Fonctions : limites, continuité, dérivabilité

I Rappels de vocabulaire

Dans ce chapitre on ne s'intéresse qu'à des fonctions numériques à variable réelle, c'est-à-dire des fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit donc $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit que f est définie au voisinage de x_0 ssi il existe un intervalle I contenant x_0 et non réduit à un point tel que $I \setminus \{x_0\} \subset \mathcal{D}$.

• On dit que f est une fonction **paire** ssi : $\forall x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = f(x)$.

• On dit que f est une fonction **impaire** ssi : $\forall x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = -f(x)$.

• On dit que f est une fonction **périodique de période** T si f est définie sur $\mathbb{R}$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

Soit I un intervalle contenu dans $\mathcal{D}$.

• On dit que f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur l'<u>intervalle I</u> ssi :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \;\; x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \;\; (\text{resp. } f(x_1) \geqslant f(x_2)\ )$$

• On dit que f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur l'<u>intervalle I</u> ssi :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \;\; (\text{resp. } f(x_1) > f(x_2)\ )$$

• On dit que f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I ssi f est croissante ou décroissante sur I (resp. f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I).

• On dit que f est **majorée** par M (resp. **minorée** par m) sur I ssi

$$\forall x \in I, \; f(x) \leqslant M \;\; (\text{resp. } f(x) \geqslant m\ )$$

• On dit que f est **bornée** ssi I si f est majorée et minorée sur I.

II Limites

1 Définitions

Définition 1

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est définie au voisinage de ce point et $\ell \in \mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D},\quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est définie au voisinage de ce point. On a $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ ssi :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D},\quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

• Si f est définie au voisinage de $+\infty$, on a $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D},\quad x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

• Si f est définie au voisinage de $+\infty$, on a $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ssi :

$$\forall A > 0,\ \exists A' > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D},\quad x > A' \Rightarrow f(x) > A$$

Remarques :

– On peut aussi définir les limites à gauche ou à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ que l'on note respectivement $\lim\limits_{x_0^-} f$ et $\lim\limits_{x_0^+} f$. (voir votre cours de 1ère année pour une définition complète)

– De même on peut bien sûr définir $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$, $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

Notations : il existe deux principales façons de noter une limite, attention à ne pas les mélanger :

$$\lim_{x_0} f = \ell \text{ ou } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

2 Limites usuelles

$f(x)$ \ $x \to$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(x)$		$-\infty$ (en 0^+)	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$
x^r, $r > 0$	r entier pair : $+\infty$ r entier impair : $-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$		$-\infty$ (en 0^+)	0
$x^\alpha \ln(x)$, $\alpha > 0$		0	$+\infty$
$\dfrac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$	0	$\pm\infty$	$+\infty$
$x^\alpha e^x$, $\alpha > 0$	0	0	$+\infty$

Théorème 1
• Tout polynôme a la même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme de plus haut degré.
• Toute fraction rationnelle a la même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que le rapport de ses monômes de plus haut degré.

3 *Opérations sur les limites*

Dans cette partie b désigne soit un réel soit l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$. (On dit que $b \in \overline{\mathbb{R}}$)

$\lim\limits_b u$	$\lim\limits_b v$	$\lim\limits_b (u+v)$	$\lim\limits_b (uv)$	$\lim\limits_b \left(\frac{u}{v}\right)$
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	$\pm\infty$ RS
0	0	0	0	?
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ RS	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ RS	$\pm\infty$ RS
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	?	$\pm\infty$ RS
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

RS signifie qu'il faut déterminer le signe du résultat grâce à la règle des signes de la multiplication.

Les cases où il y a un ? sont les cases où on ne peut pas donner de résultat général. On appelle ce genre de limite des formes indéterminées. C'est au cas par cas qu'il faut trouver la bonne méthode pour arriver à calculer la limite. (cf. exercices)

Propriété 1
Soient b, b', b'' trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions telles que f est définie au voisinage de b et g est définie au voisinage de b'. Alors :

$$\lim_{x\to b} f(x) = b' \ ; \ \lim_{x\to b'} g(x) = b'' \Rightarrow \lim_{x\to b} g\circ f(x) = b''$$

4 *Propriétés*

Propriété 2
Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble $\mathcal{D}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et on suppose que f et g ont des limites finies en x_0. Si $f \leqslant g$ au voisinage de x_0 alors $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$.

Théorème 2
Soient f, g, et h trois fonctions définies sur le même ensemble $\mathcal{D}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f et h admettent la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 et que au voisinage de x_0 on a $f \leqslant g \leqslant h$. Alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

Le théorème précédent est souvent appelé *théorème des gendarmes.*

Propriété 3
Soit f une fonction croissante (resp. décroissante) sur $[a; b[$ avec $a < b \leqslant +\infty$.
• Si f est majorée par M (resp. minorée par m) sur $[a; b[$ alors f admet une limite finie ℓ en b et $\ell \leqslant M$ (resp. $\ell \geqslant m$)
• Sinon $\lim\limits_{b} f = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{b} f = -\infty$)

5 *Branches infinies*

a Asymptotes horizontales et verticales :

• ($x_0 \in \mathbb{R}$) Si $\lim\limits_{x_0} f = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote** de la courbe représentative de f.

• Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = b \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote** de la courbe représentative de f.

b Cas où $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$

Méthode générale :

• **Étape 1 :** Vérifier que $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$.

• **Étape 2 :** Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction (Ox). L'étude de la branche infinie est alors terminée.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction (Oy). L'étude de la branche infinie est alors terminée.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ il faut passer à l'étape 2.

• **Étape 3 :** Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$

- si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote** de la courbe représentative de f.
- si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ alors la courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction la droite d'équation $y = ax$.

Exemple 1:

Étudions la branche infinie en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{xe^x + 1}{e^x + 1}$

• **Étape 1 :** $\lim\limits_{+\infty} f$?

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x(1 + 1/(xe^x))}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} x \times \frac{1 + e^{-x}/x}{1 + e^{-x}} = +\infty.$$

• **Étape 2 :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

D'après les calculs précédents $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + e^{-x}/x}{1 + e^{-x}} = 1$

• **Étape 3 :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1 \times x$

On a $f(x) - x = \dfrac{xe^x + 1 - x(e^x + 1)}{e^x + 1} = \dfrac{1 - x}{e^x - 1} = \dfrac{x(1/x - 1)}{e^x(1 + e^{-x})} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1/x - 1}{1 + e^{-x}}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$

• **Conclusion :** La courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x$.

III Continuité

1 Définition

Définition 2
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est continue en $x_0 \in I$ ssi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- On dit que f est continue sur I ssi f est continue en tout point de I.

Notation :
On note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I.

Exemple 2:
Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. La fonction f est-elle continue en 0 ?

On remarque tout d'abord que $f(0) = 0$ et que la fonction f est définie de deux façons différentes autour de 0. On ne peut pas calculer tout simplement $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ mais il faut faut distinguer limite à droite et limite à gauche.

D'une part, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ *par composition de limite.*

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, *et on peut donc conclure que f est continue en 0.*

Attention : si f est continue sur $[a;b]$ et est aussi continue sur $[b;c]$ alors f **n'est pas forcément continue sur** $[a;c]$. Dans la plupart de vos exercices, la continuité sera évidente presque partout mais il y aura presque toujours au moins un point qui posera problème.

Propriété 4
Si f est une fonction non définie en x_0 et mais possédant une limite finie ℓ en x_0 alors on peut définir la fonction g par $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{D}_f$ et $g(x_0) = \ell$ et cette fonction est continue sur $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$.
La fonction g est appelée le **prolongement par continuité** de f à $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$.

Remarque :
Souvent on continuera à noter f le prolongement par continuité de f.

2 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 3
Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I. Alors :
– Les fonctions $f + g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, et fg sont continues sur I.
– Si de plus g ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Théorème 4
Soient $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in \mathcal{C}(J)$. Si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 3:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Étudier la continuité de f.

Grâce aux opérations sur les fonction continue nous allons rapidement obtenir la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$. Il faudra faire une étude détaillée pour vérifier que f est continue en 0.

• *Les fonctions $x \to x^2+x+1$ et $x \to x^2$ sont continues sur $]0;+\infty[$ et $x \to x^2$ ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$. Donc le quotient de ces deux fonctions est une fonction continue sur $]0;+\infty[$.*

De plus les fonctions $x \to -\dfrac{1}{x}$ et $t \to e^t$ sont continues respectivement sur $]0;+\infty[$ et $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction $x \to e^{-1/x}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

Enfin par produit, on obtient que f est continue sur $]0;+\infty[$.

• *Sur $]-\infty;0[$, f est la fonction nulle qui est une fonction continue. Donc f est continue sur $]-\infty;0[$.*

• *En 0 : tout d'abord on a $f(0)=0$. De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$.*

En 0^+ on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+x+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} = 0$ grâce aux croissances comparées. Donc on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ donc f continue en 0.

• *En conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.*

3 Quelques théorèmes

Théorème 5 : Théorème des valeurs intermédiaires
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ alors pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Un conséquence très intéressante de ce théorème est le théorème suivant :

Théorème 6
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration : Hors programme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, il faut monter que pour tout x et y éléments de $f(I)$, on a $[x,y] \subset f(I)$.
Soit donc x et y deux éléments de $f(I)$, $x < y$. Il existe donc a et b dans I tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $z \in [f(a), f(b)] = [x,y]$ il existe $c \in [a,b] \subset I$ tel que $f(c) = z$, donc $z \in f(I)$. On a donc bien $[x,y] \subset f(I)$ et $f(I)$ est donc bien un intervalle.

$\square$

Théorème 7
Toute fonction continue sur un segment (intervalle fermé borné) est bornée et atteint ses bornes.

Notation :

Pour une fonction continue sur un segment $[a,b]$ on notera $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ le maximum de la fonction f et $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ le minimum de la fonction f.

Voici tout d'abord la version monotone du TVI :

Propriété 5
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$, $a < b$. Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration : Hors programme

Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne déjà l'existence de c. Il reste donc à montrer l'unicité. Comme f est strictement monotone, elle est injective donc nécessairement c est unique.

$\square$

Le théorème suivant est souvent appelé « **théorème de bijection monotone** ».

Théorème 8
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.
De plus la bijection réciproque f^{-1} est continue et monotone sur J, et son sens de variation est le même que celui de f.

Représentation graphique :
Pour obtenir la courbe représentative de la fonction f^{-1} à partir de la courbe représentative de f, il faut effectuer une symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.

Démonstration : Hors programme

• Comme f est strictement monotone, f est injective. De plus comme f est continue, l'image de l'intervalle I est un intervalle $J = f(I)$. f est bien surjective de I sur J donc f réalise bien une bijection de I sur J.
• Montrons que f^{-1} a le même sens de variation que f.
Soit $(y, y') \in J^2$. On a donc $(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \in I^2$ et si on suppose que f est strictement croissante alors on peut affirmer que : si $f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y')$ alors $y \leqslant y'$. La contra-posée de cette affirmation nous donne : si $y > y'$ alors $f^{-1}(y) > f^{-1}(y')$, c'est-à-dire que f^{-1} est strictement croissante aussi. Grâce au même raisonnement, on montre que si f est strictement décroissante alors f^{-1} l'est aussi.
• Montrons maintenant que f^{-1} est continue. On suppose ici que f est strictement croissante, on pourra faire le même raisonnement avec f strictement décroissante.
Soit $y_0 \in J$ et x_0 l'unique élément de I tel que $y_0 = f(x_0)$.
Si x_0 n'est pas une borne de I. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$, on pose $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$, puis $\eta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$. On a alors :

$$|y - y_0| \leqslant \eta \Rightarrow y_1 \leqslant y \leqslant y_2 \Rightarrow x_0 - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant x_0 + \varepsilon$$

car f^{-1} est strictement croissante sur J. Et donc on a bien que f^{-1} est continue en y_0.
Si x_0 est une borne de I on effectue le même raisonnement avec des intervalles du type $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ ou $[x_0 - \varepsilon, x_0]$.
Ainsi f^{-1} est continue sur J.

$\square$

Exemple 4:

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$. Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

Le but est ici d'appliquer le théorème de bijection monotone. Il faut bien faire attention de vérifier toutes les hypothèses.

• *Les fonction $x \to 2x$ et $x \to e^x$ sont continue sur $[0;1]$ donc par produit f est bien continue sur $[0;1]$.*

• *Les fonctions $x \to 2x$ et $x \to e^x$ sont strictement croissante sur $[0;1]$ donc f est strictement croissante sur $[0;1]$. (On peut bien sûr aussi calculer f' pour trouver le sens de variation)*

• *D'après le théorème de bijection monotone f réalise une bijection de $[0;1]$ sur $f([0;1])$. De plus comme f est continue et croissante, $f([0;1]) = [f(0); f(1)] = [0; 2e]$. Donc f réalise une bijection de $[0;1]$ sur $[0; 2e]$.*

Application :

On utilisera souvent ce théorème pour répondre à la question « Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle I. » En effet si on montre que f est bijective de I sur J et si on vérifie que $k \in J$ alors on peut dire que k admet un unique antécédent α et ce α est bien l'unique solution de $f(x) = k$.

Exemple 5:

Montrer que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x}$ admet, sur $]0; +\infty[$, une unique solution α et montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

On remarque tout d'abord que $e^x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow e^x - \dfrac{1}{x} = 0$. On pose alors, pour tout $x > 0$, $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.

- Montrons que f est bijective :

• *f est la différence de deux fonction usuelles toutes deux continues sur $]0; +\infty[$ donc f est continue sur $]0; +\infty[$.*

• *Sur $]0; +\infty[$ les fonctions $x \to e^x$ et $x \to -\dfrac{1}{x}$ sont des fonctions strictement croissantes donc par addition f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.*

• *D'après le théorème de bijection monotone, f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $f(]0; +\infty[)$.*

Or $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrons maintenant l'existence de α :

Comme $0 \in \mathbb{R}$, 0 admet un unique antécédent par la fonction f dans $]0; +\infty[$ ce qui signifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]0; +\infty[$.

- Encadrons alors α :

On a $f(1/2) = e^{1/2} - 2$ et $f(1) = e - 1$. Or $1 < e < 2$ donc $f(1) > 0$ et $f(1/2) < 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
&f(1/2) < 0 < f(1) \\
\Leftrightarrow\ &f^{-1}(f(1/2)) < f^{-1}(0) < f^{-1}(f(1)) \text{ car } f^{-1} \text{ est strictement croissante} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2} < \alpha < 1
\end{aligned}$$

On a bien $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

IV Dérivabilité

1 Définition

> **Définition 3**
>
> Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que la fonction f est **dérivable en** x_0 ssi la fonction $x \to \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite finie en x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Remarques :

– Pour pouvoir définir la dérivée en x_0 de f, il faut donc que $x \to \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ soit définie au voisinage de x_0 et donc que f soit définie au voisinage de x_0.

– f est dérivable en x_0 équivaut aussi à dire que $h \to \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Exemple 6:

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

On a ici $f(0) = 0$, donc, pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^{-1/x^2}}{x}$.

Grâce aux croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} e^{-1/x^2} = 0$.

Donc f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

Définition 4

On dit qu'une fonction f est **dérivable sur l'intervalle** I ssi elle est définie sur I et si elle est dérivable en tout $x_0 \in I$. On appelle alors **fonction dérivée de** f, et on note f', la fonction qui à tout x_0 de I associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Théorème 9

Si une fonction f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie : la fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

2 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 5

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est **dérivable à gauche en** x_0 (resp. **dérivable à droite en** x_0) si la fonction $x \to \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à gauche en x_0 (resp. une limite à droite en x_0). Cela équivaut aussi à dire que la restriction de f à $]-\infty; x_0]$ (resp. à $[x_0; +\infty[$) est dérivable en x_0.

On note $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ les dérivées à gauche et à droite en x_0.

Exemple 7:

La fonction $x \to |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

Propriété 6

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}$ tel qu'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans $\mathcal{D}$. Alors f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple 8:

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. f est-elle dérivable en 0 ?

On a ici $f(0) = 0$. Comme f n'est pas définie de la même façon à droite et à gauche de 0 il faut ici se servir de la proposition ci dessus et donc on va s'intéresser à la dérivabilité à droite puis à gauche.

- *Si $x < 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.*

• *Si* $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\ln x$. *Or on sait que* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ *donc* f *est dérivable à droite en 0 et on a* $f'_d(0) = 0$

• *On a donc que* f *est dérivable à droite et à gauche et* $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ *donc (grâce à la proposition ci dessus)* f *est dérivable en 0 et* $f'(0) = 0$.

3 Opérations sur les dérivées

Théorème 10
Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et dérivables sur cet intervalle. Alors :
– $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f'+g'$
– pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$
– fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$
– si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Théorème 11
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Remarque :
Pour montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle donné, la rédaction suit donc le même schéma que la continuité.

Théorème 12
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective de l'intervalle I sur l'intervalle J et f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Remarque :
On voit ici que f' et $(f^{-1})'$ ont donc le même signe.

4 Dérivées usuelles

- Dérivée des fonctions usuelles :

I	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ si $n < 0$	$(n \in \mathbb{Z})$ x^n	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^{+*}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}^{+*}$	$(\alpha \in \mathbb{R})$ x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$(a > 0)$ a^x	$\ln a \times a^x$

- Composée de fonctions : Soit u une fonction dérivable sur un ensemble $\mathcal{D}$.
Alors pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a : (Attention aux endroits où u s'annule si nécessaire...)

$f(x)$	$f'(x)$
$(u(x))^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha u'(x) \times (u(x))^{\alpha-1}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$

5 *Dérivées et sens de variation*

Théorème 13
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
- la fonction f est croissante sur I ssi $f' \geqslant 0$ sur I.
- la fonction f est décroissante sur I ssi $f' \leqslant 0$ sur I.
- la fonction f est constante sur I ssi $f' = 0$ sur I.

Propriété 7
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I ssi $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et il n'existe aucun intervalle non réduit à un point tel que $f' = 0$ sur cet intervalle.

6 *Tangente*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.

Théorème 14
Soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors $\mathcal{C}$ possède une tangente au point d'abscisse x_0 et cette tangente a pour équation :
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Remarque :
Pour connaitre la position de la courbe par rapport à sa tangente, il faut étudier le signe de $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$. Si cette expression est positive, la courbe est au dessus de la tangente, sinon elle est en dessous.

Exemple 9:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Calculer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'abscisse 0 et étudier la position de la courbe par rapport à la tangente.

f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

- *On a donc $f(0)=0$ et $f'(0)=1$ et donc l'équation de T est $y=x$.*
- *Calculons $f(x)-x$: $f(x)-x=\dfrac{x}{x^2+x+1}-x=\dfrac{x-(x^3+x^2+x)}{x^2+x+1}=\dfrac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$*

Donc on peut en déduire que pour $x \leqslant -1$, la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la tangente T et que pour $x > -1$ la courbe est en dessous de la tangente.

7 Extremum local

Propriété 8
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$ qui n'est pas une borne de I. Si $f'(x_0)=0$ et si f' change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0.

Remarque :
L'hypothèse de changement de signe de la dérivée est très important : par exemple $x \to x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 mais ne possède pas d'extremum local en 0.

Théorème 15
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ tel que x_0 n'est pas une borne de I. Si f possède un extremum local en x_0 alors $f'(x_0)=0$

Démonstration : Hors programme

Supposons que f possède un maximum local en x_0. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \subset I$ et sur cet intervalle $f(x) \leqslant f(x_0)$.
On a donc $\forall x \in [x_0-\alpha, x_0[$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ et donc $f'_g(x_0) \geqslant 0$.
De même $\forall x \in]x_0, x_0+\alpha]$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ et donc $f'_d(x_0) \leqslant 0$.
Or comme f est dérivable en x_0, $f'_g(x_0)=f'_d(x_0)=f'(x_0)$ donc $f'(x_0)=0$.

□

Remarque :
Aux extrémités de I, f peut posséder un extremum local sans que f' s'annule : sur $[0;1]$ la fonction $x \to x$ admet un maximum en 1 mais $f'(x)=1 \neq 0$.

8 Inégalité des accroissements finis

Théorème 16 : Inégalité des accroissements finis
Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
- S'il existe m et M deux réels tels que $\forall x \in]a;b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors

$$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$$

- S'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a;b[$, $|f'(x)| \leqslant K$ alors

$$|f(b)-f(a)| \leqslant K|b-a|$$

On utilisera principalement cette inégalité dans l'étude des suites récurrentes.

Théorème 17
Soient I un intervalle et $a \in I$. Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite finie ℓ en a, alors f est dérivable sur I et $f'(a) = \ell$.

Exemple 10:

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

• *les fonctions $x \to \frac{1}{x}$ et $x \to e^x$ sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et sur $\mathbb{R}$ donc par composition et produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)e^{-1/x}$.*
• *On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.*
• *Grâce aux croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0^+, x\neq 0} f'(x) = 0$.*
• *D'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(0) = 0$.*

Remarque :
On aurait aussi pu ici appliquer tout simplement la définition de la dérivée en un point. Laissez-vous guider par l'exercice pour savoir quelle méthode adopter...

V Dérivées d'ordre supérieur

1 Définitions

Définition 6
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.
• On dit que f est deux fois dérivable sur I ssi f est dérivable sur I et f' est dérivable sur I. La dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f et est notée f''.
• Pour $n \geqslant 1$, on dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable et si $f^{(n-1)}$ est dérivable. La dérivée de $f^{(n-1)}$ est appelée la dérivée $n-$ième de f et est notée $f^{(n)}$.
• Convention : on pose $f^{(0)} = f$.

Définition 7
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Remarque :
$\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I et $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue.

Définition 8
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exemple 11:
Les fonctions polynômes et la fonction exponentielle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.
La fonction $x \to \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2 Opérations sur les dérivées d'ordre supérieur

Propriété 9
Soit I un intervalle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^n(I)$ est un espace vectoriel et $\mathcal{C}^\infty(I)$ est aussi un espace vectoriel

Propriété 10
Soient f et g deux fonctions dérivables n fois sur un intervalle I. Alors fg est dérivable n fois sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \textbf{formule de Leibniz}$$

Propriété 11
Le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Propriété 12
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I qui ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Propriété 13
Soient I et J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

3 Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 18
Soient I un intervalle et $a \in I$. Si f est continue sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite finie ℓ en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Exemple 12:

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

• **Étape 1 :** Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $]-\infty; 0[$, car la fonction nulle est continue sur cet intervalle. f est continue sur $]0; +\infty[$ par produit des fonctions $x \to x^2$ et $x \to \ln x$ qui sont continues sur cet intervalle.

De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0.

f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

• **Étape 2 :** Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction nulle est de classe $\mathcal{C}^1$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et pour $x < 0$, $f'(x) = 0$.

Les fonctions $x \to x^2$ et $x \to \ln x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ donc par produit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. De plus pour $x > 0$, $f'(x) = x + 2x \ln x$.

f est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \begin{cases} x + 2x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

• **Étape 3 :** Calculons $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

D'après les calculs précédents, on a $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$. On a donc trouvé une limite finie en 0.

• **Étape 4 :** Conclusion
D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

VI Convexité

1 Définition

Définition 9
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
• On dit que la fonction f est **convexe** sur I ssi la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes en tout point de I.
• On dit que la fonction f est **concave** sur I ssi la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes en tout point de I.

Remarque :
On utilise rarement la définition pour montrer qu'une fonction est concave ou convexe. On utilisera plutôt la caractérisation par les dérivées puis on utilise le fait que la courbe est au-dessus ou en-dessous de ses tangentes.

Définition 10
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $x_0 \in I$. On dit que le point $M(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ ssi la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 traverse la courbe.

2 Convexité et dérivées

Propriété 14
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
• f est convexe sur I ssi f' est une fonction croissante sur I.
• f est concave sur I ssi f' est une fonction décroissante sur I.

Propriété 15
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
• f est convexe sur I ssi $f'' \geqslant 0$ sur I.
• f est concave sur I ssi $f'' \leqslant 0$ sur I.

Propriété 16
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $x_0 \in I$. Le point $M(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0.

Remarque :
En pratique on utilisera les propriétés 15 et 16 pour étudier la convexité d'une fonction et chercher ses points d'inflexion d'une fonction. Les définitions serviront surtout à donner une interprétation graphique.

3 Applications

– Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.
On pose $f(x) = e^x$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = e^x > 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. Par définition la courbe de f est donc située au dessus de ses tangentes.
Or l'équation de la tangent en 0 est $y = f'(0)x + f(0) = x + 1$ donc on peut dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.

- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln x \leqslant x - 1$.
  On pose $g(x) = \ln x$. *g est une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]0; +\infty[$ *et* $g''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. *g est donc une fonction concave sur* $]0; \infty[$. *Par définition la courbe de g est donc située en dessous de ses tangentes. Or l'équation de la tangente en 1 est* $y = g'(1)(x-1) + g(1) = x - 1$ *donc on a pour tout* $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.