Université de la Méditerranée
UFR des Sciences de Luminy

Licence Sciences & Technologies, Mentions M-I et SPC
UE MAT53 – Année L1 2005–06 , Semestre 2

Mathématiques pour la Physique I : TD - I

1. NOTATION DIFFÉRENTIELLE À UNE VARIABLE

1) À partir des règles de différentiation ainsi que des dérivées de l'exponentielle, du cosinus, et du sinus, retrouver les dérivées des fonctions x^2, $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\tan x$, $\arctan x$.

2) À partir des règles de différentiation, retrouver les dérivées de $f+g$, fg, id, $\frac{f}{g}$, f^{-1} (réciproque).

2. DÉRIVÉES PARTIELLES - MODE D'EMPLOI

On considère une fonction numérique f de trois variables réelles x, y et z, autrement dit une fonction scalaire $f(x,y,z)$. En fixant deux des trois variables dans $f(x,y,z)$, par exemple $y=y_0$ et $z=z_0$, on obtient une fonction $g(x)=f(x,y_0,z_0)$ de la variable réelle x. Si cette fonction est dérivable en x_0, on pose alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=g'(x_0).$$

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ de trois variables réelles est appelée *dérivée partielle première de f par rapport à x*. De même, on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ la *dérivée partielle première de f par rapport à y* et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ celle par rapport à z. Ainsi, pour calculer la dérivée partielle de la fonction $f(x,y,z)$ par rapport à la variable x, on considère les variables y et z constantes (et *mutatis mutandis* pour les autres dérivées partielles).

Exemple : pour $f(x,y,z)=x^2yz+y^3z^2$ on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; yz\frac{\partial}{\partial x}x^2 \;=\; 2xyz.$$

1) Calculez maintenant $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ pour la même fonction.

2) Les dérivées partielles de la composée, $g(f(x,y,z))=(g\circ f)(x,y,z)$, d'une fonction scalaire, f, de trois variables réelles par une fonction d'une variable réelle, g, sont définies comme[1]

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} \;=\; (g'\circ f)\,\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} \;=\; (g'\circ f)\,\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial(g\circ f)}{\partial z} \;=\; (g'\circ f)\,\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Comme exemple important, considérez, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ et $g\circ f=\sqrt{f}$, c'est à dire

$$g(f(x,y,z))=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

[1] On rappelle ici que la dérivée de la composée de deux fonctions d'une variable réelle est donnée par

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)=((g'\circ f)\;f')(x).$$

Vérifier que l'on trouve

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x, \qquad \text{et} \qquad g' \circ f = \frac{1}{2\sqrt{f}} = \frac{1}{2(g \circ f)},$$

et qu'en introduisant la variable $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, on obtient (avec un certain abus de notation)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial (g(f(x,y,z))}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{g(f(x,y,z))} = \frac{x}{r}.$$

En déduire $\dfrac{\partial r}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial z}$ par un argument de symétrie sur l'échange des variables x, y, z.

3) On peut appliquer successivement plusieurs dérivées partielles sur une fonction. En général pour des fonctions suffisamment régulières, le résultat de cette opération ne dépend pas de l'ordre. Pour la fonction $f(x,y,z) = x^2yz + y^3z^2$, vue ci-contre, on calcule par exemple la *dérivée partielle seconde*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} 2xyz = 2xz.$$

- Déterminez maintenant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ en calculant d'abord la dérivée de f par rapport à y, et ensuite la dérivée par rapport à x.
- Calculez toutes les autres dérivées partielles secondes (combien y-en a-t-il ?).
- Calculez toutes les dérivées partielles d'ordre trois de la même fonction.

4) La combinaison $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, de dérivées partielles secondes de la fonction f est appelée *Laplacien* de f, et on l'écrit souvent comme

$$\Delta f(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(x,y,z).$$

Calculez

$$\Delta \frac{1}{r}, \qquad r \neq 0,$$

où la variable r est définie par $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. NOTATION DIFFÉRENTIELLE À PLUSIEURS VARIABLES

1) Si on pose $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, calculer la différentielle $\mathrm{d}r$.

2) En utilisant la notation différentielle, retrouver la formule pour les dérivées partielles de $h(x,y) = g(f(x,y))$ pour une fonction f de deux variables et une fonction g d'une variable.

3) Etablir de même une formule pour la dérivée de $k(t) = h(f(t), g(t))$ pour deux fonctions f et g d'une variable et une fonction h de deux variables. Etudier le cas où $h(x,y) = x+y$, puis $h(x,y) = xy$.

4) Etablir de même une formule pour les dérivées partielles premières de $k(x,y) = h(f(x,y), g(x,y))$ pour trois fonctions f, g, et h de deux variables. Etudier le cas où $f(r,\theta) = r\cos\theta$ et $g(r,\theta) = r\sin\theta$ (*coordonnées polaires*), puis $f(x,y) = ax + cy$ et $g(x,y) = bx + dy$ (*changement de repère*).

4. GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL (EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES).

Résumé. Un point $\vec{x}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est défini en coordonnées cartésiennes par le vecteur

$$\boxed{\text{coordonnées cartésiennes}} \qquad \vec{x} \;=\; \hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z z \;=\; (x, y, z)\ .$$

- Le *gradient* d'un *champ scalaire (ou fonction scalaire)* $\phi(\vec{x}) = \phi(x, y, z)$ est un vecteur ayant pour composantes, dans la base othonormée directe $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$, les dérivées partielles de la fonction :

$$grad\,\phi(\vec{x}) \;=\; \hat{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \;=\; \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \qquad \text{(fonction} \longrightarrow \text{vecteur).}$$

- Une *fonction vectorielle* $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}(x, y, z)$, on dit aussi un *champ vectoriel*, est un vecteur dont chacune des composantes, V_x, V_y, V_z est une fonction scalaire des coordonnées (x, y, z) :

$$\vec{V}(\vec{x}) \;=\; \hat{e}_x V_x(x, y, z) + \hat{e}_y V_y(x, y, z) + \hat{e}_z V_z(x, y, z) \;=\; (V_x(\vec{x}), V_y(\vec{x}), V_z(\vec{x})).$$

- La *divergence* d'une fonction vectorielle est une fonction scalaire définie comme

$$div\,\vec{V} \;=\; \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \;=\; grad\,V_x \cdot \hat{e}_x + grad\,V_y \cdot \hat{e}_y + grad\,V_z \cdot \hat{e}_z \qquad \text{(vecteur} \longrightarrow \text{fonction).}$$

- Le *rotationnel* d'une fonction vectorielle est une fonction vectorielle définie comme

$$\begin{aligned} rot\,\vec{V} \;&=\; \hat{e}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \hat{e}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \\ &=\; grad\,V_x \wedge \hat{e}_x + grad\,V_y \wedge \hat{e}_y + grad\,V_z \wedge \hat{e}_z \\ &\qquad \text{(vecteur} \longrightarrow \text{vecteur).} \end{aligned}$$

Le (vecteur) gradient est le concept essentiel !

a. Vérifiez explicitement que l'opérateur différentiel de *Laplace* (ou Laplacien) s'écrit comme

$$\triangle\phi \;=\; \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \;=\; div\, grad\, \phi.$$

b. Calculez le gradient des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1(x,y,z) &= xy, \qquad \phi_2(x,y,z) \;=\; 3xy^2-y^3,\\
\phi_3(x,y,z) &= r, \qquad avec \qquad |\vec{\mathrm{x}}| \;=\; r \;=\; \sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
\phi_4(x,y,z) &= \frac{1}{r}, \qquad \phi_5(x,y,z) \;=\; f(r),\\
\phi_6(x,y,z) &= \frac{1}{|\vec{\mathrm{x}}-\vec{a}|^n}, \qquad \text{avec } n>0, \text{ et } \vec{a} \text{ un vecteur constant.}
\end{aligned}$$

c. Calculez la divergence et le rotationnel des fonctions vectorielles suivantes :

$$\vec{V}_1(x,y,z) \;=\; (-\frac{y}{2},\frac{x}{2},0), \qquad \vec{V}_2(x,y,z) \;=\; (6xy, 3x^2-3y^2, 0), \qquad \vec{V}_3(x,y,z) \;=\; \frac{\vec{\mathrm{x}}}{r},$$

$$\vec{V}_4(x,y,z) \;=\; \frac{\vec{\mathrm{x}}}{r^3}, \qquad \vec{V}_5(x,y,z) \;=\; g(r)\,\vec{\mathrm{x}}, \qquad \vec{V}_6(x,y,z) = \frac{\vec{\mathrm{x}}-\vec{a}}{|\vec{\mathrm{x}}-\vec{a}|^3}.$$

d*. Quelques identités utiles :

$$rot\, grad\, \phi \;=\; 0, \qquad div\, rot\, \vec{V} \;=\; 0,$$

$$\begin{aligned}
rot\, rot\, \vec{V} &= grad\, div\, \vec{V} - \triangle\vec{V},\\
div\,(\phi\vec{V}) &= \phi\, div\, \vec{V} + \vec{V}\cdot grad\, \phi,\\
rot\,(\phi\vec{V}) &= \phi\, rot\, \vec{V} - \vec{V}\wedge grad\, \phi,\\
div\,(\vec{V}\wedge\vec{W}) &= \vec{W}\cdot rot\, \vec{V} - \vec{V}\cdot rot\, \vec{W}.
\end{aligned}$$

Démonstration ?

N.B. On rencontre parfois la notation suivante

$$grad\, \phi \;=\; \vec{\nabla}\phi, \qquad rot\, \vec{V} \;=\; \vec{\nabla}\wedge\vec{V}, \qquad div\, \vec{V} \;=\; \vec{\nabla}\cdot\vec{V}, \qquad \Delta\,\phi \;=\; \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\,\phi$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur différentiel que l'on écrit comme un vecteur

$$\vec{\nabla} \;=\; \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Mathématiques pour la Physique I : TD - II

5. INTÉGRALES DOUBLES

1. Soient le rectangle $P = [0,1] \times [0,2]$ et la fonction numérique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x^2 + xy$.

a. Calculer $g(x) = \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ *(intégration d'abord selon la variable y).*

b. En déduire la valeur de $I := \int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Calculer $h(y) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ *(intégration d'abord selon la variable x).*

d. Calculer $\int_0^2 h(y)\,\mathrm{d}y$ et comparer avec la valeur de I. L'ordre d'intégration est-il primordial ?

2. Soit le rectangle $P = [0,\pi] \times [0, \frac{1}{2}]$. Calculer $\int_P y\,\cos(xy)\,\cos^2(\pi y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Choisissez judicieusement l'ordre d'intégration. Réponse : $\frac{1}{3\pi}$.

Résumé. Si le domaine est un pavé de $\mathbb{R}^2$ (rectangle !), c'est à dire un produit cartésien de deux intervalles, $[a,b] \times [c,d]$, alors nous avons l'important théorème de Fubini :

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \;=\; \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\ ,$$

où l'ordre des intégrales simples est sans importance, sauf du point de vue calculatoire, cf.**2.**.

6. INTÉGRALES DOUBLES PLUS GÉNÉRALES (Thm 2 de Fubini)

Résumé. Si K est une région du plan $\mathbb{R}^2$ non rectangulaire (mais quarrable, voir cours), que l'on peut décrire comme $K = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le Y(x)\}$, alors

$$\int_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; \int_a^b \left(\int_0^{Y(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \;=\; \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{avec } A(x) \;=\; \int_0^{Y(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

1. On rappelle que le disque $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$ de rayon R et centré sur l'origine a pour bord le cercle $C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$.

a. Esquisser ce disque et son bord, et, pour x fixé et $(x,y) \in C$, exprimer y en fonction de x.

b. Si K désigne le demi-disque supérieur, le décrire comme $\{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le Y(x)\}$.

c. En déduire l'aire de K et ensuite celle de D.

2. Calculer l'intégrale double $\int_K y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $K = \{\vec{\mathrm{x}} = (x,y) \mid |\vec{\mathrm{x}}| \le R\ ;\ y \ge 0\}$, un demi-disque de rayon R.
[*Écrire K comme* $K = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le Y(x)\}$. *Réponse :* $\frac{\pi R^4}{8}$.]

3. Calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_K e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec K le triangle $\{(x,y)\mid \frac{y}{2}\le x\le 1,\ y\in[0,2]\}$.

[*Comme il n'existe pas de primitive élémentaire de la fonction* e^{x^2}, *il sera judicieux d'écrire le domaine* K *comme* $K=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ 0\le y\le Y(x)\}$. *Réponse :* $e-1$.]

4. Calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_K (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $K=\{(x,y)\mid y\ge 0,\ 2y^2\le x\le 3\}$.

[*Écrire* K *comme* $K=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ 0\le y\le Y(x)\}$. *Réponse :* $\frac{9}{8}+\frac{9\sqrt{6}}{5}$.]

7. COORDONNÉES POLAIRES

Un point quelconque $\vec{x}\neq\vec{0}$ du plan $\mathbb{R}^2$ est décrit en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{x}=\hat{e}_x x+\hat{e}_y y=(x,y).$$

On peut également représenter ce même point $\vec{x}$ à l'aide des coordonnées polaires (r,φ) définies par

$$\boxed{\text{coordonnées polaires}}\quad \begin{cases} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\end{cases}\qquad r>0,\ 0\le\varphi<2\pi,$$

1) On désigne la norme d'un vecteur par $|\cdot|$ au lieu de $||\cdot||$. Calculer les vecteurs ainsi que les vecteurs unitaires qui en découlent

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial r}=\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial r}\right|\hat{e}_r,\qquad\text{et}\qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}=\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}\right|\hat{e}_\varphi.$$

2) Calculer leur déterminant appelé également **jacobien** du changement de variables des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

3) Exprimez le vecteur $\vec{x}$ et calculer sa norme $|\vec{x}|$ dans la base othonormée $(\hat{e}_r,\hat{e}_\varphi)$.

4) Calculer les différentielles $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ et en déduire l'expression de $\mathrm{d}\vec{x}=\hat{e}_x\,\mathrm{d}x+\hat{e}_y\,\mathrm{d}y$ dans la base $(\hat{e}_r,\hat{e}_\varphi)$.

5) Une fonction scalaire $f(\vec{x})$ peut être vue soit comme fonction de (x,y) soit comme fonction de (r,φ) suivant les coordonnées choisies, ce qui se traduit pour la différentielle

$$\mathrm{d}f=\mathrm{d}x\,\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{d}y\,\frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{d}r\,\frac{\partial f}{\partial r}+\mathrm{d}\varphi\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}.$$

Vérifier cette égalité pour la fonction distance $f(\vec{x})=|\vec{x}|$.

6) On rappelle que la différentielle d'une fonction est reliée au gradient par $\mathrm{d}f=\mathit{grad}\,f\cdot\mathrm{d}\vec{x}$. Le vecteur, $\mathit{grad}\,f$ a comme composantes dans la base $(\hat{e}_r,\hat{e}_\varphi)$ les projections données par produit scalaire, $\hat{e}_r\cdot\mathit{grad}\,f$ et $\hat{e}_\varphi\cdot\mathit{grad}\,f$. A l'aide de 4) et 5), retrouver l'expression suivante du gradient en coordonnées polaires

$$\boxed{\text{polaires}}\qquad \mathit{grad}\,f(r,\varphi)=\hat{e}_r\frac{\partial f}{\partial r}+\hat{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}.$$

7) Calculer le gradient de la fonction distance $f(\vec{x})=|\vec{x}|$, en coordonnées cartésiennes, d'une part, et, en coordonnées polaires, d'autre part.

8. CALCUL D'INTÉGRALES À L'AIDE DES COORDONNÉES POLAIRES

I) **Aire d'un disque et d'une ellipse.**

A) Soit le disque $D = \{\vec{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/ |\vec{x}| \leq R\}$.

1. Déterminer le domaine Δ des coordonnées polaires (r, φ) permettant de paramétrer D.
2. En déduire le calcul de l'aire de ce disque $\int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, à l'aide des coordonnées polaires.

B) Soit l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

1. Effectuer un changement de variables $(x,y) \to (u,v)$ de telle sorte à ramener l'équation de l'ellipse à celle du cercle unité.
2. En déduire l'aire de l'ellipse.

II) En passant aux coordonnées polaires, calculez

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x, \qquad \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Esquisser les domaines d'intégration pour pouvoir les paramétrer en coordonnées polaires.
Réponse : $\pi/5$ et $\pi R^4/8$.

III) En théorie de probabilité, l'intégrale (d'une gaussienne) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est très utilisée.

1) Par parité, écrire I sous la forme $I = 2J$, et donner J.

2) En se rappelant que la variable d'intégration est dite variable muette, montrez que

$$J^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy\ .$$

3) Calculez J^2 en passant en coordonnées polaires et en déduire la valeur de I. *Réponse* : $I = \sqrt{\pi}$.

IV) **Volume de la sphère**. (cf exo 6.1)

Le volume de la sphère de rayon R et centrée à l'origine, peut se calculer en coupant la sphère en deux selon le plan $z = 0$. On obtient ainsi une calotte sphérique de base le disque de rayon R, donnée par la fonction $z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. En utilisant les coordonnées polaires, calculez le volume de cette demi-sphère compris entre la surface $z = f(x,y)$ et le dique D par l'intégrale double

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy,$$

et en déduire le volume de la sphère.

9. INTEGRALE DOUBLE (Septembre 1998)

On considère dans le plan $\mathbf{R}^2$, le domaine K défini par $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq \sin 3y,\ y \in [0, \frac{\pi}{3}]\}$.
Dessiner ce domaine planaire K et calculer l'intégrale double $\int_K x\, dxdy$. *Réponse* : $\pi/12$

10. INTEGRALE TRIPLE (Juin 1998)

a. Esquisser le volume $\mathcal{V}$ défini par $\mathcal{V} = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

b. On se donne la fonction scalaire $f(\vec{x}) = f(x, y, z) \ = \ 3x^2 y + 2y \sin z$.

Calculer l'intégrale triple $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dxdydz$. *Réponse* : $2\pi + 8$

11. VOLUME DU TÉTRAÈDRE

On désigne dans cet exercice par (x, y, z) les coordonnées cartésiennes de l'espace $\mathbf{R}^3$ orienté, muni du repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, et on considère le domaine planaire

$$K = \{(x, y, z) \,/\, x \in [0, 1],\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ z = 0\},$$

et la fonction à valeurs réelles $f \ : \ K \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad (x, y) \longmapsto f(x, y) = 1 - x - y$.

1. Esquisser le volume compris entre le domaine K et la surface $z = f(x, y)$.
2. Calculer $\displaystyle\iint_K f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$. Que représente la valeur de cette intégrale double ?

12. INTÉGRALE DOUBLE ET CHANGEMENT DE VARIABLES

Dans le plan orienté $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère $(\mathcal{O}, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$, on considère le domaine plan, K, coincé entre les quatre droites d'équations respectives,

$$x - y = 0, \quad x - y = 1, \quad x + y = 1, \text{ et } \quad x + y = 3.$$

1. Tracer les quatre droites dans le repère $(\mathcal{O}, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$, achurer le domaine K tout en déterminant ses sommets, et donner son nom.

   On se propose tout d'abord de calculer de deux façons distinctes l'aire A du domaine plan K.
2. Calculer directement l'aire A à l'aide d'un déterminant d'ordre 2.
3. L'aire A se calcule aussi comme l'intégrale double, $A = \displaystyle\int_K dxdy$.

   En effectuant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$,

   dessiner le domaine Δ des variables (u, v) servant à paramétrer le domaine K.

   Donner une définition du domaine Δ en le décrivant par des inégalités sur u et v.

   A quelle figure géométrique correspond le domaine Δ et que vaut son aire ?
4. Déterminer l'expression de x et de y en fonction des variables u et v, et calculer le Jacobien du changement de variables.
5. En déduire, après changement de variables dans l'intégrale double, la valeur de A.

   (Vérifier que les deux valeurs de A coincident !)

13. GRADIENT

Déterminer la direction de la variation la plus rapide du champ scalaire $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ à partir du point défini par le vecteur $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$ en coordonnées rectangulaires (cartésiennes).

Réponse : grad $f(\vec{x}_0) = 2\vec{x}_0$.

Mathématiques pour la Physique I : TD - III

14. CALCUL VECTORIEL–COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES

Une fois fixée une origine O dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, un point de l'espace (distinct de O) est repéré par un vecteur $\vec{x}$, sa position. Par la suite on identifiera le point à $\vec{x}$. En coordonnées cartésiennes, c'est à dire dans la base canonique $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, ce vecteur s'écrit

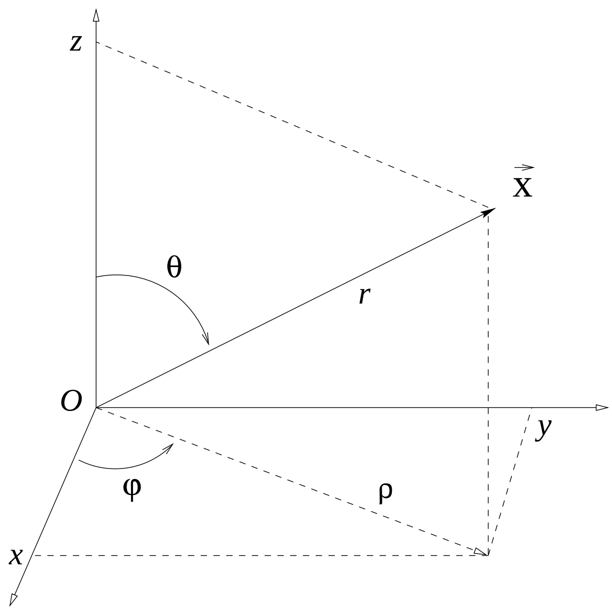
$$\boxed{\text{coordonnées cartésiennes}} \qquad \vec{x} \ = \ \hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z z \ = \ (x, y, z) \ .$$

Ce même point $\vec{x}$ peut aussi être repéré par les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) ou sphériques (r, θ, φ) definies respectivement par

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{coordonnées}\\ \text{cylindriques}\end{array}} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad \rho > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ z \in \boldsymbol{R},$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{coordonnées}\\ \text{sphériques}\end{array}} \quad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

et repésentées géométriquement ci-dessous,



a. On désigne la norme d'un vecteur par $|\cdot|$ au lieu de $||\cdot||$. Pour chacun de ces deux nouveaux sytèmes de coordonnées, calculez les vecteurs suivants, ainsi que les vecteurs unitaires correspondants, dans la base cartésienne $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$,

$$\text{cylindriques :} \quad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\rho} = \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\rho}\right| \hat{e}_\rho, \qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi} = \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}\right| \hat{e}_\varphi, \qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial z} = \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial z}\right| \hat{e}_z$$

$$\text{sphériques :} \quad \frac{\partial\vec{x}}{\partial r} = \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial r}\right| \hat{e}_r, \qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta} = \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta}\right| \hat{e}_\theta, \qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi} = \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}\right| \hat{e}_\varphi \ .$$

b. Démontrez que les sytèmes de trois vecteurs $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ ou $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ forment chacun une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, et calculez dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté les produits vectoriels suivants

$$\text{cylindriques :} \qquad \hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\varphi \;= \qquad , \qquad \hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_z \;= \qquad , \qquad \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho \;= \qquad ,$$

$$\text{sphériques :} \qquad \hat{e}_r \wedge \hat{e}_\theta \;= \qquad , \qquad \hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_\varphi \;= \qquad , \qquad \hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_r \;= \qquad ,$$

c. Exprimez le vecteur $\vec{x}$ et calculer sa norme $|\vec{x}|$ dans chacune des nouvelles bases $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ ou $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$. Pour chacun de ces deux changements de variables, calculez les produits mixtes (déterminants d'ordre trois !) appelés également **jacobiens** des changements de variables des coordonnées cartésiennes aux coordonnées

$$\text{cylindriques :} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} \right) , \qquad \text{sphériques :} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right) ,$$

Utiliser par linéarité les résultats établis en **a & b.** *sur* $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ *et* $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$.

d. Gradient. Un champ vectoriel décrit en coordonnées cartésiennes,

$$\vec{V}(\vec{x}) = \hat{e}_x V_x(x,y,z) + \hat{e}_y V_y(x,y,z) + \hat{e}_z V_z(x,y,z) = (V_x, V_y, V_z),$$

s'exprime alors en coordonnées sphériques comme

$$\vec{V}(\vec{x}) \;=\; \hat{e}_r\, V_r(r,\theta,\varphi) + \hat{e}_\theta\, V_\theta(r,\theta,\varphi) + \hat{e}_\varphi\, V_\varphi(r,\theta,\varphi),$$

où les composantes sont calculées par produit scalaire

$$V_r = \vec{V} \cdot \hat{e}_r, \qquad V_\theta = \vec{V} \cdot \hat{e}_\theta, \qquad V_\varphi = \vec{V} \cdot \hat{e}_\varphi,$$

représentent le *même* champ vectoriel exprimé dans deux bases de coordonnées différentes.

En particulier, calculer l'expression suivante du gradient d'une fonction scalaire $\phi(\vec{x}) = \phi(r,\theta,\varphi)$ exprimé en coordonnées sphériques

$$\boxed{\text{sphériques}} \qquad grad\, \phi(\vec{x}) \;=\; \hat{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \, .$$

Pour obtenir cette expression, vous allez 1) rappeler l'expression du vecteur gradient en coordonnées cartésiennes et 2) considérer les dérivées composées suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \cdot grad\, \phi, \\
\frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \cdot grad\, \phi, \\
\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \cdot grad\, \phi,
\end{aligned}$$

et projetez selon $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ et $\hat{e}_\varphi$, à l'aide du produit scalaire pour identifier chacune des composantes du gradient en coordonnées sphériques.

1./ Calculer directement le gradient des fonctions $\phi(\vec{x}) = |\vec{x}|$ et $f(\vec{x}) = |\vec{x}|^{-1}$ en coordonnées sphériques. (Comparer avec l'exercice 4.b).

2./ De même, montrer que le gradient en coordonnées cylindriques prend la forme

$$\boxed{\text{cylindriques}} \qquad grad\, \phi(\rho,\varphi,z) \;=\; \hat{e}_\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

3./ Calculer directement le gradient des fonctions $\phi(\vec{x}) = |\vec{x}|$ et $f(\vec{x}) = |\vec{x}|^{-1}$ en coordonnées cylindriques.

15. INTEGRALES TRIPLES ET COORDONNÉES SPHÉRIQUES

I) Une boule $\mathcal{B}$ homogène de rayon R et centrée sur l'origine a une masse volumique constante μ.

1) Calculer sa masse M et son moment d'inertie par rapport à son centre $I = \int_{\mathcal{B}} \mu\, r^2\, dxdydz$ (résultat à exprimer en fonction de M). *Réponse* : $3MR^2/5$

2) Calculer les trois coordonnées $X = \dfrac{2}{M}\int_{\mathcal{B}'} \mu\, x\, dxdydz$, $Y = \dfrac{2}{M}\int_{\mathcal{B}'} \mu\, y\, dxdydz$, et $Z = \dfrac{2}{M}\int_{\mathcal{B}'} \mu\, z\, dxdydz$, par rapport à l'origine, du centre d'inertie de la demi-boule $\mathcal{B}'$ supérieure correspondant à $z \geq 0$.
Réponse : $X = Y = 0$, et $Z = 3R/8$.

II) **Volume de la sphère et de l'ellipsoïde**.

1) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le domaine défini par $V = \{\vec{\mathrm{x}} = (x, y, z) \,/\, |\vec{\mathrm{x}}| \leq R\}$.
Quel volume décrit ce domaine V et caractériser le paramétrage de V en coordonnées sphériques : $\Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (r, \theta, \varphi) \longmapsto \vec{\mathrm{x}}(r, \theta, \varphi)$. Cf. Exo 14.

Calculez le volume de V donné par l'intégrale triple : $\displaystyle\int_V d^3\vec{\mathrm{x}} = \int_\Delta \frac{\partial \vec{\mathrm{x}}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\mathrm{x}}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{\mathrm{x}}}{\partial \varphi}\right) drd\theta d\varphi.$

2) La démarche généralise celle de l'exercice 8-I) et utilise le résultat de la question précédente pour calculer un autre volume $\mathcal{E}$ remarquable, celui de l'ellipsoïde. L'ellipsoïde est l'ensemble des points $\vec{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1,$$

avec $a,\ b,\ c$, des constantes positives.

a. Donner l'équation cartésienne de la surface fermée $\partial\mathcal{E}$ qui délimite l'ellipsoïde.

b. Déterminer le changement de variables $(x, y, z) \to (u, v, w)$ de telle sorte à ramener l'équation de $\partial\mathcal{E}$ à celle de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

c. Calculer le Jacobien $\dfrac{\partial \vec{\mathrm{x}}}{\partial u} \cdot \left(\dfrac{\partial \vec{\mathrm{x}}}{\partial v} \wedge \dfrac{\partial \vec{\mathrm{x}}}{\partial w}\right)$ de ce changement de variables.

d. En déduire le volume $\int_{\mathcal{E}} d^3\vec{\mathrm{x}}$ de $\mathcal{E}$ à partir de celui de la sphère. *Réponse* : $4\pi abc/3$.

e. Si $a = b = c = R$, quel volume retrouve-t-on ?

16. INTEGRALE TRIPLE ET COORDONNÉES CYLINDRIQUES

On désigne par K, le cône de hauteur h et de base circulaire, un disque de rayon R centré sur l'origine. Les coordonnées cylindriques, (ρ, φ, z), cf exo 8, sont adaptées à la géométrie de ce volume

1. Esquisser le volume K.
2. Déterminer le domaine Δ des coordonnées (ρ, φ, z), servant à paramétrer ce cône.
3. Par changement de variables, calculer le volume, $V = \int_K dxdydz$, du cône K.

17. DIFFÉRENTIELLE TOTALE ET GRADIENT

On considère la forme différentielle (ou 1-forme) $\omega = (x^2 - 2y)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2x)\,\mathrm{d}y$.

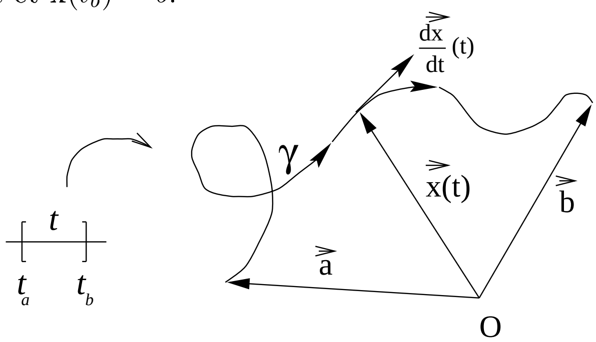
a) Montrer que ω est une différentielle totale (on dit aussi exacte).

b) Calculer la fonction $f(x, y)$ la plus générale telle que $\omega = \mathrm{d}f$.

c) Si on écrit $\omega = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}$ dans $\mathbb{R}^2$, donner le lien entre $\vec{F}$ et f.

18. L'INTÉGRALE CURVILIGNE DANS $\mathbb{R}^3$. *C'est une intégrale simple*!

Une courbe orientée γ dans l'espace $\mathbb{R}^3$, allant d'un point $\vec{a}$ à un point $\vec{b}$, se décrit à l'aide d'un paramétrage, par la donnée d'un vecteur $\vec{\mathrm{x}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dépendant d'un paramètre (réel), t, tel que $t_a \le t \le t_b$, $\vec{\mathrm{x}}(t_a) = \vec{a}$ et $\vec{\mathrm{x}}(t_b) = \vec{b}$.



L'intégrale curviligne d'un champ vectoriel $\vec{F}(\vec{\mathrm{x}})$ le long d'une courbe γ, est définie comme l'intégrale de la 1-forme $\omega = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}$ sur γ. Par image réciproque sur $[t_a, t_b]$ elle correspond à la somme de trois intégrales simples,

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) = \int_\gamma \vec{F}(\vec{\mathrm{x}}) \cdot d\vec{\mathrm{x}} = \int_{t_a}^{t_b} \gamma^*(\omega) \;=\; \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}(\vec{\mathrm{x}}(t)) \cdot \frac{d\vec{\mathrm{x}}(t)}{dt}\, dt \;=$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} \left[F_x(x(t), y(t), z(t))\, \frac{dx(t)}{dt} + F_y(x(t), y(t), z(t))\, \frac{dy(t)}{dt} + F_z(x(t), y(t), z(t))\, \frac{dz(t)}{dt} \right] dt.$$

A) Calculer l'intégrale curviligne, $\int_\gamma \omega$, pour le champ vectoriel, $\vec{F}(\vec{\mathrm{x}}) = xy\,\hat{e}_x + (y + x^2)\,\hat{e}_y + 2z\,\hat{e}_z$, si le chemin γ est

1) l'arc de parabole défini par $\gamma = \{(x, y, z)/\; -1 \le x \le 1,\; y = 1 - x^2,\; z = 0\}$.

2) le cercle défini par $\gamma = \{(x, y, z)/\; x = R\cos t,\; y = 2,\; z = R\sin t,\; t \in [0, 2\pi],\; R > 0\}$.

3) le cercle défini par $\gamma = \{(x, y, z)/\; x = 0,\; y = R\cos t,\; z = R\sin t,\; t \in [0, 2\pi],\; R > 0\}$.

Le champ $\vec{F}$ dérive-t-il d'un potentiel (autrement dit, la différentielle ω est-elle exacte $\omega = \mathrm{d}\alpha$?) ?

B) Calculer $\int_\gamma \omega$, pour $\omega = \frac{1}{2}(x\ \mathrm{d}z - z\ \mathrm{d}x + e^{xyz}\ \mathrm{d}y)$ et γ le chemin numéro 2. *Réponse :* πR^2.

MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE I : TD - IV

19. AIRE D'UNE SURFACE ET FORMULE DE GREEN-RIEMANN

On considère le disque $D = \{\vec{x} = (x, y, z) / |\vec{x}| \leq R,\ z = 0\}$ muni de l'orientation $\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y$ induite par celle de l'espace $\mathbb{R}^3$.

a. Déterminez la courbe orientée, $\gamma = \partial D$, bord du disque D.

b. On considère le champ vectoriel : $\vec{V}(\vec{x}) \ = \ -\hat{e}_x \dfrac{y}{2} + \hat{e}_y \dfrac{x}{2}$. Calculez l'intégrale curviligne, $\displaystyle\int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{x}$.

c. Appliquez la **formule de Green-Riemann** $\boxed{\displaystyle\int_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx\, dy \ = \ \int_{\partial D} \vec{V} \cdot d\vec{x}}$, pour D et $\vec{V}$ définis précédemment. Conclusion ?

20. APPLICATION DE GREEN-RIEMANN

Calculer l'intégrale curviligne, $\displaystyle\int_\Gamma \Big((y + z)\, \mathrm{d}x - (x + z)\, \mathrm{d}y + xy\, \mathrm{d}z \Big)$, le long du chemin,
$\Gamma = \{(x, y, z) \mid (x - R)^2 + y^2 = R^2,\ y \geq 0,\ z = 0\}$.
Esquisser Γ *et le compléter de sorte à obtenir un chemin fermé. Réponse :* $-\pi R^2$.

21. AIRE DÉLIMITÉE PAR UNE BOUCLE

On rappelle que l'aire A d'un domaine planaire K peut se calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann, (cf cours)

$$A \ = \ \tfrac{1}{2} \int_{\partial K} (x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x).$$

Dans le plan orienté $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe fermée γ définie en coordonnées cartésiennes par, $\gamma \ = \ \Big\{(x, y) \,/\, (x^2 + y^2)^2 = \alpha^2(x^2 - y^2), \textbf{et } \boldsymbol{x \geq 0}\Big\}$, (lemniscate de Bernouilli cf figure 1 ci-contre), où $\alpha > 0$ a la dimension d'une longueur. On se propose de calculer l'aire enfermée dans cette boucle.

I. (Juin 1999) Première méthode.

a. Afin de paramétrer cette courbe, poser $y = x\, t$ dans l'équation de définition de γ, et exprimer x en fonction de t.

b. Déterminer l'intervalle I des valeurs permises de t pour que le paramétrage, $t \longmapsto (x(t), t\, x(t))$, de la courbe γ soit bien défini.

c. Calculer l'aire A de la boucle γ à partir de la formule de Green-Riemann.

<u>N.B.</u> *On remarquera que,* $\dfrac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} \ = \ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dfrac{t}{1 + t^2} \right)$.

II. (Septembre 1999) Deuxième méthode. On opte pour un paramétrage du domaine K à l'aide des coordonnées polaires (r, θ).

1. Déterminer les valeurs de l'angle θ pour lesquelles $x \geq 0$.
2. Ecrire l'équation du bord du domaine K, $\partial K = \gamma$, en coordonnées polaires.

   En déduire que $r = r(\theta) \geq 0$, tout en précisant l'intervalle I des valeurs permises de θ, et que, $I \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\theta \longmapsto (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, définit un paramétrage en coordonnées polaires de la courbe γ que l'on dessinera. (*Rappel* : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$).
3. Calculer l'image réciproque de $\frac{1}{2}(x \text{ d}y - y \text{ d}x)$ en coordonnées polaires. En déduire son image réciproque sur la courbe γ dans le paramétrage polaire.
4. Calculer alors l'aire A de la boucle γ à partir de la formule de Green-Riemann.
5. A l'aide de la question 2, déterminer à présent le domaine Δ -que l'on esquissera- des coordonnées polaires servant à paramétrer directement le domaine K délimité par la boucle γ.
6. En déduire le calcul direct de l'aire A de K, $A = \displaystyle\int_K dxdy$, en coordonnées polaires.

Réponse : $\alpha^2/2$.

22. NAPPES PARAMÉTRÉES DANS $\mathbb{R}^3$

A. On considère dans le plan $z = 0$, *l'astroïde* courbe fermée γ (cf figure 1 ci-dessus) définie par le paramétrage, $x(t) = 4R\cos^3 t$ et $y(t) = 4R\sin^3 t$, $0 \leq t < 2\pi$ et $R > 0$ une constante positive.

1. Calculer la longueur $\displaystyle\int_\gamma ||d\vec{x}||$ de l'astroïde.
2. En appliquant la formule de Green-Riemann de l'exercice , calculer l'aire du domaine délimité par l'astroïde.

B. On considère la nappe sphérique Σ située sur la sphère de centre O et de rayon R et comprise entre les plans $z = \frac{R}{3}$ et $z = \frac{R}{2}$ -voir figure 1 ci-dessus.

1. Du fait de la symétrie sphérique, déterminer le paramétrage $\Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\theta, \varphi) \longmapsto \vec{x}(\theta, \varphi)$ de la nappe Σ en coordonnées sphériques.
2. Déterminer le bord $\partial\Sigma$ de la surface Σ.
3. Calculer le *vecteur normal sortant* $\vec{n}(\vec{x}(\theta, \varphi)) = \dfrac{\partial\vec{x}(\theta, \varphi)}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\vec{x}(\theta, \varphi)}{\partial\varphi}$, en tout point $\vec{x}(\theta, \varphi)$ de Σ.
4. On oriente Σ de sorte que le champ de vecteurs qui lui est normal soit sortant. Quelle est l'orientation du bord $\partial\Sigma$?
5. On pose $dS = ||\vec{n}(\vec{x}(\theta, \varphi))||\, d\theta\, d\varphi$. Cette quantité dépend-elle de l'orientation de la nappe Σ ?
6. Calculer l'aire de Σ, définie par l'intégrale $\displaystyle\int_\Sigma dS = \int_\Delta ||\vec{n}(\vec{x}(\theta, \varphi))||\, d\theta\, d\varphi$.

FIG. 1 – Le lemniscate de Bernouilli à deux feuilles, l'astroïde et la nappe sphérique Σ

23. ENCORE UNE AUTRE FAÇON DE CALCULER LE VOLUME D'UNE SPHÈRE

En cours, la **formule de Gauss-Ostrogradsky** vous a été présentée,

$$\boxed{\int_V div\vec{A}\; d^3\vec{x} = \int_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S}},$$

où V est le volume délimité par la surface fermée ∂V et $d\vec{S}$ est l'élément d'aire orientée (cf **d**). L'intégrale de surface de droite calcule le **flux** du champ vectoriel $\vec{A}$ à travers la surface fermée ∂V.

a. On considère le champ vectoriel $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{3}\,\vec{x}$. Calculez $div\,\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$.

b. On prend pour volume V la boule définie par $V = \{\vec{x} = (x, y, z) \,/\, |\vec{x}| \leq R\}$.
Donner le paramétrage $\Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (\theta, \varphi) \longmapsto \vec{x}(\theta, \varphi)$ de la surface ∂V à l'aide des angles sphériques.

c. Calculer, en tout point $\vec{x}(\theta, \varphi)$ de la sphère ∂V, le *vecteur normal sortant*

$$\vec{n}(\vec{x}(\theta, \varphi)) = \frac{\partial \vec{x}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{x}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

d. Calculez $\vec{A}(\vec{x}(\theta, \varphi))$, les valeurs du champ $\vec{A}$ en tout point $\vec{x}(\theta, \varphi)$ de la sphère ∂V.
On pose $d\vec{S} := \vec{n}(\vec{x}(\theta, \varphi))\, d\theta\, d\varphi$. Calculer le produit scalaire $\vec{A}(\vec{x}(\theta, \varphi)) \cdot d\vec{S}$.

e. Déduire de la formule de Gauss-Ostrogradsky que le volume de V se calcule avec le flux de $\vec{A}$.

24. INTEGRALE TRIPLE (Septembre 2001)

Dans cet exercice on se trouve dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y, z), et on se propose de calculer le *volume* du domaine K *commun* à deux cylindres de longueur infinie C_x et C_y d'axes respectifs $\hat{e}_x$ et $\hat{e}_y$ et de même rayon R; $K = C_x \cap C_y$.

1. Écrire les équations cartésiennes de chacun des deux cylindres C_x et C_y.
2. Soit $(x, y, z) \in K$, un point quelconque à *l'intérieur* de C_x et de C_y.
   Pour z fixé, montrer que les variables indépendantes x et y sont toutes deux comprises entre $-h(z)$ et $h(z)$, où $h(z)$ est une fonction positive de z que l'on précisera tout comme l'intervalle dans lequel varie la variable z.
3. En déduire une description par compréhension en fonction de la variable z du domaine K.
4. On rappelle que le volume de K est donné par l'intégrale triple $V = \displaystyle\int_K dx\,dy\,dz$. Calculer V en vous servant des questions 2 et 3..
   Indication : On pourra aussi réduire le calcul par des arguments de parité.
5. Esquissez sur une figure (même sommaire) le domaine K.

25. PRODUIT EXTÉRIEUR DANS $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$

Dans les questions suivantes, on se donne deux formes différentielles α et ω. Donner leurs degrés respectifs puis calculer les produits extérieurs $\alpha \wedge \omega$ et $\omega \wedge \alpha$. $\mathrm{vol}^{(n)}$ désigne la forme volume sur $\mathbb{R}^n$.

a. Tout d'abord dans le plan $\mathbb{R}^2$: 1) $\alpha = \omega = \mathrm{d}x$. 2) $\alpha = y\,\mathrm{d}x$ et $\omega = \cos y\,\mathrm{d}x + \sin y\,\mathrm{d}y$.
3) $\alpha = \mathrm{vol}^{(2)} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et $\omega = x\,\mathrm{d}x$.

b. A présent dans l'espace $\mathbb{R}^3$: 1) $\alpha = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z$ et $\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$.
2) $\alpha = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ et $\omega = x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}z$, 3) $\alpha = \mathrm{vol}^{(3)} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ et $\omega = x\,\mathrm{d}x$.

26. IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE FORME DIFFÉRENTIELLE

Calculer l'image réciproque $\phi^*(\omega)$ de la forme différentielle ω dans chacune des situations suivantes.
1) $\phi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, R],\ t \mapsto x = \phi(t) = R\sin t$, pour $\omega = \sqrt{R^2 - x^2}$, ou $\omega = \mathrm{d}x$.
2) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (s,t) \mapsto x = \phi(s,t) = s\,e^t$, pour $\omega = x\,\mathrm{d}x$.
3) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{\mathrm{x}} = \phi(t) = (t, e^t)$, pour $\omega = x\,\mathrm{d}y$.
4) $\phi : [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2,\ (r,\varphi) \mapsto \vec{\mathrm{x}} = (x,y) = \phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, (coordonnées polaires)

pour $\omega = e^{x^2+y^2}$, $\quad \omega = \mathrm{vol}^{(2)} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. ou $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$.

5) $\phi : [0, +\infty[\times[0, \pi] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$,
$(r,\theta,\varphi) \mapsto \vec{\mathrm{x}} = (x,y,z) = \phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, (sphériques)
pour $\omega = x^2 + y^2 + z^2$, $\quad \omega = \mathrm{vol}^{(3)} = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

27. DÉRIVATION EXTÉRIEURE

On rappelle la formule de la **dérivée extérieure** d, $\boxed{\mathrm{d} = \mathrm{d}x\,\partial_x + \mathrm{d}y\,\partial_y + \mathrm{d}z\,\partial_z}$, à combiner avec la règle du produit extérieure. Calculer la dérivée extérieure d et la dérivée extérieure seconde d^2 de chacune des formes différentielles suivantes.

a. Tout d'abord dans le plan $\mathbb{R}^2$: $\vec{\mathrm{x}} = (x,y)$.

1. Forme différentielle de degré 0, (0-forme = fonction), $f(\vec{\mathrm{x}}) = f(x,y) = |\vec{\mathrm{x}}|^2$,
2. 0-forme, $f(x,y) = -\cos x + \sin y$.
3. 1-forme, $\omega = (x+y)\,\mathrm{d}x$.

b. A présent dans l'espace $\mathbb{R}^3$: $\vec{\mathrm{x}} = (x,y,z)$.

1. 0-forme, $f(\vec{\mathrm{x}}) = x\cos y + ye^z$,
2. $f(\vec{\mathrm{x}}) = 1/|\vec{\mathrm{x}}|$,
3. 1-forme, $\omega = y^2\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}z$,
4. 2-forme, $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$,
5. 2-forme, $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$. Pour cette 2-forme ω peut-on trouver une 1-forme α telle que $\omega = \mathrm{d}\alpha$?

28. LIENS ENTRE VECTEURS ET FORMES DIFFÉRENTIELLES DANS $\mathbb{R}^3$

Que ce soit dans le plan ou l'espace, à la notion de vecteur on peut faire correspondre le concept de forme différentielle. On utilise les coordonnées cartésiennes.
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{\mathrm{x}}) = A_x(\vec{\mathrm{x}})\hat{e}_x + A_y(\vec{\mathrm{x}})\hat{e}_y + A_z(\vec{\mathrm{x}})\hat{e}_z$.

1. Quelle est l'écriture canonique de la 1-forme différentielle ω_A construite comme la circulation au point $\vec{\mathrm{x}}$ du champ de vecteur $\vec{A}$ le long du vecteur $\mathrm{d}\vec{\mathrm{x}} = \mathrm{d}x\hat{e}_x + \mathrm{d}y\hat{e}_y + \mathrm{d}z\hat{e}_z$? (Penser à l'intégrand dans la définition de l'intégrale curviligne).
2. À une 0-forme (fonction) f on a associé la 1-forme $\omega = \mathrm{d}f$. En déduire que ω donne la circulation du vecteur $grad\, f$ en chaque point.
3. Donner l'écriture canonique de la forme différentielle de degré deux, α_A qui donne en tout point $\vec{\mathrm{x}}$ le flux du champ de vecteur $\vec{A}$. On écrira de façon compacte $\alpha_A = \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.
4. Montrer que $(\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}) \wedge (\vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}) = (\vec{A} \times \vec{V}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, où $\times$ denote le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
5. A tout champ de vecteurs $\vec{V}$ on peut associer une 1-forme $\omega_V = \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{x}}$. Montrer que la 2-forme $\mathrm{d}\omega_V$ donne le flux en chaque point du champ de vecteurs $rot\vec{V}$. En déduire que $rot\, grad\, f = 0$.
6. A tout champ de vecteurs $\vec{A}$ est associée la 2-forme différentielle,

$$\alpha_A \;=\; A_x \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A_y \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A_z \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

   Montrer que $\mathrm{d}\alpha_A = div\vec{A}\,\mathrm{d}V$ où $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ est la forme volume en coordonnées cartésiennes. En déduire que $div\, rot\vec{V} = 0$.

MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE I : TD - V

29. INTEGRALE TRIPLE (Septembre 1998)

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$ orienté muni des coordonnées cartésiennes, $\vec{x} = (x, y, z)$, on considère la surface S du cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ et la 2-forme différentielle,

$$\omega \;=\; x^2 y \;\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 3y^2 \;\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - 2xz^2 \;\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \;.$$

1. Identifier le champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{x})$ representé par ω.
2. Calculer $\mathrm{d}\omega$, tout en précisant son degré.
3. Que représente le calcul de $\mathrm{d}\omega$?
4. En appliquant le théorème de Stokes à ce cas particulier, $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \mathrm{d}\omega = \int_S \omega$, calculer le flux du champ $\vec{V}$ à travers la surface S du cube.

30. INTEGRALE CURVILIGNE ET THEOREME DE STOKES.

I. Dans l'espace orienté $\mathbf{R}^3$, on considère le disque $S = \{(x, y, z) \,/\, x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$, et la 2-forme différentielle suivante, $\omega \;=\; xz^2 \;\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - yz^2 \;\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - x^2y^2 \;\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.
a. Esquisser la surface S tout en identifiant son bord ∂S, d'une part, et en indiquant son orientation, d'autre part.
b. Calculer l'intégrale de surface $\displaystyle\int_S \omega$.

II. Soit la 1-forme différentielle suivante, $\alpha = \dfrac{x^2y^3}{3} \;\mathrm{d}x + xyz^2 \;\mathrm{d}z$.
c. Calculer $\mathrm{d}\alpha$.
d. Appliquer le théorème de Stokes de sorte à relier l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{\partial S} \alpha$ avec l'intégrale de surface calculée en **b**.

31. THEOREME DE STOKES (SEPTEMBRE 2002)

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté muni des coordonnées cartésiennes, $\vec{x} = (x, y, z)$, on considère le solide K formé du cône de sommet l'origine O et d'axe vertical Oz et dont la partie supérieure est fermée par le disque de rayon R centré sur le point $(0, 0, h)$, $h > 0$. On désire calculer le volume du cône K.

On rappelle que les coordonnées cylindriques, (ρ, φ, z), adaptées à la géométrie de ce solide, sont définies par,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{coordonnées}\\ \text{cylindriques}\end{array}} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos\varphi, \\[1ex] y = \rho \sin\varphi, \qquad\qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}. \\[1ex] z = z, \end{array} \right.$$

1. Esquisser ce volume et donner *sans justification* l'expression du volume de ce cône.

   Le but de cet exercice est de justifier a posteriori la formule du volume du cône et ce, de deux manières différentes reliées par le théorème de Stokes.
2. Déterminer le domaine Δ des coordonnées cylindriques (ρ, φ, z), servant à paramétrer ce solide.
3. Donner le paramétrage en coordonnées cylindriques des deux surfaces formant le bord ∂K du volume K.
4. Soit la 2-forme, $\omega = \dfrac{x}{3}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \dfrac{y}{3}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \dfrac{z}{3}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

   Quel est le domaine de définition de ω ?

   Identifier le champ vectoriel $\vec{A}$ associé à ω.

   Comment $\vec{A}$ est-il positionné sur les parois du cône fermé K ? (Restriction de $\vec{A}$ sur ∂K).
5. Calculer tout d'abord l'expression en coordonnées cylindriques de la 2-forme ω (image réciproque par ce changement de variables), et ensuite son image réciproque sur le bord ∂K.
6. Que représente l'intégrale $\displaystyle\int_{\partial K} \omega$ pour le champ vectoriel $\vec{A}$?

   Calculer la valeur de cette intégrale.
7. Calculer $\mathrm{d}\omega$ tout en précisant le degré de cette forme.

   Quel est le lien avec le champ vectoriel $\vec{A}$?
8. Calculer l'expression en coordonnées cylindriques de $\mathrm{d}\omega$.
9. Calculer $\displaystyle\int_K \mathrm{d}\omega$.
10. Comparer les valeurs trouvées dans les questions 6 & 9.

    Conclusion ? et a t-on bien calculé le volume de K ?

32. SAVOIR APPLIQUER LE THEOREME DE STOKES (Juin 2002)

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté, on considère la 2-forme, dépendant d'un paramètre réel a,

$$\omega = (ax^3 + yz^2 \sin x)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (ay^3 + y^2z^2 \cos x)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (az^3 - yz^3 \cos x)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

1. Quel est le domaine de définition de ω ?
2. Identifier le champ vectoriel $\vec{A}$ associé à ω.
3. Calculer $\mathrm{d}\omega$ tout en précisant le degré de cette forme.
4. On se donne sur $\mathbf{R}^3$ la 1-forme, $\alpha = \dfrac{1}{2}y^2z^3 \cos x\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}y^2z^2 \sin x\,\mathrm{d}z$.

   Identifier le champ de vecteurs $\vec{V}$ associé à α et donner le domaine de définition de α.
5. Calculer $\mathrm{d}\alpha$ tout en précisant le degré de cette forme.
6. Déterminer la valeur de a de telle sorte que $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

   Pour cette valeur particulière de a, préciser le lien entre $\vec{A}$ et $\vec{V}$.

7. Pour a quelconque, écrire ω comme $\omega = \mathrm{d}\alpha + \omega'$, tout en explicitant ω'.
8. Que vaut $\mathrm{d}\omega'$ et quel est son lien avec le champ $\vec{A}$?
9. Calculer l'image réciproque de $\mathrm{d}\omega'$ en coodonnées sphériques.
10. On considère les deux surfaces D et S de $\mathbb{R}^3$ définies respectivement par

$$D = \Big\{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leq 1,\ z=0\Big\}, \qquad S = \Big\{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\Big\}.$$

Identifier D et S, le bord ∂D, et préciser le domaine de $\mathbb{R}^3$ dont S est le bord.

11. Pour toute valeur de a, calculer la restriction de ω au plan $z=0$ et en déduire la valeur de l'intégrale de surface $\displaystyle\int_D \omega$.
12. Pour toute valeur de a, utiliser successivement les questions 7, 8, la formule de Stokes et la question 9 pour calculer l'intégrale de surface $\displaystyle\int_S \omega$.

33. THÉORÈME DE STOKES (Septembre 1998)

Dans le plan $\mathbf{R}^2$ orienté, on considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1. Quel est le domaine de définition, $\mathcal{D}$, de f.
2. Sur $\mathcal{D}$, calculer la 1-forme $\mathrm{d}f$.
3. Etablir un lien entre la fonction f et la forme différentielle ω de degré un définie sur $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par,

$$\omega \;=\; \frac{y(y-x)\,\mathrm{d}x + x(x-y)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\ .$$

4. Calculer $\mathrm{d}\omega$ et préciser sur quel domaine le calcul a un sens.
5. Soit le chemin orienté dans $\mathbf{R}^2$ suivant : $\gamma\ :\ [0,2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2,\ t \longmapsto (\cos t, \sin t)$, calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\oint_\gamma \omega$.
6. Cependant, pour cette 1-forme ω, le théorème de Stokes, $\displaystyle\int_S \mathrm{d}\omega = \oint_\gamma \omega$, avec S le disque unité centré sur l'origine, est-il valable ? Expliquer !
7. On introduit les coordonnées polaires définies par l'application différentiable,

$$\phi :]0,+\infty[\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbf{R}^2,\ (r,\theta) \longmapsto (x,y) = \phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Calculer les images réciproques $\phi^* f$ et $\phi^*\omega$.

34. VOLUME ET INTEGRALE SIMPLE (Septembre 2002)

Soit l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$. Etant donnée une courbe $y = f(x)$ avec $f(x) \geq 0$, et $x \in I$ pour un certain intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on peut générer un volume Ω dans $\mathbb{R}^3$, par révolution (rotation de 2π) de cette courbe autour l'axe Ox. La courbe $y = f(x)$ s'appelle génératrice. C'est cette symétrie de rotation qui permet de calculer le volume Ω ainsi engendré directement à l'aide d'une intégrale simple.

1. Pour $x \in I$ fixé, donner l'aire $A(x)$ d'un disque de normale $\hat{e}_x$, de centre $(x, 0, 0)$ et de rayon $f(x)$, disque obtenu par révolution autour de l'axe x du segment de droite $[(x, 0, 0)\ ,\ (x, f(x), 0)]$.

   Ω est donc une juxtaposition de tels disques pour x variant dans I et son volume est donné comme l'intégrale simple sur I de la fonction $A(x)$, $\int_I A(x)dx$.

   Dessiner une situation générique de ce cas de figure.

2. En particulier, une boule B centrée sur l'origine et de rayon $R > 0$ a pour génératrice un demi-cercle de centre l'origine et de rayon $R > 0$.

   Donner l'équation $y = f(x)$ avec $f(x) > 0$, de ce demi-cercle tout en précisant l'intervalle I dans lequel varie x. Esquisser cette courbe dans le repère $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y)$.

3. Retrouver le volume de la boule B à l'aide de la question 1.

4. On *supprime* à présent deux calottes sphériques en tronquant la boule B par deux plans $P_\pm$ d'équations respectives $x = h$ et $x = -h$ avec $0 \leq h \leq R$. On note par V le nouveau solide ainsi obtenu.

   Déterminer le rayon r et le centre des deux disques $D_\pm = B \cap P_\pm$.

   Que dire des cas limites $h = 0$ et $h = R$?

5. Calculer le volume du solide V à l'aide de la question 1.

6. On *perce* dans le solide V de part en part un cylindre $\mathcal{C}$ d'axe Ox, de rayon r et de longueur $2h$. On note $V' = V \setminus \mathcal{C}$ le nouveau solide ainsi obtenu, solide qui présente manifestement une symétrie de rotation autour de l'axe Ox.

   Dessiner le solide V'.

7. Déterminer l'équation $y = g(x)$ avec $g(x) > 0$, de la génératrice du cylindre $\mathcal{C}$ et calculer le volume de celui-ci à l'aide de la question 1.

8. En déduire que le volume de $V' = V \setminus \mathcal{C}$ ne dépend que de h et non plus du rayon R de la boule de départ. Qu'advient-il des cas limites $h = 0$ et $h = R$?