



Faculté de Sciences et Techniques

Exercice 0.1 On choisie au hasard un nombre N de lancé d'une pièce de monnaie dont la probabilité d'ammener pile est $p \in (0, 1)$. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre pile obtenue, Y le nombre de face et on suppose que N suit une loi de Poisson de parametre λ .

- 1) Déterminer la loi du couple (X, N) .
- 2) Déterminer la loi de X et Y .
- 3) Montrer que X et Y sont independant.

Exercice 0.2 Soit A et B deux variable aleatoire independant de loi uniforme $\mu([0, 1])$. Trouver la probabilité que le polynôme $t^2 - 2At + B$ ait

1. Deux racines distainctes
2. Deux racines complexes non réel
3. Une racine double

Exercice 0.3 Soit l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On considère un couple de variable aléatoire (X, Y) à valeur dans \mathbb{R}^2 dont la loi conjoint $P_{(X, Y)}$ admet la densité

$$f(X, Y) = \alpha (1 - x^2) \chi_{[0, 1]}(x) y e^{-3y} \chi_{[0, +\infty[}(y), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de α .
2. Déterminer la loi marginal du couple (X, Y) .
3. Calculer $P(0 \leq X \leq 2, Y \geq 1)$.
4. Calculer la matrice de dispersion de (X, Y) .

Exercice 0.4 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires independantes et de même densité (i.i.d)

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1, +\infty[}(x)$$

On Pose $U = X_1 X_2$ et $V = \frac{X_1}{X_2}$

1. Dertermine la loi du couple (U, V)
2. Dertermine les lois margineaux de U et V

3. étudier l'indépendance éventuelle de U et V

4. calculer $E\left(\frac{1}{V\sqrt{U}}\right)$

Exercice 0.5 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Cauchy.

$$X : \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad Y : \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Déterminer l'espérance de XY .

Exercice 0.6 Trois variables aléatoires X, Y et Z définies sur le même univers Ω ont la densité conjointe $f(s, y, z) = cxyz$, $0 < X, Y, Z < 1$. Déterminer la valeur de c et calculer la probabilité de l'événement $\{X < Y < Z\}$.

Exercice 0.7 La loi conjointe $f(x, y)$ de deux variables aléatoires X et Y est uniforme dans le cercle (de \mathbb{R}^2) : $X^2 + Y^2 \leq 1$. Trouver les lois marginales de X et Y et déterminer si X et Y sont indépendantes.

Exercice 0.8 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi :

— X : loi normale de densité $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

— Y loi non continue $\sum_{n=1}^N P_n \delta_{y_n}$

Calculer la loi de $Z = X + Y$ et montrer que c'est une variable aléatoire à densité.

Exercice 0.9 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale

$\mathcal{N}(0, 1)$, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$. Déterminer la loi du couple $(X, X + Y)$.