie en (2.21) satisfait à la condition d'intégrabilité de Fröbenius (Théorème 2.16), et constitue bien un **feuilletage**.

11) Soit $\mathbf{N}$ un champ de vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ ne s'annulant nulle part. A quelle condition la distribution $\mathcal{F} = \mathbf{N}^\perp$ de plans orthogonaux à $\mathbf{N}$ est-elle un feuilletage ?

12) Soit $\omega$ une 1-forme partout non nulle sur une variété $M$. A quelle condition $\mathcal{F} = \ker(\omega)$ est-il un feuilletage ? Réponse : $\omega \wedge d\omega = 0$.

# 3 Symétries en mécanique présymplectique, application moment, théorème de Noether

## 3.1 Groupes de symétries

La notion de **symétrie** est étroitement associée à une **géométrie** ; par exemple la géométrie euclidienne, la géométrie galiléenne de la physique non relativiste, la géométrie minkowskienne de la relativité restreinte.

Les groupes correspondant sont naturellement des groupes de symétries des équations du mouvement des systèmes mécaniques isolés. Ils sont, dans chaque géométrie, des groupes de (pré)symplectomorphismes des systèmes dynamiques en interaction mutuelle mais isolés du reste de l'Univers [5].

### 3.1.1 Symétrie euclidienne

Le **groupe d'Euclide** $E(3)$ est le groupe des matrices $4 \times 4$ suivantes

$$g = \begin{pmatrix} R & \mathbf{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $R \in \mathrm{O}(3)$, i.e. $\overline{R}R = \mathbf{1}$, et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$.

• Action sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\mathbf{r} + \mathbf{c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Action relevée sur le tangent [15] unitaire $\mathbb{R}^3 \times S^2 \subset T\mathbb{R}^3$ :

$$y^* = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ \mathbf{u}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\mathbf{r} + \mathbf{c} \\ R\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

• On vérifie que la forme présymplectique $\sigma = k\, d\langle \mathbf{u}, d\mathbf{r} \rangle$ de l'espace des rayons lumineux (cf. (2.11)) de couleur $k$, i.e.

$$\boxed{\sigma(\delta y, \delta' y) = k(\langle \delta \mathbf{u}, \delta' \mathbf{r} \rangle - \langle \delta' \mathbf{u}, \delta \mathbf{r} \rangle)} \tag{3.1}$$

15. Le relevé $Tg$ de $g$ à $T\mathbb{R}^3$ préserve bien le sous-fibré des vecteurs unitaires $\mathbf{u} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

est invariante sous $E(3)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\sigma(\delta y, \delta' y) = \sigma(\delta y^*, \delta' y^*)}$$

• Les trajectoires des photons "euclidiens" **polarisés** (à droite) sont données par le noyau de la 2-forme présymplectique de $\mathbb{R}^3 \times S^2$ suivante

$$\sigma_\hbar(\delta y, \delta' y) = k(\langle \delta \mathbf{u}, \delta' \mathbf{r}\rangle - \langle \delta' \mathbf{u}, \delta \mathbf{r}\rangle) - \hbar \langle \mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \times \delta' \mathbf{u}\rangle \tag{3.2}$$

**Exercice 3.1.** Déterminer le sous groupe $G \subset \mathrm{E}(3)$ qui invarie $\sigma_\hbar$. Vérifier que l'opération de parité $P : \mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ change le sens de polarisation, $P^* \sigma_{\pm\hbar} = \sigma_{\mp\hbar}$.

### 3.1.2 Symétrie galiléenne

Le **groupe de Galilée** $\mathrm{Gal}(3,1)$ est le groupe des matrices $5 \times 5$ suivantes

$$g = \begin{pmatrix} R & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

où $R \in \mathrm{SO}(3)$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ et $e \in \mathbb{R}$ ; respectivement : rotations, boosts, translations spatiales et translations temporelles. [16]

• Action sur l'espace-temps $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\mathbf{r} + \mathbf{b}t + \mathbf{c} \\ t + e \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Action relevée à l'espace d'évolution $V = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ :

$$y^* = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^* \\ t^* \\ \mathbf{v}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\mathbf{r} + \mathbf{b}t + \mathbf{c} \\ t + e \\ R\mathbf{v} + \mathbf{b} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

16. Il s'agit ici de la composante neutre du groupe de Galilée complet, $(\mathrm{O}(3) \times (\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{R})) \ltimes (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, le groupe des transformations affines de l'espace-temps galiléen plat, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, qui invarient les "métriques" galiléennes spatiale, $\gamma = \partial_x \otimes \partial_x + \partial_y \otimes \partial_y + \partial_z \otimes \partial_z$, et temporelle, $\tau = dt \otimes dt$.

**Proposition 3.2.** *La 2-forme présymplectique de $V$ pour une particule galiléenne libre de masse $m$ (cf. (2.2))*

$$\boxed{\sigma(\delta y, \delta' y) = \langle m\delta\mathbf{v}, \delta'\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta' t\rangle - \langle m\delta'\mathbf{v}, \delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta t\rangle} \tag{3.5}$$

*est invariante sous l'action (3.4) de* $\mathrm{Gal}(3,1)$, *i.e.*

$$\boxed{\sigma(\delta y, \delta' y) = \sigma(\delta y^*, \delta' y^*)}$$

*Démonstration.* Exercice ! □

### 3.1.3 Symétrie relativiste sous Poincaré

Le **groupe de Poincaré** $\mathrm{E}(3,1)$ est le groupe des matrices

$$g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

où $L \in \mathrm{O}(3,1)$, i.e. $\overline{L}L = \mathbf{1}$, et $C \in \mathbb{R}^{3,1}$ ; respectivement : transformation de Lorentz et translation spatio-temporelle. [17]

• Action sur l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$ :

$$\begin{pmatrix} X^* \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LX + C \\ 1 \end{pmatrix}$$

On sait que $\mathrm{E}(3,1)$ est le groupe des **isométries** de l'espace-temps $\mathbb{R}^{3,1}$. Nous ne considérerons désormais que la composante neutre $\mathrm{SE}_+(3,1)$ des rotations orthochrones.

• Le relevé de l'action du groupe de Poincaré restreint $SE_+(3,1)$ au tangent unitaire-futur (espace d'évolution)

$$V = U_+\mathbb{R}^{3,1} = \{y = (X,U) \in T\mathbb{R}^{3,1} | \mathrm{g}(U,U) = 1, U \text{ de futur}\}$$

17. On désigne par $\mathbb{R}^{3,1} = (\mathbb{R}^4, \mathrm{g})$ l'espace de Minkowski (ou espace des événements $X$) muni de la métrique, g, définie par $\mathrm{g}(\delta X, \delta' X) = -\sum_{i=1}^3 \delta X^i \delta' X^i + \delta X^4 \delta' X^4$ ; on note $\overline{\delta X} = \mathrm{g}(\delta X)$ le covecteur g-transposé du vecteur $\delta X \in \mathbb{R}^{3,1}$ et, de même, $\overline{L}$ le g-transposé de l'opérateur linéaire $L$, i.e. $\mathrm{g}(\delta X, \overline{L}\delta' X) \equiv \mathrm{g}(L\delta X, \delta' X)$. On aura choisi une orientation spatiale et temporelle de l'espace-temps.

est donné par

$$y^* = \begin{pmatrix} X^* \\ U^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LX + C \\ LU \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

• Les équations du mouvement d'une particule relativiste libre de masse $m$ et sans spin sont associées au noyau de la 2-forme

$$\boxed{\sigma = d\varpi \qquad\qquad \text{où} \qquad\qquad \varpi = m\,\overline{U}dX} \tag{3.8}$$

comme le montre la

**Proposition 3.3.** *Le feuilletage caractéristique de $\sigma$ est donné par*

$$\delta\begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} \in \ker\sigma \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \delta X & = & \lambda U \\ \delta U & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.9}$$

*avec $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Les feuilles de ce feuilletage se projettent bien sur les **géodésiques de genre temps** (futur) de l'espace de Minkowski. L'espace des mouvements de cette particule est l'espace $M = V/\ker\sigma \cong TH^3_+$ où $H^3_+$ est l'hyperboloïde unité de futur (espace de de Sitter) ; en effet la projection $\pi : V \to M$ est donnée par $\pi(X,U) = (Q = (1 - U\overline{U})X, U)$ et $\sigma = \pi^*\omega$ où $\omega$ est la 2-forme symplectique de $M \cong TH^3_+$ suivante

$$\begin{aligned} \omega &= d(-m\,\overline{Q}dU) && (3.10) \\ &= d\overline{P} \wedge dQ && (3.11) \end{aligned}$$

où $P = mU$ (impulsion relativiste).

**Proposition 3.4.** *La forme présymplectique (3.8) est **Poincaré-invariante** sous l'action (3.7), i.e.*

$$\boxed{\sigma(\delta y^*, \delta' y^*) = \sigma(\delta y, \delta' y) \qquad\qquad \forall g \in \mathrm{SE}_+(3,1)}$$

*Démonstration.* Exercice ! □

**Exercice 3.5.** Montrer que l'action (3.7) du groupe de Poincaré, $\mathrm{SE}_+(3,1)$, passe à l'espace des mouvements $(M, \omega)$ ; prouver que ce groupe est un groupe de symplectomorphismes.

## 3.2 Groupes et algèbres de Lie

On pourra se rapporter à l'ouvrage [4].

### 3.2.1 Définitions générales

**Définition 3.6.** *Un **groupe de Lie** est un groupe $G$ muni d'une structure de variété différentiable telle que la loi de groupe $(g,h) \mapsto gh : G \times G \to G$ ainsi que l'inversion $g \mapsto g^{-1} : G \to G$ soient des applications différentiables.*

Les groupes d'Euclide, Galilée et Poincaré sont des groupes de Lie : ce sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$, [18] i.e. des **groupes matriciels**.

Soit $L_g : h \mapsto gh : G \to G$ la translation à gauche par $g \in G$. On dit que $X \in \mathrm{Vect}(G)$ est invariant à gauche si $(L_g)_* X = X$ pour tout $g \in G$. [19]

**Proposition 3.7.** *Tout champ de vecteurs invariant à gauche sur $G$ est de la forme*

$$X = X_Z \qquad \text{où} \qquad X_Z(g) = DL_g(e)Z \tag{3.12}$$

*pour un certain $Z \in T_eG$. L'espace des champs de vecteurs invariants à gauche est identifié à $T_eG$ ; ils forment une **algèbre de Lie** notée $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\cdot\,])$.*

*Démonstration.* Un champ $X$ est invariant à gauche si et seulement si $((L_g)_*X)(gh) = DL_g(h)X(h) = X(gh)$. A l'élément neutre $h = e$ de $G$, on trouve $X(g) = DL_g(e)X(e)$ ; d'où (3.12).

18. On rappelle que $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ est le groupe des matrices réelles $N \times N$ inversibles.

19. Si $M$ et $N$ sont deux variétés différentiables de dimension $n$, l'*image directe* d'un champ de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(M)$ par un difféomorphisme $\varphi : M \to N$ est, cf. (2.14), le champ de vecteurs $\varphi_* X \in \mathrm{Vect}(N)$ défini par $(\varphi_* X)(\varphi(x)) = D\varphi(x)X(x)$ en tout point $x \in M$ où sont définis ces objets géométriques. Localement, si $X^i(x) = dx^i(X)$ désigne la composante $i = 1, \ldots, n$ de $X$, on a $(\varphi_* X)^j(y) = \partial y^j / \partial x^i X^i(x)$ pour tout $j = 1, \ldots, n$ en tout point $y = \varphi(x) \in N$.

Vérifions que $X_Z$ est bien invariant à gauche ; en effet

$$\begin{aligned} X_Z(gh) &= D(L_{gh})(e)Z \\ &= D(L_g \circ L_h)(e)Z \\ &= DL_g(h)DL_h(e)Z \\ &= DL_g(h)X_Z(h) \end{aligned}$$

L'identification recherchée, $\mathfrak{g} \to T_eG$, est donnée par $X \mapsto X(e)$, d'inverse $Z \mapsto X_Z$.

La suite de la preuve de la Proposition 3.7 nécessite le lemme suivant :

**Lemme 3.8.** *Soit $\varphi : M \to N$ un difféomorphisme entre deux variété $M$ et $N$. Pour tous champs de vecteurs $X$ et $Y$ de $M$, de crochet de Lie $[X, Y]$, on a la relation suivante $[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_*[X, Y]$.*

*Démonstration.* L'image directe d'un champ de vecteurs $X$ de $M$ par $\varphi$ est définie, cf. (2.15), par $(\varphi_* X)f = (\varphi^*)^{-1}(X(\varphi^* f))$ pour tout $f \in C^\infty(N)$. On a donc $[\varphi_* X, \varphi_* Y] = (\varphi^*)^{-1} \circ X \circ \varphi^* \circ (\varphi^*)^{-1} \circ Y \circ \varphi^* - (X \leftrightarrow Y) = (\varphi^*)^{-1} \circ [X, Y] \circ \varphi^* = \varphi_*[X, Y]$. $\square$

On a maintenant $(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] = [X, Y]$ pour tous champs de vecteurs $X, Y$ de $G$ invariants à gauche ; l'espace $\mathfrak{g} \cong T_eG$ des champs de vecteurs invariants à gauche forme donc une algèbre de Lie pour le crochet de Lie de $\mathrm{Vect}(G)$. $\square$

**Remarque 3.9.** On définit de la même manière l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de $G$ invariants à droite.

**Exemple 3.10.** Soit $G \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ un groupe matriciel et $\mathfrak{g} \subset \mathrm{L}(\mathbb{R}^N)$ son algèbre de Lie ; le champ de vecteurs $X_Z : g \mapsto \delta g$ associé à $Z \in \mathfrak{g}$ est donné par [20]

$$\delta g = gZ \tag{3.13}$$

20. Multiplication matricielle !

Le crochet de Lie de deux tels champs de vecteurs est alors

$$[\delta, \delta']g = g[Z, Z']$$

où $[Z, Z'] = ZZ' - Z'Z$ est le commutateur matriciel de $Z, Z' \in \mathfrak{g}$.

### 3.2.2 Représentation adjointe

Tout groupe de Lie $G$ agit naturellement sur son algèbre de Lie. Désignons par $\mathrm{C}_g : h \mapsto ghg^{-1} : G \to G$ la conjugaison.

**Définition 3.11.** *La dérivée* $\mathrm{Ad}(g) = D\mathrm{C}_g(e) : T_eG \to T_eG$ *est la* ***représentation adjointe*** *de* $G$ *sur* $\mathfrak{g}$.[21]

Dans le cas matriciel on a

$$\mathrm{Ad}(g)Z = \delta(ghg^{-1}) \qquad \text{avec} \qquad \delta h|_{h=\mathbf{1}} = Z$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{Ad}(g)Z \equiv gZg^{-1}} \tag{3.14}$$

**Exemple 3.12.** Donnons quelques exemples d'algèbres de Lie matricielles :

1. Le groupe $(\mathbb{R}^n, +)$ des **translations spatiales** est abélien, son algèbre de Lie $(\mathbb{R}^n, [\,\cdot, \cdot\,] = 0)$ est commutative.
2. L'algèbre de Lie $\mathrm{o}(3)$ du **groupe des rotations** $\mathrm{SO}(3)$ s'identifie aux matrices antisymétriques $Z = j(\boldsymbol{\omega})$, où $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Le crochet de Lie est donné par le produit vectoriel : $[Z, Z'] = j(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}')$.

21. On a $\mathrm{Ad}(gh) \equiv \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h)$ et $\mathrm{Ad}(g^{-1}) \equiv (\mathrm{Ad}(g))^{-1}$.

3. Le groupe de Heisenberg $H_1$ est le groupe des matrices triangulaires

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}_1$ est constituée des matrices

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Le crochet de Lie est donné par

$$[Z, Z'] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta' - \alpha'\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Le **groupe de Galilée** $\mathrm{Gal}(3,1)$, cf. (3.3), a pour algèbre de Lie $\mathrm{gal}(3,1)$ engendrée par les matrices

$$Z = \begin{pmatrix} j(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

avec $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Le crochet de Lie $[Z, Z'] = Z''$ est alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{\omega}'' & = & \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}' \\ \boldsymbol{\beta}'' & = & \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma}'' & = & \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}' - \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}\varepsilon' - \boldsymbol{\beta}'\varepsilon \\ \varepsilon'' & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.17}$$

5. Le **groupe de Poincaré** $\mathrm{E}(3,1)$, cf. (3.6), a pour algèbre de Lie $\mathrm{e}(3,1)$ engendrée par les matrices

$$Z = \begin{pmatrix} \Lambda & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

où $\Lambda \in \mathrm{o}(3,1)$, i.e. $\overline{\Lambda} + \Lambda = 0$,[22] et $\Gamma \in \mathbb{R}^{3,1}$. Le crochet de Lie est alors

$$[Z, Z'] = \begin{pmatrix} [\Lambda, \Lambda'] & \Lambda\Gamma' - \Lambda'\Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

22. En effet, si $\Lambda = \delta L\big|_{L=\mathbf{1}}$, on a $\delta(\overline{L}L) = (\delta\overline{L})L + \overline{L}\delta L = 0$ et donc $\overline{\Lambda} + \Lambda = 0$.

### 3.2.3 Représentation coadjointe

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie $G$ représente les "transformations infinitésimales", son espace dual $\mathfrak{g}^*$ représente les "moments" associés au groupe $G$.[23]

**Définition 3.13.** *Le groupe $G$ agit sur le dual $\mathfrak{g}^*$ de son algèbre de Lie via la **représentation coadjointe** $\mathrm{Coad}(g) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ définie par*[24]

$$\boxed{(\mathrm{Coad}(g)\mu) \cdot Z = \mu \cdot (\mathrm{Ad}(g^{-1})Z)} \tag{3.20}$$

*pour tous $g \in G$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$ et $Z \in \mathfrak{g}$.*

**Exemple 3.14.** Donnons quelques exemples de représentations coadjointes :

1. La représentation coadjointe de $(\mathbb{R}^n, +)$ est triviale $\mathrm{Coad}(g) \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{g}^*}$.
2. Cas des **rotations euclidiennes** $\mathrm{SO}(3)$ : soit $\mu = j(\boldsymbol{\ell}) \in \mathrm{o}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$ avec la relation de dualité
$$\mu \cdot Z = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(j(\boldsymbol{\ell})j(\boldsymbol{\omega})) = \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\omega} \rangle \tag{3.21}$$
On a $(\mathrm{Coad}(R)\mu) \cdot Z = \mu \cdot (\mathrm{Ad}(R^{-1})Z) = \mu \cdot (\overline{R}ZR) = \langle \boldsymbol{\ell}, \overline{R}\boldsymbol{\omega} \rangle = \langle R\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\omega} \rangle$ et donc
$$\mathrm{Coad}(R)\boldsymbol{\ell} = R\boldsymbol{\ell} \qquad\qquad \forall R \in \mathrm{SO}(3)$$
3. La représentation adjointe (3.14) du **groupe de Heisenberg** $H_1$ se calcule[25] et on trouve
$$\mathrm{Ad}(g^{-1})Z = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha b - \beta a + \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23. L'espace $\mathfrak{g}^*$ héberge les grandeurs physiques noetheriennes de la mécanique.
24. On a encore $\mathrm{Coad}(gh) \equiv \mathrm{Coad}(g) \circ \mathrm{Coad}(h)$ et $\mathrm{Coad}(g^{-1}) \equiv (\mathrm{Coad}(g))^{-1}$.
25. On trouve avec le paramétrage (3.15) du groupe de Heisenberg :
$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $\mu = (k, \ell, m) \in \mathfrak{h}_1^*$ avec le pairing

$$\mu \cdot Z = k\alpha + \ell\beta + m\gamma \tag{3.22}$$

on trouve

$$\mathrm{Coad}(g)\mu = (k + bm, \ell - ma, m)$$

**Remarque 3.15.** Noter que le paramètre $m$ est un invariant. Ce paramètre sera relié à la **constante de Planck** en quantification géométrique, cf. (4.9).

4. La représentation coadjointe du **groupe de Galilée**, $\mathrm{Gal}(3,1)$, est, en fait, essentiellement associée aux particules galiléennes de masse nulle ! Nous étudierons plus bas les représentations unitaires irréductibles de son extension centrale, le **groupe de Bargmann**, dont les orbites coadjointes sont, elles, associées aux modèles de particules massives non relativistes en dimension $3+1$.

5. Cas du **groupe de Poincaré** $\mathrm{SE}_+(3,1)$ : désignons par

$$\mu = (M, P) \qquad \text{où} \qquad M \in \mathrm{o}(3,1) \ \& \ P \in \mathbb{R}^{3,1} \tag{3.23}$$

un élément $\mathrm{e}(3,1)^*$ avec la relation de dualité

$$\mu \cdot Z = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M\Lambda) + \overline{P}\Gamma \tag{3.24}$$

**Proposition 3.16.** *La représentation coadjointe du groupe de Poincaré (restreint) est donnée par*

$$\boxed{\mathrm{Coad}(g)\mu = (LM\overline{L} + C\overline{LP} - LP\overline{C}, LP)} \tag{3.25}$$

*Démonstration.* Exercice*** ! □

**Remarque 3.17.** Noter que $C_2 = \overline{P}P$ est un invariant quadratique (carré scalaire de l'impulsion $P$) de la représentation (3.25).

**Exercice 3.18.** Montrer qu'il existe un autre invariant (quartique) $C_4 = \overline{W}W$ où le vecteur $W = *(M)P$ représente la "polarisation" ou **vecteur de Pauli-Lubanski.** [26]

## 3.3 Application moment

La notion d'application moment est associée à celle de groupe de symétries d'un système dynamique. Elle conduit, nous allons le voir, à une nouvelle formulation du théorème de Noether [5] ; voir aussi [1].

Considérons un groupe de Lie, $G$, agissant sur une variété, $V$. On désignera par $g \mapsto g_V : G \to \mathrm{Diff}(V)$ l'**action** de $G$ sur $V$ (c'est un homomorphisme de groupes) et par $Z \mapsto Z_V : \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(V)$ celle de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, i.e.

$$\boxed{Z_V(y) = \delta(g_V(y)) \qquad \text{avec} \qquad \delta g = Z, g = e, \delta y = 0}$$

pour tout $y \in V$.

Supposons maintenant que $G$ est un **groupe de symétries** d'une variété présymplectique $(V, \sigma)$, i.e. tel que

$$g_V^* \sigma = \sigma \qquad \forall g \in G \tag{3.30}$$

On dira que $G$ est un groupe de **présymplectomorphismes** de $(V, \sigma)$.

26. Le **dual de Hodge** de $M \in \mathrm{o}(3,1)$ est l'élément $*(M) \in \mathrm{o}(3,1)$ défini par

$$\mathrm{g}(V_1, *(M)V_2) \equiv -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Mj(V_1, V_2)) \tag{3.26}$$

où l'opérateur $j(V_1, V_2)$ est donné par $\mathrm{g}(V_4, j(V_1, V_2)V_3) \equiv \mathrm{vol}(V_1, V_2, V_3, V_4)$. On montre [5] que

$$*(V_1\,\overline{V_2} - V_2\,\overline{V_1}) \equiv j(V_1, V_2) \tag{3.27}$$

$$*(j(V_1, V_2)) \equiv V_2\,\overline{V_1} - V_1\,\overline{V_2} \tag{3.28}$$

ainsi que

$$*(LM\overline{L}) = \det(L)\, L * (M)\overline{L} \tag{3.29}$$

pour tout $L \in \mathrm{O}(3,1)$ et tout $M \in \mathrm{o}(3,1)$.

L'action infinitésimale de ce groupe préserve clairement la 2-forme fermée, $\sigma$, de $V$ :

$$L_{Z_V}\sigma = 0 \qquad \forall Z \in \mathfrak{g} \tag{3.31}$$

La formule magique de Cartan (2.18) donne $d(\sigma(Z_V)) = 0$. Dans le cas où $\sigma(Z_V)$ est exacte, on a la définition suivante

**Définition 3.19.** *[5] Soit $G$ un groupe de Lie de présymplectomorphismes de $(V, \sigma)$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On appelle **application moment** de cette action toute application*

$$J : V \to \mathfrak{g}^*$$

*définie par*

$$\boxed{\sigma(Z_V) = -d(J \cdot Z)} \tag{3.32}$$

*pour tout $Z \in \mathfrak{g}$.*

**Remarque 3.20.** L'application moment est définie à une constante près !

**Exercice 3.21.** Voici quelques premiers exemples d'application moment :

1. Dans le cas symplectique $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ avec $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, poser

   $$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$$

   et déterminer l'application moment $J = (D, V, T)$ avec la relation de dualité $J \cdot Z = -D\alpha - V\beta + T\gamma$.

   Réponse : $D(p, q) = pq, V(p, q) = \frac{1}{2}q^2, T(p, q) = \frac{1}{2}p^2$.

2. Donner l'application moment $J = (\boldsymbol{\ell}, \mathbf{p})$ du groupe euclidien $\mathrm{SE}(3)$ dans le cas de la variété optique $V = \mathbb{R}^3 \times S^2$ munie de la forme présymplectique (3.1) ; si

   $$Z = \begin{pmatrix} j(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{e}(3)$$

   poser

   $$J \cdot Z = \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma} \rangle \tag{3.33}$$

   Montrer que $J$ est une fonction de l'espace $TS^2$ des rayons lumineux.

3. Même question dans le cas optique avec polarisation (3.2).

   Réponse : $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \hbar \mathbf{u}$ et $\mathbf{p} = k\mathbf{u}$.

4. Calculer l'application moment $J = (\boldsymbol{\ell}, \mathbf{g}, \mathbf{p}, E)$ du groupe de Galilée agissant sur l'espace d'évolution d'une particule galiléenne massive muni de la forme présymplectique (3.5) ; si $Z \in \mathrm{gal}(3,1)$ est donné par (3.16), utiliser la relation de dualité suivante

$$J \cdot Z = \langle \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\omega} \rangle - \langle \mathbf{g}, \beta \rangle + \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma} \rangle - E\varepsilon$$

   Vérifier que $J$ est une **constante du mouvement** !

   Réponse : l'application moment du groupe de Galilée pour une particule libre, de masse $m$ sans spin, possède 10 composantes et est de la forme

$$\boldsymbol{\ell} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{3.34}$$

$$\mathbf{g} = m(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \tag{3.35}$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{3.36}$$

$$E = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2 \tag{3.37}$$

   Si $\delta y \in \ker \sigma$, i.e. $\delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \delta t$ et $\delta \mathbf{v} = 0$, on obtient aisément $\delta J = 0$.

5. Dans le cas relativiste, massif et sans spin (3.8), le groupe de Poincaré $\mathrm{SE}_+(3,1)$ possède une application moment $J = (M, P)$ donnée, avec les relations (3.23) et (3.24), par

$$M = m(X\overline{U} - U\overline{X}) \tag{3.38}$$

$$P = mU \tag{3.39}$$

   où $M$ et $P$ représentent respectivement le **moment angulaire** et la **quadri-impulsion** relativistes. On vérifie grâce à (3.9) que ces grandeurs sont bien des constantes du mouvement.

Nous avons, en toute généralité [5], le

**Théorème 3.22** (Noether)**.** *Soit $(V, \sigma)$ une variété présymplectique et $G$ un groupe de présymplectomorphismes, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, admettant une application moment $J : V \to \mathfrak{g}^*$. Alors $J$ est une* ***constante du mouvement****.*

*Démonstration.* On a, grâce à (3.32), $\delta J \cdot Z = -\sigma(Z_V(y), \delta y)$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$ ; donc $\delta J = 0$ pour tout $[y \mapsto \delta y] \in \ker \sigma$. □

## 3.4 Orbites coadjointes

Nous construisons ici des variétés symplectique d'importance spéciale, à savoir les "orbites coadjointes" [2] des groupes de symétries des espaces ou espace-temps classiques : l'espace euclidien, l'espace-temps galiléen et l'espace-temps de Minkowski.

Ces variétés sont des "espaces homogènes", c'est-à-dire des variétés dont tout point est "joignable" à tout autre point par un élément du groupe considéré. Elles possèdent en fait une interprétation physique naturelle : ce sont les espaces des mouvements (espaces des états classiques) des "systèmes élémentaires" du groupe de symétries. [27] Le fait que ce groupe permute tous les mouvements de manière symplectique est une des formulations du **principe de "relativité"** : e.g. le principe de relativité galiléenne (groupe de Galilée), ou le principe de relativité restreinte (groupe de Poincaré).

### 3.4.1 Forme de Maurer-Cartan

**Définition-théorème 3.23.** *Soit $G$ un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On appelle forme de* ***Maurer-Cartan*** *(à gauche) l'unique $1$-forme $\Theta$ de $G$ à valeurs dans l'espace fixe $\mathfrak{g}$ qui soit (i) invariante à gauche : $(L_g)^*\Theta = \Theta$ pour tout $g \in G$ et (ii) tautologique sur l'algèbre de Lie : $\Theta(X_Z) = Z$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$.*

27. Les modèles classiques de particules élémentaires sont fournis par certaines orbites coadjointes.

Pour les groupes de Lie *matriciels* la forme de Maurer-Cartan est donnée par [28]

$$\boxed{\Theta = g^{-1}dg} \tag{3.40}$$

**Proposition 3.24.** *La dérivée extérieure de la forme de Maurer-Cartan se lit comme*

$$d\Theta(X, Y) = -[\Theta(X), \Theta(Y)] \tag{3.41}$$

*pour tous champs de vecteurs $X$ et $Y$ de $G$.*

*Démonstration.* On a $d\Theta(\delta g, \delta' g) = \delta(g^{-1}\delta' g) - \delta'(g^{-1}\delta g) - g^{-1}[\delta, \delta']g$, grâce à (2.13) et à (3.40). Donc, puisque $\delta(g^{-1}) = -g^{-1}\delta g\, g^{-1}$, il vient $d\Theta(\delta g, \delta' g) = -[g^{-1}\delta g, g^{-1}\delta' g]$ où $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ est le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$. □

### 3.4.2 Orbites coadjointes

Soit $\mu_0 \in \mathfrak{g}^*$, la variété des transformés de ce point selon l'action (3.20) du groupe $G$, i.e.

$$\mathcal{O}_{\mu_0} = \{\mu = \mathrm{Coad}(g)\mu_0 \,|\, g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*$$

est appelée **orbite coadjointe** du point $\mu_0$.

Ayant introduit l'algèbre de Lie de $G$ comme celle des champs de vecteurs invariants à gauche, nous considérerons l'action à gauche du groupe sur lui-même, $h \mapsto h_G$, définie pour tous $g, h \in G$ par $h_G(g) = hg = R_g h$. L'action correspondante de son algèbre de Lie est donc $Z_G(g) = \delta(h_G(h))$ avec $\delta h = Z$ à l'élément neutre $h = e$. L'action infinitésimale à gauche de $G$ sur lui même est donc donnée par

$$Z_G(g) = DR_g(e)Z \tag{3.42}$$

avec $Z \in \mathfrak{g}$.

28. On a bien $\Theta(\delta(hg)) = (hg)^{-1}\delta(hg) = g^{-1}h^{-1}h\,\delta g = \Theta(\delta g)$ pour tout $h \in G$ et, grâce à (3.13), $\Theta(X_Z(g)) = g^{-1}gZ = Z$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$.

**Exercice 3.25.** Vérifier que l'on a

$$\Theta(Z_G(g)) = \mathrm{Ad}(g^{-1})Z \tag{3.43}$$

pour tous $g \in G$ et $Z \in \mathfrak{g}$.

**Exercice 3.26.** Prouver que l'on a dans le cas d'un groupe de Lie matriciel

$$Z_G(g) = Zg \tag{3.44}$$

**Théorème 3.27.** *Soit $\mu_0$ un point de $\mathfrak{g}^*$ ; associons-lui une 1-forme $\alpha$ de $G$ par*

$$\boxed{\alpha = \mu_0 \cdot \Theta} \tag{3.45}$$

*(i) Cette 1-forme est $G$-invariante (à gauche) : $(L_g)^*\alpha = \alpha$ pour tout $g \in G$.*

*(ii) La 2-forme $\sigma = d\alpha$ descend sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_{\mu_0}$ dont elle définit la **structure symplectique** $\omega$ par*[29] *$\sigma = \pi^*\omega$ ou encore*

$$\boxed{\sigma(\delta g, \delta' g) = \omega(\delta\mu, \delta'\mu) = -\mu \cdot [Z, Z']} \tag{3.46}$$

*pour tous $\delta g = Z_G(g)$ et $\delta' g = Z'_G(g)$ avec $Z, Z' \in \mathfrak{g}$, où la projection $\pi : G \to \mathcal{O}_{\mu_0}$ est donnée par*

$$\pi(g) = \mu = \mathrm{Coad}(g)\mu_0$$

*Démonstration.* On a $(L_g)^*\alpha = \mu_0 \cdot (L_g)^*\Theta = \mu_0 \cdot \Theta = \alpha$ car $\Theta$ est $G$-invariante. Comme $\sigma = d\alpha$ on a $\sigma(\delta g, \delta' g) = \mu_0 \cdot d\Theta(\delta g, \delta' g) = -\mu_0 \cdot [\Theta(\delta g), \Theta(\delta' g)]$ grâce à (3.41) et donc

$$\begin{aligned}
\sigma(Z_G(g), Z'_G(g)) &= -\mu_0 \cdot [\Theta(Z_G(g)), \Theta(Z'_G(g))] \\
&= -\mu_0 \cdot [\mathrm{Ad}(g^{-1})Z, \mathrm{Ad}(g^{-1})Z'] \\
&= -\mu_0 \cdot \mathrm{Ad}(g^{-1})[Z, Z'] \\
&= -(\mathrm{Coad}(g)\mu_0) \cdot [Z, Z'] \\
&= -\mu \cdot [Z, Z']
\end{aligned}$$

pour tous $Z, Z' \in \mathfrak{g}$, où $\mu = \mathrm{Coad}(g)\mu_0$.

29. Structure symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau.

Le feuilletage caractéristique, $\ker\sigma$, se calcule : on a $\sigma(\delta g, \delta' g) = 0$ pour tout $\delta' g \in T_g G$ ssi $\mu \cdot [Z, Z'] = 0$ pour tout $Z' \in \mathfrak{g}$, i.e. ssi $\delta\mu = \mathrm{coad}(Z)\mu := -\mu \cdot \mathrm{ad}(Z) = 0$ avec la notation $[Z, Z'] = \mathrm{ad}(Z)Z'$. Les feuilles du feuilletage caractéristique de $\sigma$ sont donc données par les sous-variété $\mu = \mathrm{Coad}(g)\mu_0 = \mathrm{const.}$ ; l'espace des feuilles est $G/\ker\sigma = \mathcal{O}_{\mu_0}$, variété munie (par construction même) d'une 2-forme symplectique $\omega$ définie par $\sigma(\delta g, \delta' g) = \omega(\delta\mu, \delta'\mu) = -\mu \cdot [Z, Z']$ pour tous $Z, Z' \in \mathfrak{g}$. $\square$

Nous admettrons enfin le résultat fondamental suivant, dû à Kirillov, Kostant et Souriau [2, 3, 5].

**Théorème 3.28.** *Toute orbite coadjointe d'un groupe de Lie, $G$, est une variété symplectique. Réciproquement, toute variété symplectique $G$-homogène est (localement) symplectomorphe à une orbite coadjointe de $G$ ou d'une extension centrale de ce groupe.*

### 3.4.3 Exemples mécanistes d'orbites coadjointes

Illustrons les résultats précédents par une première étude de certaines orbites coadjointes relevant de la mécanique des systèmes.

1. Groupe de Heisenberg $H_n$ : **Espaces vectoriels symplectiques**.

   Le groupe $H_n$ est le groupe des matrices

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{p} & \theta \\ 0 & 1 & \mathbf{q} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

   avec $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

   La forme de Maurer-Cartan (3.40) est

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -d\mathbf{p} & \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + d\theta \\ 0 & 0 & d\mathbf{q} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les orbites coadjointes non triviales passent par les points $\mu_0 = (0, 0, m) \in \mathfrak{h}_n^*$, avec $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (cf. (3.22)) ; pour l'invariant $m = 1$, la 1-forme (3.45) de $H_n$ est

$$\boxed{\alpha = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + d\theta} \tag{3.48}$$

et $d\alpha = \pi^*\omega$ où $\pi(g) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ avec $\omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ la forme symplectique canonique de $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

2. Cas du groupe des rotations SO(3) : **Etats de spin classique.** [30]

   Soit $R = (\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}) \in \mathrm{SO}(3)$ où $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On trouve

$$\Theta = \overline{R}\,dR = -j\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{v}}\,d\mathbf{w} \\ \overline{\mathbf{w}}\,d\mathbf{u} \\ \overline{\mathbf{u}}\,d\mathbf{v} \end{pmatrix}$$

   Avec, cf. (3.21), $\mu_0 = j(\boldsymbol{\ell}_0)$ et $\boldsymbol{\ell}_0 = s\mathbf{e}_1$ où $s > 0$ est l'invariant choisi, on a

$$\alpha = -s\langle \mathbf{v}, d\mathbf{w}\rangle$$

   On obtient finalement [31] $d\alpha = -s\langle d\mathbf{v} \wedge d\mathbf{w}\rangle = \pi^*\omega$ où

$$\boxed{\omega(\delta\mathbf{u}, \delta'\mathbf{u}) = -s\,\langle \mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \times \delta'\mathbf{u}\rangle} \tag{3.49}$$

   définit la structure symplectique de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, espace des **états de spin** $s$ ; la projection $\pi : \mathrm{SO}(3) \to S^2$ est donnée par $\pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u}$.

30. Les orbites coadjointes du groupe de spin SU(2) étant identiques à celles du groupe des rotations SO(3), nous nous restreindrons à ces dernières pour décrire les états de spin classique.

31. Utilisant la relation de fermeture $R\overline{R} = \mathbf{u}\,\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{v}\,\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{w}\,\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{1}$, on trouve

$$\begin{aligned}
-(1/s)\,d\alpha(\delta R, \delta' R) &= \langle \delta\mathbf{v}, \delta'\mathbf{w}\rangle - \langle \delta'\mathbf{v}, \delta\mathbf{w}\rangle \\
&= \langle \delta\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle\,\langle \mathbf{u}, \delta'\mathbf{w}\rangle - \langle \delta'\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle\,\langle \mathbf{u}, \delta\mathbf{w}\rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \delta\mathbf{u}\rangle\,\langle \delta'\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \delta'\mathbf{u}\rangle\,\langle \delta\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \\
&= \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \delta\mathbf{u} \times \delta'\mathbf{u}\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \times \delta'\mathbf{u}\rangle
\end{aligned}$$

3. Groupe de Poincaré $G = \mathrm{SE}_+(3,1)$ : **Orbites massives sans spin**.

   Nous poserons
$$g = \begin{pmatrix} L & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$
   où $L \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ et $X \in \mathbb{R}^{3,1}$. La forme de Maurer-Cartan est alors
$$\Theta = \begin{pmatrix} \overline{L}dL & \overline{L}dX \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Ici nous faisons, cf. (3.23), le choix
$$\mu_0 = (0, P_0) \tag{3.50}$$
   avec $\overline{P_0}P_0 = m^2$ (et $P_0$ de futur) où $m > 0$ est la masse (propre) de l'orbite considérée.

   La 1-forme (3.45) associée est, (cf. (3.24)), $\alpha = \overline{P_0}\,\overline{L}dX$, c'est-à-dire
$$\boxed{\alpha = \overline{P}dX} \tag{3.51}$$
   où $P = LP_0$ est l'impulsion relativiste telle que
$$\boxed{\overline{P}P = m^2} \tag{3.52}$$

   **Remarque 3.29.** La 1-forme (3.51) correspond bien à la 1-forme (3.8) de $U_+\mathbb{R}^{3,1}$ en posant $U = P/m$.

   La dérivée extérieure $d\alpha = \pi^*\omega$ définit la 2-forme symplectique, $\omega$, de l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_{\mu_0} = \mathrm{Coad}(G)(0, P_0)$, **espace des mouvements des particules relativistes de masse $m$, sans spin**. Signalons que nous avons déjà déterminé cette 2-forme en (3.11).

4. Groupe de Poincaré $G = \mathrm{SE}_+(3,1)$ : **Orbites de masse et spin nuls**.

   On obtient une orbite tout à fait spécifique du groupe de Poincaré avec le choix $\mu_0 = (0, P_0)$ avec $\overline{P_0}P_0 = 0$ (et $P_0$ de futur). On montre aisément que le groupe de Poincaré est alors muni de la 1-forme (3.51) avec la contrainte

   $$\boxed{\overline{P}P = 0} \tag{3.53}$$

   L'orbite coadjointe correspondante décrit les mouvements classiques d'une particule (hypothétique !) relativiste sans masse et sans spin.

5. Groupe de Poincaré $G = \mathrm{SE}_+(3,1)$ : **Orbites massives à spin**.

   Il existe d'autres orbites de grande importance physique, à savoir les orbites coadjointes d'origine

   $$\mu_0 = (M_0, P_0) \tag{3.54}$$

   avec $W_0 = *(M_0)P_0$ de carré $\overline{W_0}W_0 = -s^2m^2$ où $m > 0$ et $s > 0$ sont la masse et le spin du modèle.

   On montre que la 1-forme de $G$ associée à ce choix est

   $$\alpha = \frac{1}{2m^2}\mathrm{Tr}\left(\overline{L}\, j(P,W)\, dL\right) + \overline{P}dX$$

   où l'**impulsion** $P = LP_0$ et le **vecteur de Pauli-Lubanski** $W = LW_0$ vérifient

   $$\boxed{\overline{P}P = m^2, \qquad \overline{P}W = 0, \qquad \overline{W}W = -s^2m^2} \tag{3.55}$$

   Si on pose

   $$\Omega = \frac{1}{sm^2}\, j(P,W)$$

   alors la 2-forme $\sigma = d\alpha$, donnée par

   $$\boxed{\sigma(\delta g, \delta' g) = s\mathrm{Tr}(\delta\Omega\, \Omega\delta'\Omega) + \delta\overline{P}\delta' X - \delta'\overline{P}\delta X} \tag{3.56}$$

   définit ainsi la structure symplectique canonique de l'**espace des mouvements** $\mathcal{O}_{\mu_0} = \mathrm{Coad}(G)(M_0, P_0)$ **d'une particule relativiste de masse** $m$ **et de spin** $s$.

**Exercice 3.30.** Prouver la formule (3.56).

**Remarque 3.31.** Nous ne traiterons pas du cas important et plus subtil des orbites de masse nulle et de spin non nul (exemple : les états photoniques définis par $W = \hbar P$ avec $\overline{P}P = 0$ et $P$ de futur). Les orbites "tachyoniques" (définies par $\overline{P}P = \text{const.} < 0$) n'admettent pas d'interprétation physique.

**Exercice 3.32.** Considérons le groupe spécial euclidien $G = \mathrm{SE}(3)$ ainsi que le moment $\mu_0 = (\boldsymbol{\ell}_0, \mathbf{p}_0) \in \mathfrak{g}^*$ avec $\boldsymbol{\ell}_0 = s\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{p}_0 = k\mathbf{e}_1$ où $s$ et $k > 0$ sont deux constantes réelles données. Calculer l'expression de la 1-forme $\alpha$ de $G$ associée à $\mu_0$, définie par (3.45) et (3.33), au point

$$g = \begin{pmatrix} R & \mathbf{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $R = (\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}) \in \mathrm{SO}(3)$ et $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. En déduire que sa dérivée extérieure $\sigma = d\alpha$ est donnée par

$$\sigma(\delta g, \delta' g) = k(\langle \delta\mathbf{u}, \delta'\mathbf{r}\rangle - \langle \delta'\mathbf{u}, \delta\mathbf{r}\rangle) - s\langle \mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \times \delta'\mathbf{u}\rangle \tag{3.57}$$

En déduire la structure symplectique $\omega$ de l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_{\mu_0} \cong T^*S^2$. Donner son interprétation optico-géométrique si $s = \pm\hbar$.

**Exercice 3.33.** Déterminer l'application moment du groupe de Poincaré (restreint) pour la structure présymplectique (3.56) d'une particule relativiste de masse $m$ et de spin $s$.

Réponse : On trouve $J = (M, P)$ avec $M = s\Omega + X\overline{P} - P\overline{X}$ et $P = mU$.

**Exercice 3.34.** Soit $G$ un groupe de Lie et $\mu_0 \in \mathfrak{g}^*$ ; montrer que la forme présymplectique associée, $\sigma$, donnée par (3.46) est $G$-invariante. Prouver que $(G, \sigma)$ possède une application moment $J : G \to \mathfrak{g}^*$ au sens (3.32) ; donner l'expression de $J$ en fonction de $\mu_0$.

# 4 Eléments de quantification géométrique

Le problème fondamental de la **quantification** consiste, partant d'un système dont les états classiques constituent une variété symplectique $(M, \omega)$, à lui à associer de manière la plus "canonique" possible un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ définissant l'espace des états quantiques de ce système.[32] Une procédure de quantification doit aussi permettre d'associer à toute algèbre de Lie d'observables classiques, $A \subset C^\infty(M)$ une algèbre d'opérateurs, $\mathcal{A} \subset L(\mathcal{H})$, de telle sorte que que la correspondance $A \to \mathcal{A}$ vérifie un certain nombre de règles algébriques (dont nous allons détailler certaines plus bas).

Dans le cas où des symétries sont présentes au niveau classique, via un groupe de symplectomorphismes $G \subset \mathrm{Sympl}(M)$, on demande aux procédures de quantification de restituer cette symétrie au niveau quantique, $G \subset \mathrm{U}(\mathcal{H})$. Dans la plupart des situations, la symétrie est brisée au niveau quantique : on parle alors d'"anomalies".[33]

Si le système classique est un **système élémentaire** (préquantifiable) d'un groupe de Lie $G$ donné, e.g. une orbite coadjointe $\mathrm{Coad}(G)\mu_0$, avec une propriété supplémentaire d'"intégralité", on peut, dans certain cas, lui associer une représentation unitaire irréductible, $(\mathcal{H}, \varrho) \in \widehat{G}$, du groupe $G$. On dit que l'on a quantifié le système élémentaire ; c'est le fondement de la méthode des orbites de Kirillov [2].

| | Classique | Quantique |
|---|---|---|
| Etats | $(M, \omega)$ | $\mathcal{H}$ |
| Observables | $A \subset C^\infty(M)$ | $\mathcal{A} \subset L(\mathcal{H})$ |
| Symétrie | $G \subset \mathrm{Sympl}(M)$ | $G \subset \mathrm{U}(\mathcal{H})$ |
| Syst. élem. | $\mathrm{Coad}(G)\mu_0$ intégrale | $(\mathcal{H}, \varrho) \in \widehat{G}$ |

(4.1)

32. Notons que l'espace des états purs du système quantique est, en fait, le projectif hilbertien $P\mathcal{H} = \mathcal{H} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*$.

33. Les groupes de symétries maximaux classiques, $\mathrm{Sympl}(M)$, et quantiques, $P\mathrm{U}(\mathcal{H})$, ne sont pas isomorphes !

Pour les espaces des mouvements classiques arbitraires, une méthode de quantification étendant la méthode des orbites a été proposée par Kostant [3] et Souriau [5] : la **quantification géométrique**.

## 4.1 Procédure de préquantification

### 4.1.1 Problème de Dirac

Soit $(M, \omega)$ une variété symplectique et $A \subset C^\infty(M)$ une algèbre de Poisson de fonctions différentiables réelles, i.e. si $F, G \in A$ le produit $FG \in A$ et le **crochet de Poisson** $X_F G = \{F, G\} \in A$ où $X_F$ est le champ de vecteurs hamiltonien de $F$, i.e.

$$\omega(X_F) = -dF \tag{4.2}$$

**Problème de Dirac** : trouver une application *linéaire* $F \mapsto \widehat{F}$ de l'algèbre de Poisson $A$ dans l'algèbre des opérateurs $L(\mathcal{H})$ d'un espace (pré-)hilbertien $\mathcal{H}$ telle que

1. $\widehat{1} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$
2. $\widehat{F} = (\widehat{F})^*$
3. $\widehat{\{F, G\}} = \dfrac{i}{\hbar}\,[\widehat{F}, \widehat{G}]$

Une application vérifiant ces conditions sera appelée **préquantification**.

La condition 1. est naturelle mais non triviale, la condition 2. demande que les observables quantiques soient représentées par des opérateurs self-adjoints [34] et la dernière condition 3. assure que la préquantification est un homomorphisme, $A \to \mathcal{A} = \widehat{A}$, d'algèbres de Lie. Noter dans 3. la présence de la constante de Planck (réduite) $\hbar$.

34. Nous n'aborderons pas ici les questions d'analyse dure et nous contenterons de considérer les opérateurs comme symétriques.

### 4.1.2 Solution de Koopman-Van Hove-Segal

Dans le cas d'un fibré cotangent, $(M = T^*Q, \omega = d\varpi)$ où $\varpi = p_j dq^j$, on a la solution suivante [2] du problème de Dirac :

$$\widehat{F} = F + \frac{\hbar}{i} X_F - \varpi(X_F) \tag{4.3}$$

où $\mathcal{H} = C_c^\infty(M, \mathbb{C})$ est l'espace préhilbertien des fonction différentiables à support compact muni du produit scalaire hermitien

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M \overline{\phi(x)} \psi(x) \, d\lambda(x)$$

où $d\lambda(x) = dp_1 \ldots dp_n dq^1 \ldots dq^n$ est la mesure de Liouville.

**Exercice 4.1.** Prouver que (4.3) fournit bien une solution du problème de Dirac.

**Proposition 4.2.** *L'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_n \subset C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ engendrée par les fonctions $p_1, \ldots, p_n$, ainsi que $q^1, \ldots, q^n$ et la fonction constante $1$ est représentée par*

$$\widehat{p_j} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q^j} \tag{4.4}$$

$$\widehat{q^j} = q^j - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p_j} \tag{4.5}$$

$$\widehat{1} = \mathbf{1} \tag{4.6}$$

*pour tout $j = 1, \ldots, n$.*

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser (4.3) avec $X_{p_j} = \partial/\partial q^j$ et $X_{q^j} = -\partial/\partial p_j$ et $X_1 = 0$. Le fait que $\varpi(X_{p_j}) = p_j$ et $\varpi(X_{q^j}) = 0$ achève la preuve. □

**Remarque 4.3.** Nous avons vu (chapitre 3.4.3) que $(T^*\mathbb{R}^n, \omega = dp_j \wedge dq^j)$ est une orbite coadjointe du groupe de Heisenberg $H_n$. Une "bonne" quantification doit faire de $\mathcal{H}$ un espace de représentation (unitaire) irréductible de $H_n$, et donc de son algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$. Mais la préquantification précédente possède un sous-espace invariant, à savoir l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset C^\infty(T^*\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ des fonctions $\phi(p,q) = \varphi(q)$ de l'espace de configuration $\mathbb{R}^n$ : elle ne conduit donc pas à une représentation irréductible. La représentation précédente restreinte à $L^2(\mathbb{R}^n, dq^1 \ldots dq^n)$ est, par contre, **irréductible** : c'est la **représentation de Schrödinger**.

### 4.1.3 Fibré préquantique

Supposons que le groupe $\mathbb{T} \equiv U(1) = \{z = e^{i\theta} \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$ agisse sur une variété $Y$ ; notons $y \mapsto z_Y(y)$ cette action. Si l'action est "libre", i.e. si $z_Y(y) = y \Leftrightarrow z = 1$, l'espace des orbites de $\mathbb{T}$ est encore une variété, notée $M = Y/\mathbb{T}$. On dit alors que $\pi : Y \to M$ est un **fibré principal** en cercles. [35] Voir [4].

L'action infinitésimale de $\mathbb{T}$ est donnée par le champ de vecteurs $\xi$ de $Y$ suivant [36]

$$\xi(y) = \frac{d}{d\theta} \left(e^{i\theta}\right)_Y (y)\Big|_{\theta=0} \tag{4.7}$$

**Définition 4.4.** *Un fibré en cercles $\pi : Y \to M$ au dessus d'une variété symplectique $(M, \omega)$ est un* ***fibré préquantique*** *s'il est muni d'une 1-forme $\alpha$ telle que*

1. $L_\xi \alpha = 0$
2. $\alpha(\xi) = \hbar$
3. $d\alpha = \pi^* \omega$

**Remarque 4.5.** L'existence d'un fibré préquantique est une **condition forte** sur la variété symplectique (**intégralité** [3, 5] de la 2-forme symplectique).

La condition 1. signifie que $\alpha$ est $\mathbb{T}$-invariante ; la condition 2. adapte le "rayon du cercle" à la constante de Planck et la condition 3. fait de $(Y, d\alpha)$ une variété présymplectique dont $(M, \omega)$ est la variété symplectique associée.

35. Le point $x = \pi(y)$ représente le cercle (ou tore) passant par $y \in Y$.
36. Ce champ ne s'annule jamais car l'action du tore est libre.

On montre que le feuilletage caractéristique de $\alpha$ est trivial,[37]

$$\boxed{\ker \alpha \cap \ker d\alpha = \{0\}} \tag{4.8}$$

Illustrons cette définition par deux exemples caractéristiques.

• Variétés préquantiques des **fibrés cotangents**.

**Proposition 4.6.** *Si* $(M = T^*Q, \omega = d\varpi)$ *où* $\varpi = p_j dq^j$, *alors*

$$\boxed{Y = M \times \mathbb{T} \qquad \& \qquad \alpha = p_j dq^j + \hbar d\theta} \tag{4.9}$$

*est un fibré préquantique.*

*Démonstration.* La 1-forme $\alpha$ est trivialement invariante sous l'action $(p, q, z) \mapsto (p, q, zz')$ de $z' \in \mathbb{T}$. D'autre part

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{4.10}$$

et donc $\alpha(\xi) = \hbar$ ; Enfin $d\alpha = dp_j \wedge dq^j = \pi^*\omega$. $\square$

• Variété préquantique de la 2-sphère des **états de spin** $\frac{1}{2}$.

**Proposition 4.7.** *Soit* $S^3 = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^2 \,|\, \overline{\mathbf{Z}}\mathbf{Z} = 1\}$ *la* 3*-sphère unité. Le couple*

$$\boxed{Y = S^3 \qquad \& \qquad \alpha = \frac{\hbar}{i}\,\overline{\mathbf{Z}}d\mathbf{Z}} \tag{4.11}$$

*constitue la préquantification de la* 2*-sphère unité*

$$M = S^2 \qquad \& \qquad \omega = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{surf}_{S^2} \tag{4.12}$$

*Démonstration.* Le tore $\mathbb{T}$ agit naturellement sur $S^3$ selon $\mathbf{Z} \mapsto e^{i\theta}\mathbf{Z}$. La 1-forme $\alpha$ est alors trivialement $\mathbb{T}$-invariante. Le champ fondamental $\xi$ défini en (4.7) prend ici la forme $\xi(\mathbf{Z}) = i\mathbf{Z}$.[38] On a donc $\alpha(\xi) = (\hbar/i)\overline{\mathbf{Z}}i\mathbf{Z} = \hbar$.

37. En effet, si $d\alpha(X) = 0$, alors $\omega(\pi_* X) = 0$ d'où $\pi_* X = 0$ et $X = f\xi$ pour une certaine fonction $f$ ; si de plus $\alpha(X) = 0$, alors $\alpha(f\xi) = f\hbar = 0$, donc $f = 0$ et finalement $X = 0$.

38. On a, de même, $\xi(\overline{\mathbf{Z}}) = -i\overline{\mathbf{Z}}$ (cf. (4.31) avec $n = 1$).

**Lemme 4.8.** *Soit* $\pi(\mathbf{Z}) = 2\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}} - \mathbf{1}$*, alors* $\pi(\mathbf{Z}) = \sigma(\mathbf{u})$ *où*[39] $\mathbf{u} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$*. On a alternativement*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\mathbf{Z}}\sigma(\mathbf{v})\mathbf{Z} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \tag{4.13}$$

*Démonstration.* La matrice $\pi(\mathbf{Z})$ est évidemment symétrique (hermitienne) et de trace nulle. C'est donc une combinaison linéaire des trois matrices de Pauli : $\pi(\mathbf{Z}) = \sigma(\mathbf{u})$ avec $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. D'autre part $\pi(\mathbf{Z})^2 = \mathbf{1}$ entraîne $\sigma(\mathbf{u})^2 = \|\mathbf{u}\|^2\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$, donc $\mathbf{u}$ est unitaire. La preuve de (4.13) est laissée en exercice. $\square$

Mais puisque $\sigma(\mathbf{u})\sigma(\mathbf{v}) \equiv \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{1} + i\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\sigma(\mathbf{u})\sigma(\delta\mathbf{u})\sigma(\delta'\mathbf{u})) &= i\mathrm{Tr}\,(\sigma(\mathbf{u})\sigma(\delta\mathbf{u} \times \delta'\mathbf{u})) \\ &= 2i\langle \mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \times \delta'\mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\sigma(\mathbf{u})\sigma(\delta\mathbf{u})\sigma(\delta'\mathbf{u})) &= \mathrm{Tr}\,\big((2\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}} - \mathbf{1})\delta(2\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}})\delta'(2\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}})\big) \\ &= 4\mathrm{Tr}\,\big((2\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}} - \mathbf{1})(\delta\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}} + \mathbf{Z}\delta\overline{\mathbf{Z}})(\delta'\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}} + \mathbf{Z}\delta'\overline{\mathbf{Z}})\big) \\ &= 4\overline{\mathbf{Z}}(\delta\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}} + \mathbf{Z}\delta\overline{\mathbf{Z}})\delta'\mathbf{Z} + 4\delta'\overline{\mathbf{Z}}(2\mathbf{Z}\overline{\mathbf{Z}} - \mathbf{1})(\delta\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\delta\overline{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}) \\ &= 4(\delta\overline{\mathbf{Z}}\delta'\mathbf{Z} - \delta'\overline{\mathbf{Z}}\delta\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Or $d\alpha = (\hbar/i)(d\overline{\mathbf{Z}} \wedge d\mathbf{Z})$ s'écrit encore

$$\begin{aligned} d\alpha(\delta\mathbf{Z}, \delta'\mathbf{Z}) &= \frac{\hbar}{i}\,(\delta\overline{\mathbf{Z}}\delta'\mathbf{Z} - \delta'\overline{\mathbf{Z}}\delta\mathbf{Z}) \\ &= \frac{\hbar}{4i}\,\mathrm{Tr}\,(\sigma(\mathbf{u})\sigma(\delta\mathbf{u})\sigma(\delta'\mathbf{u})) \\ &= \frac{\hbar}{2}\,\langle \mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \times \delta'\mathbf{u} \rangle = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{surf}(\delta\mathbf{u}, \delta'\mathbf{u}) \end{aligned}$$

et la preuve de la Proposition 4.7 est complète. $\square$

39. On a posé $\sigma(\mathbf{u}) = \sigma_1 u^1 + \sigma_2 u^2 + \sigma_3 u^3$ où $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les **matrices de Pauli**.

**Remarque 4.9.** La 2-forme symplectique $\omega$ de $S^2$ donnée par (4.12) a pour intégrale $\int_{S^2}\omega = 4\pi(\frac{1}{2}\hbar) = h$. On montre qu'une variété symplectique $(M,\omega)$ admet une pré-quantification $(Y,\alpha)$, au sens de la Définition 4.4, ssi

$$\int_{S^2}\omega = nh, \qquad\qquad n\in\mathbb{Z} \tag{4.14}$$

pour tout 2-cycle $S^2\subset M$. On dit que alors que $(M,\omega)$ est **entière**.

### 4.1.4 Représentation préquantique

Présentons la solution générale du problème de Dirac (Chapitre 4.1.1).

**Définition 4.10.** *On dit que $X^\sharp_F \in \mathrm{Vect}(Y)$ est **champ hamiltonien quantique** associé à l'observable classique $F\in C^\infty(M)$ si (i) $L_{X^\sharp_F}\alpha = 0$ et (ii) $\alpha(X^\sharp_F) = \pi^*F$.*

On déduit de $L_\xi\alpha = 0$ (Propriété 1. de la Définition 4.4) et de (4.8) que $X^\sharp_F$ est $\mathbb{T}$-invariant, i.e. $[\xi, X^\sharp_F] = 0$. Donc $\pi_*X^\sharp_F$ est un champ de vecteurs de $M$.

**Exercice 4.11.** Prouver que $\xi = X^\sharp_\hbar = \hbar X^\sharp_1$.

La formule magique que Cartan (2.18) donne : $L_{X^\sharp_F}\alpha = d(\alpha(X^\sharp_F)) + d\alpha(X^\sharp_F) = \pi^*(dF + \omega(\pi_*X^\sharp_F)) = 0$ par définition d'un champ hamiltonien quantique ; donc

$$\pi_*X^\sharp_F = X_F \tag{4.15}$$

La proposition suivante suit trivialement.

**Proposition 4.12.** *Le champ hamiltonien quantique, $X^\sharp_F$, est uniquement déterminé par $F$.*

**Lemme 4.13.** *Si $F,G\in C^\infty(M)$, alors*

$$[X^\sharp_F, X^\sharp_G] = X^\sharp_{\{F,G\}} \tag{4.16}$$

*Démonstration.* Nous avons $L_{[X^\sharp_F, X^\sharp_G]}\alpha = (L_{X^\sharp_F} L_{X^\sharp_G} - L_{X^\sharp_G} L_{X^\sharp_F})\alpha = 0$. D'autre part $\alpha([X^\sharp_F, X^\sharp_G]) = \alpha(L_{X^\sharp_F} X^\sharp_G) = X^\sharp_F(\alpha(X^\sharp_G)) - (L_{X^\sharp_F}\alpha)X^\sharp_G = X^\sharp_F G = \pi^* X_F G$ grâce à (4.15) ; donc $\alpha([X^\sharp_F, X^\sharp_G]) = \pi^*\{F, G\}$. Le crochet de Lie $[X^\sharp_F, X^\sharp_G]$ est ainsi le champ hamiltonien quantique pour le crochet de Poisson $\{F, G\}$. □

Introduisons maintenant l'espace de représentation préquantique.

**Définition 4.14.** *On appelle espace de* ***représentation préquantique*** $\mathcal{H}_Y$ *l'espace des fonctions différentiables* $\Psi : Y \to \mathbb{C}$ *à support compact telles que*

$$\Psi(z_Y(y)) = z\Psi(y) \qquad \forall z \in \mathbb{T} \tag{4.17}$$

*Le produit scalaire hermitien de* $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}_Y$ *est défini par*

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_M \overline{\Phi(y)}\Psi(y)\,\Omega$$

*où* $\Omega = (-1)^{n(n-1)/2}\omega^n/n!$ *est la forme volume de Liouville de* $(M, \omega)$.[40]

La "condition de phase" (4.17) géométrise le fait que les fonctions d'onde de la mécanique quantique ne sont définies qu'à une phase près. L'espace $\mathcal{H}_Y$ est un espace préhilbertien ; on peut le compléter pour obtenir l'espace de Hilbert de la théorie.

Nous sommes ainsi conduits à la définition générale de la préquantification d'une variété symplectique entière (cf. la Remarque 4.9).

**Théorème 4.15.** *Soit* $(Y, \alpha)$ *un fibré préquantique au-dessus d'une variété symplectique* $(M, \omega)$*. La* ***préquantification*** *qui associe à toute observable* $F \in C^\infty(M)$ *l'opérateur* $\widehat{F}$ *de* $\mathcal{H}_Y$ *défini par*

$$\boxed{\widehat{F}\Psi = \frac{\hbar}{i} X^\sharp_F \Psi} \tag{4.18}$$

*fournit une solution du problème de Dirac.*

40. Le produit $\overline{\Phi(y)}\Psi(y)$ est $\mathbb{T}$-invariant par (4.17) : c'est donc, de fait, une fonction de $x = \pi(y)$.

*Démonstration.* La correspondance $F \mapsto \widehat{F}$ est, par construction, $\mathbb{R}$-linéaire. En dérivant, grâce à (4.7), la condition (4.17) au point $z = 1$ (élément neutre du tore $\mathbb{T}$), on obtient

$$\xi\Psi = i\Psi \tag{4.19}$$

et donc $\widehat{1}\Psi = (\hbar/i)X_1^\sharp\Psi = (1/i)\xi\Psi = \Psi$ pour tout $\Psi \in \mathcal{H}_Y$ ; d'où $\widehat{1} = \mathbf{1}$.

Montrons que $\widehat{F}$ est symétrique ; on a

$$\begin{aligned}
\langle\Phi, \widehat{F}\Psi\rangle - \langle\widehat{F}\Phi, \Psi\rangle &= \int_M \overline{\Phi}[-i\hbar X_F^\sharp\Psi]\,\Omega - \int_M \overline{[-i\hbar X_F^\sharp\Phi]}\Psi\,\Omega \\
&= -i\hbar\int_M \left[\overline{\Phi}X_F^\sharp\Psi + \overline{X_F^\sharp\Phi}\Psi\right]\Omega \\
&= -i\hbar\int_M X_F\big(\overline{\Phi}\Psi\big)\,\Omega \\
&= -i\hbar\int_M L_{X_F}\big(\overline{\Phi}\Psi\,\Omega\big)
\end{aligned}$$

car $\overline{\Phi}\Psi$ est une fonction de $M$ et $L_{X_H}\Omega = 0$.

La formule magique de Cartan et $d\Omega = 0$ conduisent, pour tous $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}_Y$, à

$$\begin{aligned}
\langle\Phi, \widehat{F}\Psi\rangle - \langle\widehat{F}\Phi, \Psi\rangle &= -i\hbar\int_M d\left(\overline{\Phi}\Psi\,\Omega(X_F)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

grâce au théorème de Stokes et au fait que $\overline{\Phi}\Psi$ est à support compact.

Le résultat (4.16) entraîne enfin

$$[\widehat{F}, \widehat{G}]\Psi = -\hbar^2[X_F^\sharp, X_G^\sharp]\Psi = -\hbar^2 X_{\{F,G\}}^\sharp\Psi = \frac{\hbar}{i}\,\widehat{\{F,G\}}\Psi$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{H}_Y$, d'où $[\widehat{F}, \widehat{G}] = (\hbar/i)\widehat{\{F,G\}}$. □

**Proposition 4.16.** *Considérons $M = T^*Q$ muni de sa 1-forme canonique $\varpi$ et le fibré préquantique trivial $(Y = M \times \mathbb{T}, \alpha = \varpi + \hbar dz/(iz))$ introduit en (4.9). La préquantification (4.18) est équivalente à la solution de Koopman-Van Hove-Segal (4.3) du problème de Dirac.*

*Démonstration.* Exercice ! □

## 4.2 Polarisations & quantification

La préquantification ne conduit pas à des représentations irréductibles d'algèbres de Lie, donc de groupes de Lie. Il manque une structure géométrique garantissant, pour certaines algèbres d'observables, l'irréductibilité de la représentation (4.18) : c'est la notion de **polarisation**. Idée : restreindre l'espace (pré)hilbertien $\mathcal{H}_Y$ à un sous-espace sur lequel la représentation $F \mapsto \widehat{F}$ d'une sous-algèbre $A \subset C^\infty(M)$ sera irréductible.

### 4.2.1 Notion de polarisation

Des fonctions $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ d'une variété symplectique $(M, \omega)$ sont dites en **involution** si $\{f_1, f_2\} = 0$.

**Définition 4.17.** *Une **polarisation** réelle de $(M, \omega)$ est une distribution $\mathcal{F} \subset TM$ (i.e. un champ de sous-espaces tangents) telle que, localement, il existe $n(= \frac{1}{2}\dim M)$ fonctions $f_1, \ldots, f_n$ en involution, indépendantes,*[41] *et dont les champs hamiltoniens $X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ engendrent $\mathcal{F}$.*

**Exemple 4.18.** Notion d'"ensemble maximal d'observables commutantes".

1. Polarisation "position" de $(T^*Q, dp_j \wedge dq^j)$ définie par $f_j(p, q) = q^j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$ ; ici $\mathcal{F} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R}\, \partial/\partial p_j$.
2. Polarisation "impulsion" de $(T^*\mathbb{R}^n, dp_j \wedge dq^j)$ définie par $f_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$ ; alors $\mathcal{F} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R}\, \partial/\partial q^j$.

**Exercice 4.19.** Montrer que $\omega$ s'annule sur les sous-variétés $(f_1, \ldots, f_n) = $ const., i.e. vérifier que $\omega(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$.[42]

**Définition 4.20.** *Si $(Y, \alpha)$ préquantifie $(M, \omega)$, le **relevé horizontal** d'une polarisation $\mathcal{F}$ est un champ de sous-espaces $\widetilde{\mathcal{F}} \subset TY$ se projetant sur $\mathcal{F}$, tel que $d\alpha(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{F}}) = 0$ et $\alpha(\widetilde{\mathcal{F}}) = 0$. On appelle parfois $\mathcal{F}$ **polarisation de Planck** [5].*

41. C'est-à dire $df_1 \wedge \ldots df_n \neq 0$.

42. Définition alternative d'une polarisation : c'est une distribution, $\mathcal{F} : x \mapsto \mathcal{F}_x \subset T_xM$, intégrable, isotrope (i.e. $\omega(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$) et maximale (i.e. $\dim \mathcal{F}_x = \frac{1}{2}\dim M$ pour tout $x \in M$).

**Exemple 4.21.** Relevés horizontaux des polarisations de l'Exemple 4.18 avec la préquantification (4.9).

1. Polarisation position (dite aussi "verticale") de $T^*Q$ : $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R}\,\partial/\partial p_j$.
2. Polarisation impulsion de $T^*\mathbb{R}^n$ : $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R}\,[\partial/\partial q^j - (p_j/\hbar)\partial/\partial\theta]$.

### 4.2.2 Quantification géométrique (première approche)

Introduisons l'espace des **fonctions polarisées** comme espace de représentation quantique d'une algèbre de Lie d'observables associée à une polarisation $\mathcal{F}$.

**Définition 4.22.** *On appelle espace de* ***représentation quantique*** $\mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}}$*, pour une polarisation* $\mathcal{F}$*, l'espace des fonctions* $\Psi \in \mathcal{H}_Y$ *dites* $\mathcal{F}$***-polarisées****, i.e. telles que*

$$\widetilde{X}\Psi = 0 \qquad \forall \widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{F}} \tag{4.20}$$

**Remarque 4.23.** Nous n'imposons pas, pour l'instant, de produit scalaire hermitien sur $\mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}}$.

**Exemple 4.24.** Fonctions polarisées de l'Exemple 4.21.

1. **Polarisation position ou "verticale"** : on a $\Psi(p,q,z) = z\widetilde{\psi}(p,q)$ par (4.17) ; la condition (4.20) donne $(\partial/\partial p_j)\Psi(p,q,z) = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,n$ et donc

$$\Psi(p,q,z) = z\psi(q) \tag{4.21}$$

   où $\psi \in C_c^\infty(Q,\mathbb{C})$. [43]

43. Les fonctions polarisées (4.21) ne sont plus à support compact dans $Y = T^*Q \times \mathbb{T}$. Cette difficulté est contournée en redéfinissant ici le produit scalaire hermitien de deux telles fonctions $\Phi$ et $\Psi$ par

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_Q \overline{\phi(q)}\psi(q)\,d\mu(q)$$

pour une certaine mesure $d\mu$ sur $Q$.

2. **Polarisation impulsion** : avec $\Phi(\mathbf{p},\mathbf{q},e^{i\theta}) = e^{i\theta}\widetilde{\phi}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, la condition (4.20) s'écrit $[\partial/\partial q^j - (p_j/\hbar)\partial/\partial\theta]\,\Phi(\mathbf{p},\mathbf{q},z) = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,n$ ; on a alors $(\partial/\partial q^j)\widetilde{\phi}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (ip_j/\hbar)\widetilde{\phi}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ et ainsi

$$\Phi(\mathbf{p},\mathbf{q},z) = z\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}/\hbar}\,\phi(\mathbf{p}) \tag{4.22}$$

où $\phi \in C_c^\infty((\mathbb{R}^n)^*,\mathbb{C})$.

La représentation préquantique (4.18) $\Psi \mapsto \widehat{F}\Psi$ de l'observable $F \in C^\infty(M)$ doit maintenant préserver l'espace $\mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}}$ ; il faut donc que $\widetilde{X}X_F^\sharp\Psi = [\widetilde{X}, X_F^\sharp]\Psi = 0$ si $\widetilde{X}\Psi = 0$ pour tout $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ : les **observables $\mathcal{F}$-quantifiables** (préservant la polarisation $\mathcal{F}$) forment une sous-algèbre de Lie [44]

$$C_{\mathcal{F}}^\infty(M) = \{F \in C^\infty(M) \mid [\mathcal{F}, X_F] \subset \mathcal{F}\} \tag{4.23}$$

**Lemme 4.25.** *Si $\mathcal{F}$ est la polarisation verticale de $(T^*Q, \varpi = p_j dq^j)$, on a*

$$F \in C_{\mathcal{F}}^\infty(T^*Q) \qquad \Leftrightarrow \qquad F(p,q) = p_j A^j(q) + B(q)$$

*où $A = A^j(q)\,\partial/\partial q^j \in \mathrm{Vect}(Q)$ et $B \in C^\infty(Q)$. On a la structure d'algèbre de Lie*

$$C_{\mathcal{F}}^\infty(T^*Q) \cong \mathrm{Vect}(Q) \ltimes C^\infty(Q)$$

*Démonstration.* Exercice ! □

**Proposition 4.26.** *Les observables $F \in C_{\mathcal{F}}^\infty(M)$ se quantifient dans $\mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}}$ (cf. (4.21)) selon*

$$\boxed{\widehat{F} = \frac{\hbar}{i}\,A^j(q)\,\frac{\partial}{\partial q^j} + B(q)} \tag{4.24}$$

*Démonstration.* Si $F(p,q) = p_j A^j(q) + B(q)$, on obtient $X_F = A^j\partial/\partial q^j - (\partial F/\partial q^j)\partial/\partial p_j$ et $X_F^\sharp\Psi = (A^j\partial/\partial q^j - (\partial F/\partial q^j)\partial/\partial p_j + (B/\hbar)\partial/\partial\theta)\,z\psi(q)$ ou $\widehat{F}\Psi = (\hbar/i)X_F^\sharp\Psi = ((\hbar/i)A^j\partial/\partial q^j + B)\,z\psi(q)$ puisque les fonctions d'onde polarisées sont indépendantes de $p_1,\ldots,p_n$. □

44. On a, en effet, $[\widetilde{X}_{f_j}, X_F^\sharp] = \widetilde{X}_{\{f_j,F\}}$ pour tout $j = 1,\ldots,n$ et tout ensemble maximal d'observables commutantes $f_1,\ldots,f_n$ définissant $\mathcal{F}$.

**Corollaire 4.27.** *La représentation quantique (4.24) conduit à la* ***représentation de Schrödinger***

$$\widehat{p_j} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q^j} \tag{4.25}$$

$$\widehat{q^j} = q^j \tag{4.26}$$

$$\widehat{1} = \mathbf{1} \tag{4.27}$$

*pour tout* $j = 1, \ldots, n$*.*

**Exercice 4.28.** Réintroduire $\hbar$ dans la 1-forme préquantique (3.48) du groupe de Heisenberg $Y = H_n \cong T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$ et écrire $\alpha = \mathbf{p}.d\mathbf{q} + \hbar d\theta$. Si l'on pose (cf. (3.47)) :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{a} & \hbar c \\ 0 & 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_n$$

avec $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $e^{ic} \in \mathbb{T}$, alors $g_Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \theta) = (\mathbf{p} + \mathbf{a}, \mathbf{q} + \mathbf{b}, \theta - \mathbf{a} \cdot \mathbf{q}/\hbar + c)$.

1) Vérifier que $(g_Y)^*\alpha = \alpha$ pour tout $g \in H_n$.

2) Choisir la polarisation “position” $\mathcal{F}$ et poser

$$\boxed{\varrho(g)\Psi = \Psi \circ g_Y^{-1}} \tag{4.28}$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}}$ et $g \in H_n$. Vérifier que $\varrho$ définit une représentation de $H_n$ dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ donnée par

$$\boxed{\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}, c)\psi(\mathbf{q}) = e^{-i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/\hbar + c)} e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{q}/\hbar}\,\psi(\mathbf{q} - \mathbf{b})} \tag{4.29}$$

3) Montrer que $(L^2(\mathbb{R}^n), \varrho)$ est une représentation unitaire irréductible de $H_n$.

### 4.2.3 Application : représentation de spin

La préquantification de l'espace des états de spin demi-entier se construit grâce à la Proposition 4.7 : la sphère $Y = S^3 = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^2 \,|\, \overline{\mathbf{Z}}\mathbf{Z} = \sum_{A=1}^2 |Z^A|^2 = 1\}$ munie de la 1-forme

$$\alpha = n\frac{\hbar}{i}\overline{\mathbf{Z}}d\mathbf{Z} \tag{4.30}$$

sert à la préquantification de la sphère $(S^2, \omega = (n\hbar/2)\,\mathrm{surf}_{S^2})$ des états classiques de spin $s = \frac{1}{2}n\hbar$ avec $n = 1, 2, 3, \ldots$

• Le générateur du tore $\mathbb{T}$ devient [45]

$$\xi = \frac{i}{n}\left(Z^A \frac{\partial}{\partial Z^A} - \overline{Z}_A \frac{\partial}{\partial \overline{Z}_A}\right) \tag{4.31}$$

• La notion de polarisation s'étend au cas complexe. On vérifie que les fonctions commutantes $Z^1$ et $Z^2$ définissent une polarisation de $(\mathbb{C}^2, d\overline{\mathbf{Z}} \wedge d\mathbf{Z}/i)$, à savoir

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}^2} = \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_1} \oplus \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial \overline{Z}_2}$$

dont la trace $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $S^3$ vérifie $d\alpha(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{F}}) = 0$ et $\alpha(\widetilde{\mathcal{F}}) = 0$, cf. Définition 4.20.

Fonctions $\mathcal{F}$-polarisées : ce sont les fonctions $\Psi : S^3 \to \mathbb{C}$ telles que $\xi\Psi = i\Psi$ (cf. (4.19)) et $\partial\Psi/\partial\overline{Z}_1 = \partial\Psi/\partial\overline{Z}_2 = 0$ (cf (4.20)). Alors $\Psi \in \mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}}$ ssi $\Psi$ est la trace sur $S^3$ d'une fonction holomorphe, homogène de degré $n$ (vérifiant $Z^A\partial\Psi/\partial Z^A = n\Psi$ compte tenu de (4.31)).

On a donc

$$\Psi(\mathbf{Z}) = \psi(\mathbf{Z}, \ldots, \mathbf{Z}) = \psi_{A_1\ldots A_n} Z^{A_1} \cdots Z^{A_n} \tag{4.32}$$

où $A_1, \ldots, A_n = 1, 2$ ; les $\psi_{A_1\ldots A_n} = \psi_{(A_1\ldots A_n)} \in \mathbb{C}$ sont les composantes de $\psi$, tenseur covariant complètement symétrique. [46] On appelle

$$\mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}} \cong \mathbb{C}^{n+1}$$

**espace des spineurs** pour $s = \frac{1}{2}n\hbar$. Nous munissons cet espace d'une structure hilbertienne donnée par le produit scalaire suivant [47]

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_{S^2} \overline{\Phi(Z)}\Psi(Z)\,\mathrm{surf} \tag{4.33}$$

45. La variété préquantique est en fait décrite par les $\mathbf{Z}^{\otimes n} = \overbrace{\mathbf{Z} \otimes \cdots \otimes \mathbf{Z}}^{n}$ où $\mathbf{Z} \in S^3$.
46. On note $\psi_{(A_1\ldots A_n)} = (1/n!)\sum_{\sigma \in S_n} \psi_{\sigma(A_1)\ldots\sigma(A_n)}$.
47. Exercice : Prouver que

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{A_1, \cdots, A_n} \overline{\Phi^{A_1\ldots A_n}} \Psi_{A_1\ldots A_n}$$

• Nous savons (4.13) que $u_k = \overline{\mathbf{Z}}\sigma_k\mathbf{Z}$ est la composante $k = 1,2,3$ de la direction $\mathbf{u} \in S^2$ du spin. Le vecteur de spin $\mathbf{S} = \frac{1}{2}n\hbar\,\mathbf{u}$ a donc pour composantes

$$S_k = n\frac{\hbar}{2}\,\overline{\mathbf{Z}}\sigma_k\mathbf{Z} \qquad (k = 1,2,3)$$

**Lemme 4.29.** *Le champ hamiltonien quantique* $X^\sharp_{S_k} : \mathbf{Z} \mapsto \delta\mathbf{Z}$ *associé à* $S_k \in C^\infty(S^2)$ *est donné par*

$$\delta\mathbf{Z} = \frac{i}{2}\,\sigma_k\mathbf{Z} \tag{4.34}$$

*Démonstration.* Les fonctions $S_1, S_2, S_3$ sont, en fait, les composantes de l'application moment de SU(2) dont l'action naturelle sur $S^3$, $\mathbf{Z} \mapsto g\mathbf{Z}$ avec $g \in \mathrm{SU}(2)$, invarie $\alpha$. Il suffit alors de vérifier que $\alpha(X^\sharp_{S_k}) = (n\hbar/i)\overline{\mathbf{Z}}\delta\mathbf{Z} = (n\hbar/2)\overline{\mathbf{Z}}\sigma_k\mathbf{Z} = S_k$. □

**Proposition 4.30.** *Le quantifié de la* $k$*-ième composante* $S_k$ *du spin est donné, sur l'espace des spineurs (4.32), par*[48]

$$\boxed{\widehat{S_k}\Psi(\mathbf{Z}) = n\frac{\hbar}{2}\psi(\sigma_k\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \ldots, \mathbf{Z})} \tag{4.35}$$

*Démonstration.* On déduit de (4.18) : $\widehat{S_k}\Psi(\mathbf{Z}) = (\hbar/i)X^\sharp_{S_k}\Psi(\mathbf{Z}) = (\hbar/i)\delta[\Psi(\mathbf{Z})]$ où $\delta\mathbf{Z}$ est comme en (4.34). Donc $\widehat{S_k}\Psi(\mathbf{Z}) = (n\hbar/i)\psi(\delta\mathbf{Z}, \mathbf{Z}\ldots, \mathbf{Z}) = (n\hbar/2)\psi(\sigma_k\mathbf{Z}, \mathbf{Z}\ldots, \mathbf{Z})$ puisque le tenseur $\psi$ est complètement symétrique. □

**Exercice 4.31.** Montrer que l'expression suivante

$$\varrho(g)\Psi(\mathbf{Z}) = \psi(g^{-1}\mathbf{Z}, \ldots, g^{-1}\mathbf{Z}) \qquad \forall g \in \mathrm{SU}(2) \tag{4.36}$$

définit une représentation $\varrho$ du groupe SU(2), unitaire (pour le produit scalaire (4.33)), irréductible sur l'espace des spineurs (4.32). C'est la **représentation de spin** $\frac{1}{2}n\hbar$.

48. En composantes spinorielles, on a

$$\widehat{S_k}\psi_{A_1\ldots A_n} = n\frac{\hbar}{2}\,\psi_{A(A_2\ldots A_n}[\sigma_k]^A_{A_1)}$$

**Exercice 4.32.** Vérifier que l'Equation (4.35) fournit bien la représentation de spin infinitésimale (dérivée de (4.36)), solution des relations de commutation d'un moment angulaire

$$\left[\widehat{S}_j, \widehat{S}_k\right] = \frac{\hbar}{i}\,\varepsilon^{\ell}_{jk}\,\widehat{S}_\ell$$

où $j, k, \ell = 1, 2, 3$, avec $\varepsilon^{\ell}_{jk}$ le symbole de Levi-Civita standard. [49]

## 4.3 Equation de Schrödinger

La procédure standard de quantification géométrique associée à une polarisation Galilée-invariante conduit naturellement à l'**équation de Schrödinger** via l'espace de ses solutions générales dans le cas libre.

### 4.3.1 Fibré préquantique

• Nous avons déjà introduit — voir la formule (3.5) — la structure présymplectique $(V = (T\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}, \sigma = m\,d\overline{\mathbf{v}} \wedge (d\mathbf{r} - \mathbf{v}dt))$ d'une particule galiléenne de masse $m > 0$ et montré que le groupe de Galilée (3.3) est un groupe de symétries (de présymplectomorphismes !). Noter que $\sigma = d\left(m\langle \mathbf{v}, d\mathbf{r}\rangle - \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 dt\right)$ ce qui suggère d'introduire sur la nouvelle variété $W = V \times \mathbb{T}$, décrite par $(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t, e^{i\varphi})$, la 1-forme

$$\beta = m\langle \mathbf{v}, d\mathbf{r}\rangle - \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 dt + \hbar d\varphi \tag{4.37}$$

vérifiant, bien sûr, $d\beta = (W \to V)^*\sigma$.

• La 2-forme $\sigma$ de $V$ passe à l'espace des mouvements $M = V/\ker\sigma \cong T^*\mathbb{R}^3$ selon la 2-forme symplectique $\omega = d\overline{\mathbf{p}} \wedge d\mathbf{q}$ (cf. (2.6)) où $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ & $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ (cf. (2.7)).

• On a trivialement $\beta = -\langle \mathbf{r} - \mathbf{v}t, d(m\mathbf{v})\rangle + d\left(\hbar\varphi + \langle \mathbf{r}, m\mathbf{v}\rangle - \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2\, t\right)$, d'où le

49. On utilisera le fait que $\{S_j, S_k\} = \varepsilon^{\ell}_{jk} S_\ell$.

**Lemme 4.33.** *La* 1*-forme (4.37) de* $W$ *descend selon la* 1*-forme*

$$\alpha = -\langle \mathbf{q}, d\mathbf{p} \rangle + \hbar d\theta \tag{4.38}$$

*sur* $M \times \mathbb{T}$ *décrit par* $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z = e^{i\theta})$ *où*

$$\theta = \varphi + \frac{1}{\hbar}\left[\langle \mathbf{r}, m\mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2 \, t\right] \tag{4.39}$$

*La variété* $(Y = M \times \mathbb{T}, \alpha)$ *préquantifie l'espace des mouvements galiléens libres* $(M, \omega)$ *d'une particule massive.*

$$\begin{tikzcd} W = V \times \mathbb{T} \arrow[r, "\mathbb{R}"] \arrow[d, "\mathbb{T}"'] & Y = M \times \mathbb{T} \arrow[d, "\mathbb{T}"] \\ V = (T\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R} \arrow[r, "\mathbb{R}"] & M = T^*\mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \tag{4.40}$$

### 4.3.2 Fonctions d'onde polarisées

La polarisation naturelle est la polarisation verticale $\mathbf{p} = \text{const.}$ et les fonctions polarisées associées sont données par (voir Exemple 4.24,1.) :

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) = z\phi(\mathbf{p}) \tag{4.41}$$

avec $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. L'image réciproque $\Psi = (W \to Y)^*\Phi$ de ces fonctions sur la variété $W$ (voir le diagramme (4.40)) est donc $\Psi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t, e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}\, \psi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ où la fonction $\psi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = e^{(im/\hbar)\left[\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2 \, t\right]}\, \phi(m\mathbf{v})$ est complètement déterminée par $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)$.

La fonction $\phi$ étant à support compact, l'intégrale $\widetilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\, d\mu(\mathbf{v})$ — où $d\mu(\mathbf{v}) = dv^1 dv^2 dv^3$ — est convergente.

On en déduit le résultat important donné par la proposition suivante qui fournit un exemple de formation des équations d'onde dans le cadre de la quantification géométrique.

**Proposition 4.34.** *[5] Les fonctions polarisées (4.41) sont en bijection avec les* ***fonctions d'onde***

$$\boxed{\widetilde{\psi}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{(im/\hbar)\left[\langle \mathbf{r},\mathbf{v}\rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2 t\right]}\,\phi(m\mathbf{v})\,d\mu(\mathbf{v})} \tag{4.42}$$

*solutions générales de l'****équation de Schrödinger***

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\widetilde{\psi}} \tag{4.43}$$

*Démonstration.* On calcule aisément par dérivation sous le signe somme les quantités $\partial\widetilde{\psi}/\partial t = \int_{\mathbb{R}^3}(-im/(2\hbar))\|\mathbf{v}\|^2\,\psi(\mathbf{v},\mathbf{r},t)\,d\mu(\mathbf{v})$ & $\partial\widetilde{\psi}/\partial x^j = \int_{\mathbb{R}^3}(im/\hbar)v_j\,\psi(\mathbf{v},\mathbf{r},t)\,d\mu(\mathbf{v})$ ; alors $\Delta\widetilde{\psi} = \delta^{jk}\,\partial^2\widetilde{\psi}/\partial x^j\partial x^k = \int_{\mathbb{R}^3}(im/\hbar)^2\|\mathbf{v}\|^2\,\psi(\mathbf{v},\mathbf{r},t)\,d\mu(\mathbf{v}) = -(2mi/\hbar)\,\partial\widetilde{\psi}/\partial t$. □

### 4.3.3 Représentation du groupe de Bargmann

Nous relevons l'action du groupe de Galilée à la variété $W$ en préservant la 1-forme "préquantique" (4.37).

**Proposition 4.35.** *Les symétries de* $(W,\beta)$ *se projetant sur* $(V,\sigma)$ *selon le groupe de Galilée* $\mathrm{Gal}(3,1)$ *forment un groupe : le* ***groupe de Bargmann****,* $\mathrm{Barg}(3,1)$*, décrit par* $g = (R,\mathbf{b},\mathbf{c},e,f)$ *— avec* $R \in \mathrm{SO}(3)$*,* $\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *et* $e,f \in \mathbb{R}$ *— et opérant selon* $g_W(\mathbf{v},\mathbf{r},t,\varphi) = (\mathbf{v}^*,\mathbf{r}^*,t^*,\varphi^*)$ *où*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^* &= R\mathbf{v} + \mathbf{b}\\
\mathbf{r}^* &= R\mathbf{r} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}\\
t^* &= t + e\\
\varphi^* &= \varphi + \frac{m}{\hbar}\left[f - \langle \mathbf{b}, R\mathbf{r}\rangle - \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\|^2 t\right]
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Indication : calculer $\beta^* = m\langle\mathbf{v}^*, d\mathbf{r}^*\rangle - \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}^*\|^2 dt^* + \hbar d\varphi^*$ où $(\mathbf{v}^*,\mathbf{r}^*,t^*)$ est donné par l'action (3.4) du groupe de Galilée ; déduire de la propriété d'invariance, $\beta^* = \beta$, l'expression de $d\varphi^*$ puis de $\varphi^*$ modulo une constante, $f \in \mathbb{R}$, le paramètre d'extension (centrale). □

**Exercice 4.36.** Représentations unitaires irréductibles du groupe de Bargmann de masse $m > 0$ :

1. Vérifier que le groupe de Bargmann est isomorphe au groupe des matrices $6 \times 6$ :

$$g = \begin{pmatrix} R & \mathbf{b} & 0 & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & 0 & e \\ -\overline{\mathbf{b}}R & -\frac{1}{2}\|\mathbf{b}\|^2 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Barg}(3,1) \tag{4.44}$$

2. Prouver que l'action de $\mathrm{Barg}(3,1)$ sur la variété préquantique $Y = M \times \mathbb{T}$ est [50]

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^* &= R\mathbf{p} + m\mathbf{b} \\ \mathbf{q}^* &= R\mathbf{q} - \frac{1}{m}eR\mathbf{p} + \mathbf{c} - \mathbf{b}e \\ \theta^* &= \theta + \frac{1}{\hbar}\Big[\langle R\mathbf{p} + m\mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle - \frac{1}{2m}\|R\mathbf{p} + m\mathbf{b}\|^2 e + mf\Big] \end{aligned} \tag{4.46}$$

3. Déduire de (4.28) et (4.41), ainsi que de la question précédente que la représentation $(L^2(\mathbb{R}^3), \varrho)$ définie par

$$\boxed{\varrho(g)\phi(\mathbf{p}) = e^{(-i/\hbar)\left[\langle \mathbf{p},\mathbf{c}\rangle - 1/(2m)\|\mathbf{p}\|^2 e + mf\right]}\,\phi(R^{-1}(\mathbf{p} - m\mathbf{b}))} \tag{4.47}$$

est une **représentation unitaire irréductible** de $\mathrm{Barg}(3,1)$ de masse $m > 0$.

---

50. L'inverse de la transformation (4.46) est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= R^{-1}(\mathbf{p}^* - m\mathbf{b}) \\ \mathbf{q} &= R^{-1}\Big(\mathbf{q}^* + \frac{1}{m}e\mathbf{p}^* - \mathbf{c}\Big) \\ \theta &= \theta^* - \frac{1}{\hbar}\Big[\langle \mathbf{c}, \mathbf{p}^*\rangle - \frac{1}{2m}\|\mathbf{p}^*\|^2 e + mf\Big] \end{aligned} \tag{4.45}$$

## 4.4 Spectre d'énergie de l'oscillateur harmonique quantifié et demi-formes

Nous présentons ici la quantification géométrique de l'hamiltonien (2.9) de l'oscillateur harmonique isotrope (de masse $m$ et de pulsation propre $\Omega$) à $n$ degrés de liberté ; cf. Chapitre 2.3.1.

### 4.4.1 Préquantification

L'espace des mouvements est $(\mathbb{C}^n, \omega)$ où la 2-forme symplectique $\omega$ est donnée par (2.8). Remarquons que cette dernière est globalement potentielle, i.e. $\omega = d\beta$ où $\beta = m\Omega/(4i)\big(\overline{\mathbf{Z}}d\mathbf{Z} - (d\overline{\mathbf{Z}})\mathbf{Z}\big)$, où $\overline{\mathbf{Z}} = (\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2\,\cdots\,\overline{Z}_n)$ désigne l'adjoint de $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^n$. La préquantification (Définition 4.4) est donc triviale et donnée par $(Y, \alpha)$ avec $Y = \mathbb{C}^n \times \mathbb{T}$ et $\alpha = \beta + \hbar d\theta$ (abus de notation). On écrira avantageusement

$$\alpha = \frac{m\Omega}{2i}\,\overline{\mathbf{Z}}d\mathbf{Z} + \hbar d\Theta \qquad \text{où} \qquad \Theta = \theta - \frac{m\Omega}{4i\hbar}|\mathbf{Z}|^2. \tag{4.48}$$

Le champ de vecteurs hamiltonien $X_H$ de $(\mathbb{C}^n, \omega)$ associé à $H = \frac{1}{2}m\Omega^2|\mathbf{Z}|^2$ est calculé via (4.2). Quant à son relevé quantique, Définition 4.10, il est donné par

$$X_H^\sharp = i\Omega\left(\mathbf{Z}\frac{\partial}{\partial\mathbf{Z}} - \overline{\mathbf{Z}}\frac{\partial}{\partial\overline{\mathbf{Z}}}\right). \tag{4.49}$$

**Exercice 4.37.** Prouver (4.49).

### 4.4.2 Fonctions d'onde polarisées

On vérifie encore, comme en Section 4.2.3, que les fonctions Poisson-commutantes $Z^1, Z^2, \ldots, Z^n$ définissent une polarisation complexe $\mathcal{F}$ de $(\mathbb{C}^n, d\overline{\mathbf{Z}} \wedge d\mathbf{Z}/i)$ ; le relevé horizontal de cette polarisation au fibré préquantique $(Y, \alpha)$ est alors

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \bigoplus_{A=1}^{n} \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial\overline{Z}_A}. \tag{4.50}$$

**Théorème 4.38.** *Les fonctions $\widetilde{\mathcal{F}}$-polarisées de $(Y, \alpha)$ sont de la forme*

$$\Psi(\mathbf{Z}, \theta) = e^{i\theta} e^{-m\Omega|\mathbf{Z}|^2/(4\hbar)} \psi(\mathbf{Z}) \tag{4.51}$$

*où $\psi$ est une fonction holomorphe de $\mathbb{C}^n$. L'espace, $\mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}}$, de ces fonctions polarisées devient alors un espace de Hilbert, une fois muni du produit scalaire hermitien naturel*[51] $\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{\Phi(\mathbf{Z}, \theta)} \Psi(\mathbf{Z}, \theta)\, \omega^n$*, ou encore*[52]

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{\phi(\mathbf{Z})} \psi(\mathbf{Z})\, e^{-m\Omega|\mathbf{Z}|^2/(2\hbar)}\, \omega^n. \tag{4.52}$$

*Démonstration.* Les fonctions d'onde satisfont à la relation de $\mathbb{T}$-équivariance (4.17) ; dans le système de coordonnées $(\mathbf{Z}, \Theta)$, cf. (4.48), ces fonctions $\Psi : Y \to \mathbb{C}$ sont de la forme $\Psi(\mathbf{Z}, \theta) = e^{i\Theta} \psi(\mathbf{Z})$, où $\psi$ est une fonction complexe arbitraire de $\mathbb{C}^n$. De plus, la condition (4.20) de constance de $\Psi$ le long de la polarisation de Planck $\widetilde{\mathcal{F}}$, donnée par (4.50) dans ces mêmes coordonnées, implique que $\partial\psi/\partial\overline{\mathbf{Z}} = 0$, i.e. que $\psi$ soit une fonction holomorphe (analytique complexe). Nous avons prouvé (4.51). La deuxième partie du théorème est omise ; voir [7] par exemple. $\square$

### 4.4.3 Hamiltonien quantique de l'OH

L'hamiltonien $H = \frac{1}{2} m\Omega^2 |\mathbf{Z}|^2$ est une observable $\mathcal{F}$-quantifiable (4.23) car son flot $\mathbf{Z} \mapsto e^{i\Omega t}\, \mathbf{Z}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, préserve la polarisation $\mathcal{F}$ holomorphe choisie. Il est alors possible d'appliquer la formule (4.18) donnant son quantifié $\widehat{H}$.

On obtient ainsi $\widehat{H}\Psi = -i\hbar X_H^\sharp \Psi = e^{i\theta} e^{-m\Omega|\mathbf{Z}|^2/(4\hbar)} i\Omega\, \mathbf{Z}.\partial\psi/\partial\mathbf{Z}$ grâce à (4.49) et au fait que $\partial\psi/\partial\overline{\mathbf{Z}} = 0$. On obtient donc un opérateur self-adjoint $\widehat{H}$ de $(\mathcal{H}_Y^{\mathcal{F}}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$, obtenu par quantification géométrique, à savoir

$$\widehat{H}\psi = \hbar\Omega\, \mathcal{E}\psi \tag{4.53}$$

51. On rappelle que $(-1)^{n(n-1)/2}\omega^n/n! = (m\Omega/(2i))^n\, d\overline{Z}_1 \wedge \ldots d\overline{Z}_n \wedge dZ^1 \ldots \wedge dZ^n$ est la forme volume de Liouville.

52. V. Bargmann, Communications on pure and applied mathematics, **14** (1961), 187.

où

$$\mathcal{E} = \mathbf{Z}\frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}} \tag{4.54}$$

désigne l'**opérateur d'Euler**.

**Remarque 4.39.** On connaît le spectre de l'opérateur d'Euler, $\mathrm{Sp}(\mathcal{E}) = \mathbb{N}$. Ainsi, le résultat (4.53) implique $\mathrm{Sp}(\widehat{H}) = \hbar\Omega\,\mathbb{N}$, en **désaccord** avec la mécanique quantique qui prévoit un spectre décalé de $E_0 = \frac{1}{2}n\hbar\Omega$ pour l'OH isotrope $n$-dimensionnel.

Cette remarque montre que l'espace de représentation de la quantification géométrique doit être modifié. La notion de demi-forme a ainsi été introduite (voir [7] et les références incluses) pour remédier à ces difficultés.

Le nouvel espace de représentation est, dans ce cas, le produit tensoriel de l'espace de Hilbert (4.52) par l'espace des **demi-formes** engendré par $\nu = \sqrt{dZ^1 \wedge \cdots \wedge dZ^n}$.

Nous définirons donc, suivant la prescription (4.18), le nouveau quantifié $\widehat{H}$ de l'observable classique $H$ par

$$\widehat{H}(\Psi \otimes \nu) = \frac{\hbar}{i} L_{X_H^\sharp}(\Psi \otimes \nu). \tag{4.55}$$

**Proposition 4.40.** *L'opérateur quantique, $\widehat{H}$, obtenu par quantification géométrique (4.55) est donné par*

$$\boxed{\widehat{H}(\psi \otimes \nu) = \hbar\Omega\Big(\mathcal{E} + \frac{n}{2}\Big)\psi \otimes \nu} \tag{4.56}$$

*Démonstration.* Le résultat suit aisément de (4.53) et du fait que $L_{X_H^\sharp} dZ^k = i\Omega dZ^k$, pour tout $k = 1, \ldots, n$, impliquant finalement $L_{X_H^\sharp}\nu = i\Omega\frac{1}{2}n\,\nu$. $\square$

# Références


[1] P. Iglesias, *Symétries et moment*, Hermann, 2000.

[2] A. A. Kirillov, *Eléments de la théorie des représentations*, Editions Mir, Moscou, 1974. *Geometric Quantization*, in "Encyclopedia of Math. Sci.," Vol. 4, Springer-Verlag, 1990.

[3] B. Kostant, *Quantization and Unitary representations, Part I*, Lecture Notes in Math **170**, Springer-Verlag (1970) 87–208.

[4] J.-E. Marsden, T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer, 1999.

[5] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, 1970. *Structure of Dynamical Systems : a Symplectic View of Physics*, Birkhäuser, 1997.

[6] E. P. Wigner, *On Unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math **40**, 149–204 (1939).

[7] N. M. J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon Press, Oxford, 1992.