Postulats de la Mécanique Quantique

Postulat I

Principe de superposition. L'état d'un système est entièrement défini, à chaque instant t, par un vecteur $|\psi(t)\rangle$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}_t \simeq \mathcal{H}$.

Postulat II

1) *Principe de correspondance.* A toute observable classique A est associé un *opérateur self-adjoint* $\widehat{A}$ de l'espace des vecteurs d'état $\mathcal{H}$. On dit que $\widehat{A}$ est l'"observable quantique" représentant la grandeur physique A.

2) *Principe de quantification.* Quel que soit l'état $|\psi\rangle$ du système au moment où l'on effectue la mesure de la grandeur A, les seuls résultats possibles sont les valeurs propres de $\widehat{A}$.

3) *Principe de décomposition spectrale.*

i) Cas d'un spectre discret: si $|\psi\rangle$ représente l'état *normalisé* du système, la "probabilité" de trouver la valeur a lors d'une mesure de A est*

$$\mathcal{P}_\psi(a) = \langle P_a \rangle_\psi \qquad (\diamondsuit)$$

où $\langle P_a \rangle_\psi = \langle \psi | P_a | \psi \rangle$ désigne la *valeur moyenne* dans l'état $|\psi\rangle$ du projecteur propre P_a correspondant à la valeur propre a de $\widehat{A}$.

ii) Cas d'un spectre continu: lors d'une mesure de A, la quantité**

$$\mathcal{P}_\psi(\Delta) = \int_{a \in \Delta} d\langle P_a \rangle_\psi$$

* Si $|a,1\rangle, \ldots, |a,d_a\rangle$ est une base orthonormée du sous-espace propre $\mathcal{H}_a = P_a\mathcal{H}$, on a $P_a = \sum_{j=1}^{d_a} |a,j\rangle\langle a,j|$, donc l'expression

$$\mathcal{P}_\psi(a) = \sum_{j=1}^{d_a} |\langle a,j|\psi\rangle|^2. \qquad (\diamondsuit)$$

** Dans l'exemple d'un spectre continu non dégénéré, si $|a\rangle$ est un vecteur propre généralisé associé à la "valeur propre" a, on a l'expression

$$\mathcal{P}_\psi(\Delta) = \int_{a_1}^{a_2} |\langle a|\psi\rangle|^2 \, da.$$

représente la probabilité d'obtenir un résultat dans l'intervalle $\Delta =]a_1, a_2]$.

4) *Principe de réduction du paquet d'onde.* L'état du système immédiatement après une mesure ayant donné la valeur a est (dans le cas d'un spectre discret) représenté par

$$|\psi'_a\rangle = \frac{P_a|\psi\rangle}{||P_a|\psi\rangle||}$$

où P_a est le projecteur sur le sous-espace propre $\mathcal{H}_a$ associé à la valeur propre a de $\widehat{A}$.

Postulat III

Equation de Schrödinger généralisée. Soit $|\psi_0\rangle$ l'état d'un système à l'instant t_0. Tant que le système n'est soumis à aucune observation, son évolution temporelle est régie par l'équation différentielle

$$(\heartsuit) \qquad i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \widehat{H}|\psi(t)\rangle$$

— avec condition initiale $|\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle$ — où H est l'hamiltonien classique du système.

Axiomes de la théorie quantique de Schrödinger

Axiome I

i) La description d'une particule de masse m se fait à l'aide d'une *fonction d'onde* complexe $\psi(\vec{r},t)$ qui représente l'*état quantique* de cette particule.

ii) La probabilité de trouver, à l'instant t, la particule dans le volume $dv(\vec{r})$ est[1]

$$dP_t(\vec{r}) = |\psi(\vec{r},t)|^2 dv(\vec{r}).$$

iii) La fonction d'onde d'une particule plongée dans un potentiel $V(\vec{r},t)$ est solution de l'*équation de Schrödinger* [2]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t).$$

Axiome II

i) Les grandeurs physiques sont représentées par des opérateurs différentiels *auto-adjoints* A de l'espace des fonctions d'ondes.[3]

ii) La représentation de Schrödinger des composantes de la *position* et de l'*impulsion* quantiques est

$$X_j\psi(\vec{r},t) = x_j\,\psi(\vec{r},t) \qquad \text{(position)}$$

$$P_j\psi(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(\vec{r},t) \qquad \text{(impulsion)}$$

pour $j = 1,2,3$.

iii) La valeur moyenne des résultats d'une mesure de la grandeur physique A dans l'état quantique $\psi(\vec{r},t)$ normalisé est alors

$$\langle A\rangle = \int_{\mathbf{R}^3} \psi(\vec{r},t)^* A\psi(\vec{r},t)\,dv(\vec{r}).$$

Axiome III Après une mesure sur une système physique, on a en général *modifié* l'état quantique de ce système. C'est ce que l'on appelle la *réduction du paquet d'ondes.*

[1] Axiome de Born donnant à la fonction d'onde le statut d'*amplitude de probabilité* : la fonction d'onde doit être *normalisée*, i.e. $\int_{\mathbf{R}^3}|\psi(\vec{r},t)|^2dv(\vec{r}) = 1$ (probabilité 1 de trouver la particule dans tout l'espace).

[2] L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles linéaire : toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution. L'interprétation des interférences quantiques repose sur cette loi de *superposition* des fonctions d'ondes.

[3] Ces opérateurs vérifient $\int(A\psi(\vec{r},t))^*\psi(\vec{r},t)\,dv(\vec{r}) \equiv \int\psi(\vec{r},t)^*A\psi(\vec{r},t)\,dv(\vec{r})$.