Université de la Méditerranée
UFR des Sciences de Luminy

Licence Sciences & Technologies, Mentions M-I et SPC
UE MAT53 – Année L1, Semestre 2

<u>Mathématiques pour la Physique 1</u>

Session de mai 2005 – Durée : **3 HEURES**

NI DOCUMENT, NI CALCULATRICE AUTORISÉS, NI TELEPHONE

Gardez votre calme, lisez soigneusement chaque énoncé et concentrez-vous.
Réfléchissez bien à ce qui vous est demandé. Ne restez pas bloqué(e) plus d'un quart d'heure sur le même exercice. Changez !
Écrivez lisiblement, la note en tiendra compte, tout comme de la clarté de raisonnement. Relisez-vous. Bonne chance !

<u>Exercice</u> 1. QUESTION DE COURS.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, quelles sont les deux identités vectorielles classiques contenues dans la propriété importante $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = \mathrm{d}^2 = 0$ de la dérivée extérieure d.

Fig. 1 – La spirale d'Archimède.

<u>Exercice</u> **2.** AIRE D'UN DOMAINE PLAN & SPIRALE D'ARCHIMEDE

On rappelle que l'aire A d'un domaine K du plan orienté $\mathbb{R}^2$ peut se calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann,

$$A = \int_{\partial K} \omega \qquad \text{avec} \quad \omega = \tfrac{1}{2}(x \ \mathrm{d}y - y \ \mathrm{d}x).$$

1. Donner la dimension de ∂K et le degré de la forme ω.
2. Donner l'expression de ω, en coordonnées polaires (r, θ).
3. On considère la courbe fermée dans $\mathbb{R}^2$, γ, formée de la spirale d'Archimède et du segment $[0, 2\pi a] \cup \{0\}$, avec $a > 0$ un nombre réel fixé, (voir figure Fig.2 ci-contre). La spirale d'Archimède est définie en coordonnées <u>polaires</u> par l'équation

$$r = a\,\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad a > 0.$$

   Reporter l'allure de la courbe γ sur votre feuille et orienter γ (spirale et segment).
4. Déduire de la question 2 l'image réciproque $\gamma^*(\omega)$.
5. Calculer l'aire $A = \displaystyle\int_\gamma \omega$ du domaine K délimité par la courbe $\gamma = \partial K$ à partir de la formule de Green-Riemann.

Tourner SVP $^{\cdots}$**/...**

Exercice 3. DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE

On se donne comme courbe fermée γ dans l'espace $\mathbb{R}^3$, le cercle d'équations cartésiennes

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad z = 1,$$

et on considère la fonction scalaire

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz.$$

1. Donner l'expression en coordonnées polaires du déplacement $\mathrm{d}\vec{x}$ le long du cercle γ dans la base $(\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi)$ des coordonnées polaires.
2. Dans le plan $z = 1$, dessiner le cercle γ et placer le vecteur tangent unitaire $\hat{e}_\varphi$, aux points définis respectivement par les vecteurs $\vec{a} = (1, 0, 1)$ et $\vec{b} = (0, 1, 1)$.
3. Donner le domaine de définition de f et calculer la différentielle $\mathrm{d}f$.
   Préciser le degré de cette forme différentielle.
4. En déduire $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$.
5. Calculer le gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(\vec{a})$ au point $\vec{a}$. Qu'indique le vecteur gradient ?
6. En déduire la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_{\hat{e}_\varphi} f(\vec{a})$ le long du cercle γ au point $\vec{a}$.
7. Calculer le gradient au point $\vec{b}$. Qu'indique le vecteur gradient ?
8. En déduire la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_{\hat{e}_\varphi} f(\vec{b})$ le long du cercle γ au point $\vec{b}$.
9. Calculer l'image réciproque $\gamma^*(\mathrm{d}f)$ sur le cercle γ paramétré en coordonnées polaires.
10. Calculer $\gamma^*(\mathrm{d}f)$ aux points $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
    Y-a-t-il un lien avec les dérivées directionnelles ?

<u>Exercice</u> **4.** VOLUME D'UN PARABOLOÏDE

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le solide K délimité par la surface du paraboloïde renversé d'équation

$$z = f(x,y) = h\Big(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\Big), \text{ avec } R > 0,\ h > 0,$$

et de base le disque $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z = 0\}$.

On rappelle que les coordonnées cylindriques, (ρ, φ, z), adaptées à la géométrie de ce solide, sont définies par,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{coordonnées}\\ \text{cylindriques}\end{array}} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}.$$

1. Esquisser ce solide K et préciser les différentes surfaces formant son bord ∂K.
2. Déterminer le domaine Δ des coordonnées cylindriques servant à paramétrer le paraboloïde.
3. Calculer directement le volume de ce solide avec l'intégrale double $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
   Expliquer pourquoi le calcul de cette intégrale double donne son volume.
4. Soit la 2-forme, $\omega = \dfrac{x}{3}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \dfrac{y}{3}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \dfrac{z}{3}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.
   Quel est le domaine de définition de ω ?
   Identifier le champ vectoriel $\vec{A}$ associé à ω.
5. Donner son image réciproque sur le domaine de paramétrage Δ.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\partial K} \omega$.
   Que représente cette intégrale pour le champ vectoriel $\vec{A}$?
7. Calculer $\mathrm{d}\omega$ tout en précisant le degré de cette forme.
   Quel est le lien avec le champ vectoriel $\vec{A}$?
8. Par application de la formule de Stokes, en déduire le volume du solide K.
   (Vérifier que vous trouvez bien la même expression que celle obtenue en question 3).

Mathématiques pour la Physique 1

Session de rattrapage juin 2005 – Durée : **3 HEURES**

NI DOCUMENT, NI CALCULATRICE AUTORISÉS, NI TELEPHONE

Gardez votre calme, lisez soigneusement chaque énoncé et concentrez-vous.
Réfléchissez bien à ce qui vous est demandé. Ne restez pas bloqué(e) plus d'un quart d'heure sur le même exercice. Changez !
Écrivez lisiblement, la note en tiendra compte, tout comme de la clarté de raisonnement. Relisez-vous. Bonne chance !

Exercice 1. QUESTION DE COURS.

Dans la formule du théorème de Stokes,

$$\int_K \mathrm{d}\omega \;=\; \int_{\partial K} \omega \;,$$

préciser le lien entre la dimension du domaine d'intégration K de $\mathbb{R}^3$ et le degré de la forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$.

On prendra soin de distinguer les trois cas envisageables pour le choix de la dimension du domaine K dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. INTEGRALE TRIPLE

a. Esquisser le volume $\mathcal{V}$ défini par

$$\mathcal{V} \;=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

b. On se donne la fonction scalaire $f(x,y,z) \;=\; 3x^2y + 2y\sin z$.

Calculer l'intégrale triple $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dxdydz$.

Exercice 3. INTEGRALE TRIPLE

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté muni des coordonnées cartésiennes, (x, y, z), on considère la surface S du cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ et la 2-forme différentielle,

$$\omega \;=\; x^2 y \; \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 3y^2 \; \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - 2xz^2 \; \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \; .$$

1. Identifier le champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{\mathrm{x}})$ representé par ω.

2. Calculer $\mathrm{d}\omega$, tout en précisant son degré.

3. Que représente le calcul de $\mathrm{d}\omega$?

4. En appliquant le théorème de Stokes à ce cas particulier,

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \mathrm{d}\omega = \int_S \omega \; ,$$

calculer le flux du champ $\vec{V}$ à travers la surface S du cube.

Exercice 4. COORDONNÉES POLAIRES

En passant aux coordonnées polaires, calculez

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Esquisser le domaine d'intégration pour pouvoir le paramétrer en coordonnées polaires.

Tourner SVP …/…

<u>Exercice</u> 5. INTÉGRALES DOUBLES ET CHANGEMENT DE VARIABLES

Dans le plan orienté $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère $(\mathcal{O}, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$, on considère le domaine plan, K, coincé entre les quatre droites d'équations respectives,

$$x - y = 0, \quad x - y = 1, \quad x + y = 1, \text{ et } \quad x + y = 3.$$

1. Tracer les quatre droites dans le repère $(\mathcal{O}, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$, achurer le domaine K tout en déterminant ses sommets, et donner son nom.

   On se propose tout d'abord de calculer de deux façons différentes l'aire A du domaine plan K.

2. Calculer directement l'aire A à l'aide d'un déterminant d'ordre 2.

3. L'aire A se calcule aussi comme l'intégrale double, $A = \displaystyle\int_K dxdy$.
   En effectuant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$,
   dessiner le domaine Δ des variables (u, v) servant à paramétrer le domaine K.

4. Donner une définition du domaine Δ en le décrivant par des inégalités sur u et v.

   A quelle figure géométrique correspond le domaine Δ et que vaut son aire ?

5. Déterminer l'expression de x et de y en fonction des variables u et v, et calculer le Jacobien du changement de variables.

6. En déduire, après changement de variables, la valeur de A comme intégrale double. (Vérifier que les deux valeurs de A coincident !)

Université de la Méditerranée
UFR des Sciences de Luminy

Licence Sciences & Technologies, Mentions M-I et SPC
UE MAT53 – Année L1, Semestre 2

MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE 1

Session de mai 2006 – Durée : **3 HEURES**

NI DOCUMENT, NI CALCULATRICE AUTORISÉS, NI TELEPHONE

Gardez votre calme, lisez soigneusement chaque énoncé et concentrez-vous.
Réfléchissez bien à ce qui vous est demandé. Ne restez pas bloqué(e) plus d'un quart d'heure sur le même exercice. Changez !
Écrivez lisiblement, la note en tiendra compte, tout comme de la clarté de raisonnement. Relisez-vous. Bonne chance !

EXERCICE 1. QUESTION DE COURS.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, quelles sont les deux identités vectorielles classiques contenues dans la propriété importante $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = \mathrm{d}^2 = 0$ de la dérivée extérieure d.

FIG. 2 – La cissoïde de Dioclès.

EXERCICE 2. AIRE D'UN DOMAINE PLAN & CISSOÏDE DE DIOCLÈS

On rappelle que l'aire A d'un domaine K du plan orienté $\mathbb{R}^2$ peut se calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann,

$$A = \int_{\partial K} \omega \qquad \text{avec} \quad \omega = \tfrac{1}{2}(x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x).$$

1. Donner la dimension de ∂K et le degré de la forme ω.
2. Donner l'expression de ω, en coordonnées polaires (r, θ).
3. On considère dans $\mathbb{R}^2$, la surface plane K comprise entre les deux branches de la cissoïde de Dioclès définie en coordonnées polaires par l'équation

   $$OM = r = 2R \sin\theta \tan\theta, \qquad |\theta| < \frac{\pi}{2}, \qquad R > 0,$$

   et la droite $x = R$ (voir figure Fig.2 ci-contre).

   Écrire l'équation polaire de la droite $x = R$, et préciser le domaine de variation de l'angle θ.
4. Reporter sur votre feuille l'allure de la courbe fermée, $\gamma = \partial K$, et indiquer son orientation sur chacun des morceaux qui la composent. Déterminer la valeur de θ correspondant à chacun des trois sommets de la courbe γ.
5. Déduire de la question 2 l'image réciproque, $\gamma^*(\omega)$, de ω sur, respectivement, la cissoïde et la droite $x = R$.
6. Calculer l'aire $A = \displaystyle\int_\gamma \omega$ du domaine K délimité par la courbe $\gamma = \partial K$ à partir de la formule de Green-Riemann.

   [Prendre bien garde à l'orientation de la courbe pour déterminer les bornes d'intégration en θ sur chacune des portions de γ, cf question 4.]

   Quelques identités utiles : $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$, $\tan a = \sin a / \cos a$, $\tan' a = 1 + \tan^2 a = 1/\cos^2 a$.

Tourner SVP $\cdots$/...

<u>Exercice</u> **3.** INTÉGRAL CURVILIGNE SUR UNE HIPPOPÈDE

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on se donne la 1-forme

$$\omega = \frac{1}{r}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

1. Quel est le domaine de définition de ω ?
2. Identifier le champ vectoriel $\vec{V}$ associé à ω.
3. Calculer $\mathrm{d}\omega$ tout en précisant le degré de cette forme.
4. Que dire de ω et que conclure sur le champ vectoriel $\vec{V}$?
5. Trouver une primitive f de ω, de sorte que $\omega = \mathrm{d}f$.
6. Soit l'hippopède γ, courbe définie par

$$\begin{aligned}\gamma : \quad & [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\\ & t \mapsto \gamma(t) = (R\sin t\cos t, R\sin^2 t, R\cos t), \qquad R > 0.\end{aligned}$$

   Déterminer les points $\gamma(0)$ et $\gamma(\pi)$.
7. Calculer la distance à l'origine des points de γ.

   Sur quelle surface se trouve la courbe γ ?
8. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

   On pourra, tout en le justifiant, utiliser la formule de Stokes pour un calcul nettement plus rapide.

Exercice 4. Intégrale triple et changement de variables

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on souhaite calculer le volume du solide défini par

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\ell} \right\},$$

où $\ell > 0$ possède la dimension d'une longueur (voir Fig.3 ci-dessous).

1. On note (u, v) les variables servant à paramétrer la base $\mathcal{B}$ de Ω située dans le plan $z = 0$ (voir Fig.3 ci-dessous).
   Calculer l'aire, $\displaystyle\int_{\mathcal{B}} dudv$, de la base $\mathcal{B} = \left\{ (u, v) \in [0, \ell] \times [0, \ell] \mid \sqrt{u} + \sqrt{v} \leq \sqrt{\ell} \right\}$.
2. Le solide Ω peut être vu comme un empilement continu de surfaces planes, toutes homothétiques à la base $\mathcal{B}$. Il s'agit à présent de déterminer le rapport λ de l'homothétie faisant passer de $\mathcal{B}$ à une section transverse de cote z, avec $0 \leq z \leq \ell$ (voir Fig.3 ci-dessous).
   Pour z fixé, $0 \leq z \leq \ell$, on pose $x = \lambda\, u$, et $y = \lambda\, v$. Déterminer $\lambda \geq 0$ en fonction de z et de ℓ, sachant que $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\ell}$, et que $\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq \sqrt{\ell}$.
3. Calculer le Jacobien du changement de variables,
   $$\mathcal{B} \times [0, \ell] \longrightarrow \Omega, \qquad (u, v, z) \mapsto (x, y, z) = (\lambda u, \lambda v, z).$$
4. Calculer le volume $V = \displaystyle\int_{\Omega} dxdydz$, du solide Ω, en ramenant le calcul, par changement de variables, à celui d'une intégrale triple sur les variables (u, v, z).

Fig. 3 – Le solide Ω et diverses sections transverses.

Mathématiques pour la Physique 1

Examen de rattrapage, 26 juin 2006 – Durée : **3 HEURES**

NI DOCUMENT, NI CALCULATRICE AUTORISÉS, NI TELEPHONE

Gardez votre calme, lisez soigneusement chaque énoncé et concentrez-vous.
Réfléchissez bien à ce qui vous est demandé. Ne restez pas bloqué(e) plus d'un quart d'heure sur le même exercice. Changez !
Écrivez lisiblement, la note en tiendra compte, tout comme de la clarté de raisonnement. Relisez-vous. Bonne chance !

Exercice 1. QUESTION DE COURS.

Dans la formule générale du théorème de Stokes, écrite sur l'espace $\mathbb{R}^3$,

$$\int_K \mathrm{d}\omega = \int_{\partial K} \omega \ ,$$

préciser le lien entre la dimension du domaine d'intégration K de $\mathbb{R}^3$ et le degré de la forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$.

On prendra soin de distinguer les trois cas envisageables pour le choix de la dimension du domaine d'intégration K de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. INTEGRALE DOUBLE

a. Dessiner l'allure du domaine K du plan $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\} .$$

b. On se donne la fonction scalaire $f(x, y) = xy$.

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_K f(x, y)\, dxdy$.

Exercice 3. INTEGRALE CURVILIGNE ET FORMULE DE STOKES

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté muni des coordonnées cartésiennes, (x, y, z), on considère la 1-forme différentielle,

$$\omega \;=\; x^2 z \;\mathrm{d}x + 3y^2 \;\mathrm{d}y - xz^2 \;\mathrm{d}z \;.$$

1. Identifier le champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{\mathrm{x}})$ representé par ω.

2. Calculer $\mathrm{d}\omega$, tout en précisant son degré.

3. Que représente le calcul de $\mathrm{d}\omega$?

4. On considère le cercle défini par

   $$\gamma = \{(x, y, z)/\ x = R\cos t,\ y = 2,\ z = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi],\ R > 0\}.$$

   Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \omega$, en appliquant la formule de Stokes (calcul nettement plus rapide), tout en justifiant la démarche.

Exercice 4. COORDONNÉES POLAIRES

En passant aux coordonnées polaires, calculez

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Esquisser le domaine d'intégration afin de le paramétrer en coordonnées polaires.

Tourner SVP $^{\cdots}$**/...**

<u>Exercice</u> 5. INTÉGRALE TRIPLE ET CHANGEMENT DE VARIABLES

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on se propose de calculer le volume du tétraèdre $\mathcal{T}$ défini par

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in [0, \ell] \times [0, \ell] \times [0, \ell] \text{ avec } 0 \leq x + y + z \leq \ell\},$$

où $\ell > 0$ possède la dimension d'une longueur.

1. Sur un même dessin, représenter l'allure de ce tétraèdre $\mathcal{T}$ ainsi que celle de sa base $\mathcal{B}$ située dans le plan $z = 0$.

2. Afin de les distinguer, on note (u, v) les variables servant à paramétrer la base $\mathcal{B}$.

   Calculer l'aire, $\displaystyle\int_{\mathcal{B}} dudv$, de la base $\mathcal{B} = \{(u, v) \in [0, \ell] \times [0, \ell] \mid 0 \leq u + v \leq \ell\}$.

3. Le tétraèdre peut être vu comme l'empilement continu de triangles semblables au triangle de base $\mathcal{B}$.

   Pour z fixé, $0 \leq z \leq \ell$, on pose $x = \lambda\, u$, et $y = \lambda\, v$. Déterminer en fonction de z et de ℓ, le rapport $\lambda \geq 0$ de l'homothétie faisant passer de $\mathcal{B}$, $(0 \leq u+v \leq \ell)$, à un triangle semblable plus petit, de cote z, et défini par l'inégalité $0 \leq x+y+z \leq \ell$.

4. Calculer le Jacobien du changement de variables,

$$\mathcal{B} \times [0, \ell] \longrightarrow \Omega, \qquad (u, v, z) \mapsto (x, y, z) = (\lambda u, \lambda v, z).$$

5. Calculer le volume $V = \displaystyle\int_{\mathcal{T}} dxdydz$, du solide $\mathcal{T}$, en ramenant le calcul, par changement de variables, à celui d'une intégrale triple sur les variables (u, v, z).