Planche 8 : Systèmes linéaires

EXERCICE I :

Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 & = & 7 \end{cases}$$

EXERCICE II :

Les systèmes suivants sont-ils compatibles ? Si oui donner la solution

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 & = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 & = & 7 \end{cases}$$

EXERCICE III :

Trouver un nombre de trois chiffres sachant que

- La somme des chiffres est égale à 14
- En permutant le chiffre des unités avec celui des dizaines ce nombre augmente de 36
- En permutant le chiffre des unités avec celui des centaines ce nombre augmente de 297

EXERCICE IV :

Résoudre et discuter selon le paramètre k les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 3x - 4y = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x - ky + z = k \\ -x + ky + z = 1 \\ x + ky - z = 1 \end{cases}$$

EXERCICE V :

Discuter, selon les valeurs du paramètre λ et donner, s'il y a lieu, les solutions

du système linéaire suivant : $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + 2\lambda x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2\lambda x_3 & = & \lambda \\ -x_1 - \lambda x_2 + 4x_3 & = & -2 \end{cases}$

EXERCICE VI :

On considère le système linéaire $\begin{cases} x + 2y - 9z = 1 \\ -y + \lambda z = -2 \\ -x + \lambda y + z = 7 \end{cases}$ où λ est un paramètre réel.

Pour quelle(s) valeur(s) de λ ce système est-il incompatible?

EXERCICE VII :

On considère un système linéaire (ζ) : $AX=K$ où $K\neq 0$. Soient S_1 et S_2 deux solutions de (ζ).

Trouver tous les réels α et β tels que $\alpha S_1 + \beta S_2$ soit aussi solution de (ζ).

EXERCICE VIII :

Discuter, selon les valeurs des paramètres λ et μ l'existence et le nombre de solutions du système linéaire suivant (Ne pas donner la forme explicite de la (les) solution(s) quand elle(s) existe(nt)) :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = & \lambda^2 \\ (\lambda-1)x_2 + (1-\lambda)\lambda x_3 & = & \lambda - \lambda^2 \\ (\lambda+2)x_1 + (\lambda+2)\lambda x_2 + (\lambda+2)x_3 & = & \mu + \lambda + \lambda^2 \end{cases}$$

EXERCICE IX :

On considère le système linéaire : $\begin{cases} x + \lambda y & = & \alpha \\ \lambda x + y & = & \beta \\ x + \lambda y + z + \lambda t & = & \gamma \\ x - y + \lambda z + t & = & \delta \end{cases}$ où $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^5$.

1) Montrer que la condition nécessaire pour que ce système admette une infinité de solutions est que $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$.

2) Donner la solution générale dans le cas où $\lambda=1$

EXERCICE X :

On considère le système linéaire (ξ) : $AX=K$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $K = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

1) Ce système est-il incompatible?

2) Calculer $B={}^tA.A$ et B^{-1}

3) Résoudre le système linéaire ${}^tA.AX = {}^tA.K$

EXERCICE XI :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1) Montrer que si $ad\text{-}bc=0$ alors les lignes de A sont linéairement dépendantes.

2) Montrer que A est inversible si et seulement si $ad\text{-}bc \neq 0$

3) Si A est inversible donner l'expression de son inverse A^{-1}

4) Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

5) En déduire l'unique (pourquoi ?) solution du système linéaire : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 3y = -2 \end{cases}$

EXERCICE XII :

1) Montrer que les matrices lignes de $A_1=(5\ \ 8\ \ 1)$, $A_2=(0\ \ 2\ \ 1)$ et $A_3=(4\ \ 3\ \ -1)$ sont linéairement indépendantes. En déduire que $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

2) Résoudre les systèmes linéaires : $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 & = & a \\ 2x_2 + x_3 & = & b \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 & = & c \end{cases}$