

MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE 1

**Corrigé de l'examen du 2 juin 2004**

---

EXERCICE 1.  $\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} f = 0$  pour  $f$  un champ scalaire et  $\text{div} \vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$  pour  $\vec{V}$  un champ vectoriel.

EXERCICE 2. AIRE D'UN DOMAINE PLAN & LIMAÇON DE PASCAL

- 1.) En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , on a  $\omega = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ .
- 2.) Pas besoin de se préoccuper ici du signe de  $r$ . On obtient directement comme paramétrage possible,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\theta \mapsto \gamma(\theta) = \left( (2 \cos \theta + 1) \cos \theta, (2 \cos \theta + 1) \sin \theta \right)$ , en remplaçant  $r$  par son expression dans la définition des coordonnées polaires.
- 3.)  $y = (2 \cos \theta + 1) \sin \theta = 0$  pour  $\theta \in \left\{ \frac{-2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3} \right\} \subset \left[ \frac{-2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right]$ .
- 4.) Le point initial est  $\gamma\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = (0, 0)$  et la courbe est parcourue (orientation) dans le sens trigonométrique. Les deux boucles ont pour seul point commun l'origine  $\gamma\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \gamma\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \gamma\left(\frac{4\pi}{3}\right) = (0, 0)$ . Ainsi pour  $\gamma_1$  on a  $I_1 = \left[ \frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$ , et pour  $\gamma_2$  on a  $I_2 = \left[ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right]$ .
- 5.) Substituant  $r = 2 \cos \theta + 1$  dans l'expression obtenue en question 1, on a  $\omega = \frac{1}{2} (2 \cos \theta + 1)^2 d\theta$ .
- 6.)  $A_i = \int_{\gamma_i} \omega = \int_{I_i} \frac{1}{2} (2 \cos \theta + 1)^2 d\theta$  pour  $i = 1, 2$ . Avec l'identité trigonométrique

$$(2 \cos \theta + 1)^2 = 4 \cos \theta + 2 \cos 2\theta + 3.$$

Ainsi,

$$A_1 = \int_{\frac{-2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2} (2 \cos \theta + 1)^2 d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (2 \cos \theta + 1)^2 d\theta = \left[ 4 \sin \theta + \sin 2\theta + 3\theta \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$A_2 = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{2} (2 \cos \theta + 1)^2 d\theta = \frac{1}{2} \left[ 4 \sin \theta + \sin 2\theta + 3\theta \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

7.) On a  $A = A_1 - A_2 = \pi + 3\sqrt{3}$  puisqu'il faut ôter au domaine  $K_1$  le domaine  $K_2$  pour obtenir le domaine  $K$ .

8.)  $\partial K = \gamma_1 \cup \bar{\gamma}_2$  où la boucle externe  $\gamma_1$  est parcourue dans le sens trigonométrique alors que la boucle interne  $\bar{\gamma}_2$  est parcourue dans le sens horaire (orientation inverse de  $\gamma_2$ ). Avec un tel choix des orientations sur les deux boucles, le domaine  $K$  reste "à gauche" lorsque l'on parcourt son bord.

EXERCICE 3. DÉRIVATION EXTÉRIEURE ET INTÉGRATION

- 1.)  $\omega$  est définie sur tout  $\mathbb{R}^3$ .
- 2.) On lit directement  $\vec{A}(\vec{x}) = xz^2 \hat{e}_x - \left( \frac{(xy)^2}{2} + yz^2 \right) \hat{e}_y + x^2yz \hat{e}_z$  car  $\omega$  est écrite sous forme canonique.
- 3.) La 3-forme  $d\omega = 0$ .

4.)  $\omega$  est une 2-forme fermée sur tout  $\mathbb{R}^3$  donc elle est exacte. Autrement dit,  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  et  $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{V}$ .

5.)  $\vec{V}(\vec{x}) = xyz^2 \hat{e}_z - z \frac{x^2 y^2}{2} \hat{e}_x$  et la 1-forme  $\alpha$  est définie sur tout  $\mathbb{R}^3$ .

6.) La 2-forme  $d\alpha = \omega$ . Ainsi  $\omega$  est bien une 2-forme exacte et  $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{V}$ .

7.)  $D$  est le disque dans le plan  $z = 1$ , centré sur l'origine et de rayon  $R$ .

$S$  est la sphère centrée sur l'origine et de rayon  $R$ .

8.) Le disque  $D$  a pour bord  $\partial D$  le cercle dans le plan  $z = 1$ , centré sur le point  $(0, 0, 1)$  et de rayon  $R$  (l'axe  $\hat{z}$  est l'axe de symétrie de ce cercle).

Par contre, la sphère  $S$  est le bord de la boule  $\mathcal{B}$  centrée sur l'origine et de rayon  $R$ .

9.) L'image réciproque de  $\omega$  sur le plan d'équation  $z = 1$  vaut  $\omega = x^2 y \, dx \wedge dy$ .

10.)  $\int_D \omega = \int_D x^2 y \, dx \wedge dy$ . La fonction  $x^2 y$  est impaire en  $y$ . Donc l'intégrale en  $y$  sur le disque  $\{x^2 + y^2 \leq R^2\}$  qui est un domaine symétrique sous l'échange de  $y$  en  $-y$  est nulle.

Le calcul direct en coordonnées polaires donne quant à lui

$$\int_D x^2 y \, dx \wedge dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \, r \, dr \, d\theta = \int_0^R r^4 \, dr \left[ \frac{-\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

11.) Par Stokes,  $\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha \stackrel{6.}{=} \int_D \omega \stackrel{10.}{=} 0$ .

12.) Par Stokes,  $\int_S \omega \stackrel{8.}{=} \int_{\mathcal{B}} d\omega \stackrel{3.}{=} 0$ .

Ou encore (conceptuellement plus subtil),  $\int_S \omega \stackrel{6.}{=} \int_S d\alpha \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} \alpha = 0$  puisque  $\partial S = \emptyset$  vu que  $S$  est sans bord.

#### EXERCICE 4. VOLUME D'UNE TOMATE

1.) Le Jacobien est donné par  $r^2 \sin \theta$ .

2.) Le rayon  $r$  est limité par  $R(\cos \theta + 1)$ . Ainsi le domaine des paramètres est

$$\Delta = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R(\cos \theta + 1), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

3.) Le volume se calcule comme intégrale triple emboîtée puis qu'une des bornes sur  $r$  dépende de  $\theta$

$$\begin{aligned} V &= \int_{\Omega} dx dy dz = \int_{\Delta} r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \int_0^{R(\cos \theta + 1)} r^2 \, dr \right) d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{R(\cos \theta + 1)} \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta (\cos \theta + 1)^3 = \frac{-2\pi R^3}{3} \int_0^{\pi} d \left( \frac{(\cos \theta + 1)^4}{4} \right) = \frac{8\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$