

MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE 1

Session de juin 2003 – Durée : **3 HEURES**

AUCUN DOCUMENT ET AUCUNE CALCULATRICE AUTORISÉS

Gardez votre calme, lisez soigneusement chaque énoncé et concentrez-vous.

Réfléchissez bien à ce qui vous est demandé. Ne restez pas bloqué(e) plus d'un quart d'heure sur le même exercice. Changez !

Écrivez lisiblement, la note en tiendra compte, tout comme de la clarté de raisonnement. Relisez-vous. Bonne chance !

EXERCICE 1. QUESTION DE COURS.

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , quelles sont les deux identités vectorielles classiques contenues dans la propriété importante $d \circ d = d^2 = 0$ de la dérivée extérieure d .

EXERCICE 2. AIRE D'UNE BOUCLE ET CHANGEMENT DE VARIABLES

Dans le plan orienté \mathbb{R}^2 , on considère la 1-forme, $\omega = \frac{x}{2} dy - \frac{y}{2} dx$.

1. Donner le domaine définition de ω .
2. Calculer $d\omega$ et préciser son degré.
3. Appliquer la formule de Stokes, $\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega$, au cas présent, en expliquant soigneusement ce que sont K et ∂K (type de domaine et dimension).
Quel est le nom de la formule ainsi obtenue et que calcule-t-elle?

Dans le plan orienté \mathbb{R}^2 , on considère la courbe fermée γ définie en coordonnées cartésiennes par

$$\gamma = \left\{ (x, y) \mid (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2) \right\}, \quad (\text{cardioïde}),$$

où la constante $a > 0$ a la dimension d'une longueur.

On se propose de calculer l'aire A du domaine plan K délimité par cette boucle $\partial K = \gamma$ à l'aide de la formule de Green-Riemann. On opte pour un paramétrage de γ en coordonnées polaires (r, θ) .

4. Donner l'expression de la 1-forme ω , en coordonnées polaires (r, θ) .
5. La courbe γ admet une équation en coordonnées polaires, $r = f(\theta)$. Afin de l'expliciter, remplacer les variables x et y dans l'équation cartésienne de la courbe γ par leur expression en coordonnées polaires.
En se rappelant que $r \geq 0$, résoudre l'équation quadratique en r ainsi obtenue, et en déduire l'équation polaire $r = f(\theta) \geq 0$ de la courbe γ .
6. Calculer l'image réciproque de la 1-forme trouvée en question 4 par le paramétrage en coordonnées polaires $r = f(\theta)$ de γ .
7. Calculer l'aire A du domaine K délimité par la boucle γ à partir de la formule de Green-Riemann établie en question 3.

Identité trigonométrique utile : $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.

Tourner SVP .../...

EXERCICE 3. VOLUME D'UN TONNEAU ET INTEGRALE SIMPLE

Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni du repère orthonormé $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, étant donnée une courbe $y = f(x)$ avec $f(x) \geq 0$, et $x \in I$ pour un certain intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on peut générer un solide, Ω , dans \mathbb{R}^3 , par révolution (rotation de 2π) de cette courbe autour l'axe Ox ,

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x \in I, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

La courbe $y = f(x)$ s'appelle génératrice (ou profil) du solide Ω . Cette symétrie de rotation permet de calculer le volume $|\Omega|$ du solide Ω ainsi engendré, et ce, directement à l'aide d'une intégrale simple seule. En effet :

1. Pour $x \in I$ fixé, que vaut l'aire $A(x)$ d'un disque de normale \hat{e}_x , de centre $(x, 0, 0)$ et de rayon $f(x)$, disque obtenu par révolution autour de l'axe x du segment de droite $[(x, 0, 0), (x, f(x), 0)]$.

2. Ainsi, le solide de révolution Ω résulte donc d'une juxtaposition de tels disques verticaux pour x variant dans I , et son volume $|\Omega|$ est donné comme l'intégrale simple sur I de la fonction $A(x)$, $|\Omega| = \int_I A(x) dx$.

Exprimer le volume $|\Omega|$ en fonction de la génératrice f .

3. En particulier, un tonneau T peut être obtenu à l'aide d'une génératrice parabolique,

$$I = [-h, h], \quad y = f(x) = R - \frac{R-r}{h^2} x^2, \quad R > r > \frac{R}{2} > 0.$$

Esquisser cette courbe dans le plan muni du repère $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$.

Que représentent, respectivement, R , r et h pour la géométrie du tonneau T ?

4. Calculer le volume $|T|$ du tonneau T à l'aide de la question 2.

5. Or dans le Larousse, l'expression donnée est $2\pi h(\frac{1}{3}r + \frac{2}{3}R)^2$, expression qui diffère du calcul exact. Cette différence provient d'une approximation. En effet :

Donner sans justification aucune le volume d'un cylindre de rayon R' et de longueur ℓ .

6. On approxime le tonneau T par un cylindre dont le rayon R' est égal au rayon moyen de T donné par

$$R' = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x) dx.$$

Calculer R' et retrouver l'expression donnée par le Larousse (cf question 5).

EXERCICE 4. THEOREME DE STOKES

Dans l'espace \mathbb{R}^3 orienté muni des coordonnées cartésiennes, $\vec{x} = (x, y, z)$, on considère

$$\omega = \frac{x(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \wedge dz + \frac{y(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy.$$

1. Donner le domaine de définition et le degré de ω .
2. Calculer l'image réciproque de ω sur le plan d'équation $z = c$, pour $c \in \mathbb{R}$.
3. Soient les deux disques de rayon R d'équations respectives

$$D_1 : x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0, \quad \text{et} \quad D_2 : x^2 + y^2 \leq R^2, z = 3.$$

Calculer $\int_{D_1} \omega$ et $\int_{D_2} \omega$.

4. Soit Σ la surface cylindrique d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq 3$.

On rappelle que les coordonnées cylindriques, (ρ, φ, z) , adaptées à la géométrie de la surface Σ , sont définies par,

$$\phi(\rho, \varphi, z) = (x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z), \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Calculer l'image réciproque $\phi^*\omega$, (expression de ω en coordonnées cylindriques).

5. Calculer directement en coordonnées cylindriques $d(\phi^*\omega)$ et préciser son degré.
6. Donner le paramétrage de la surface Σ en coordonnées cylindriques.
7. En déduire l'image réciproque de $\phi^*\omega$ sur Σ .

8. Calculer la valeur de $\int_{\Sigma} \omega$.

9. Soit K le cylindre plein d'équation $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $0 \leq z \leq 3$.

Esquisser K et déterminer son bord ∂K .

10. Donner le paramétrage de K en coordonnées cylindriques.

11. En déduire avec la question 5 la valeur de $\int_K d\omega$.

12. Retrouver la valeur de $\int_{\Sigma} \omega$ en appliquant la formule de Stokes et en utilisant les questions 3 & 9.