Chapitre 1

Physique et mécaniques, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

→ Principes de la démarche scientifique

→ Cadre d'étude de la physique

→ Définition des mécaniques

→ Notions de physique fondamentale moderne

→ Ordres de grandeur des différents domaines de la physique

• Compétences

→ Conversions entre systèmes d'unités

→ Manipulation des expressions littérales

→ Analyse dimensionnelle pour vérifier un résultat et pour obtenir une formule

→ Estimation d'ordres de grandeur

→ Présentation d'un résultat numérique (3 chiffres significatifs et unités)

• Lecture conseillée

Notions de physique	Young et Freedman (2013)	Hecht (1999)
Nature de la physique	1.1 à 1.6 p1-10	ch1 p1-26

1.1 Introduction

1.1.1 Physique et démarche scientifique

La physique se veut une description de la nature. Les buts de la physique sont, d'une part, de décrire le plus simplement possible les expériences en utilisant un nombre limité de grandeurs cohérentes, et d'autre part, d'expliquer la multiplicité des phénomènes sur la base d'un nombre limité d'hypothèses.

En d'autres termes, la physique utilise une description mathématique des phénomènes et, pour que les calculs soient réalisables, il est nécessaire de simplifier la complexité.

Le principe de la démarche scientifique correspond à des allers-retours permanents entre expériences, modèles et théories. La physique repose sur des observations, qui peuvent être trompeuses, et sur des expériences qui doivent être reproductibles. La description des phénomènes observés passe alors par une phase de modélisation où les physiciens essayent, après diverses hypothèses et approximations, de trouver les lois mathématiques cachées derrière le comportement, le mouvement des objets physiques. Ensuite, les physiciens essayent d'entrer dans une phase « explicative » des phénomènes, ils élaborent une théorie. On essaye d'expliquer le pourquoi d'un ensemble de phénomènes. La théorie doit non seulement nous aider à comprendre l'unité sous-jacente d'un ensemble de lois, mais elle doit aussi (et surtout) faire des prédictions, c'est-à-dire prédire l'existence de nouveaux phénomènes.

Une loi ou une théorie n'est jamais vraie, son caractère est provisoire : elle est seulement plus efficace que les autres à un certain moment. De plus, on ne peut pas démontrer que quelque chose est vrai ! On peut seulement réfuter... Une loi ou une théorie n'est jamais fausse : elle a un domaine de validité, son temps de vie est limité... Les physiciens ont alors inventé la notion de « principe », une sorte d'« idée unifiante », à partir duquel on développe un raisonnement permettant de démontrer un ensemble de lois et de décrire une grande diversité de phénomènes qui apparaissaient au départ déconnectés. Derrière le principe se cache la notion de symétrie, directement reliée à des propriétés mathématiques. Raison pour laquelle les théories sont en général associées à des structures mathématiques relativement lourdes. Nous découvrirons plusieurs principes de base dans ce cours.

L'objectif de votre cursus en physique est de vous faire découvrir petit à petit la richesse de cette description de la nature. Einstein disait de la physique :
« La chose la plus incompréhensible du monde est que le monde soit compréhensible ! »

1.1.2 Les mécaniques

Dans le langage courant on utilise le mot « mécanique » pour les sciences dont l'objet est l'étude et la conception de machines (mécanique automobile, navale, industrielle...). On peut être un bon mécano ou un bon bricoleur sans avoir besoin de connaître les lois et les principes sous-jacents au fonctionnement de ces machines, mais ce n'est pas le cas d'un ingénieur ou d'un docteur spécialisé dans ces domaines. Cependant les techniques nécessaires pour l'étude profonde des machines ne seront abordables qu'à partir de votre troisième année d'études supérieures. Dans ce cours nous allons étudier des phénomènes beaucoup plus simples nécessitant une modélisation et un formalisme mathématique allégé qui malheureusement vous semblera déjà particulièrement lourd !

Le cours porte sur la mécanique dite « classique » qui s'intéresse à la compréhension du mouvement. En fait, elle englobe déjà nombre de mécaniques différentes selon la nature des systèmes physiques étudiés (par exemple : mécanique des solides, des fluides... allez sur wikipedia pour en avoir un aperçu plus exhaustif : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Mecanique). Nous nous intéressons aux trois premières branches de la mécanique classique :

- la cinématique : *correspond à la description du mouvement* ;
- la statique : *correspond aux conditions d'équilibre et de repos* ;
- la dynamique : *correspond à l'étude des causes du mouvement.*

Dans les trois premiers chapitres nous analyserons le mouvement d'un unique point matériel animé de mouvements rectilignes, paraboliques ou circulaires. Dans les chapitres suivants nous approfondirons ces notions, étendrons notre étude aux mouvements vibratoires/oscillants et aux systèmes constitués de deux points. C'est en deuxième année que les systèmes physiques étudiés se compliqueront. Les aspects de la mécanique classique que nous allons étudier dans ce cours s'appellent communément « physique newtonienne ».

Jusqu'à présent votre cursus en physique limitait au maximum l'utilisation de l'approche mathématique et insistait surtout sur les notions de physique afin de vous fournir une culture particulièrement large. Lors de vos études supérieures un nouveau seuil doit être franchi : vos cours ne seront plus de la culture en physique mais chercheront à vous donner une formation pour devenir physicien. Il vous faudra devenir capable d'analyser un problème, puis de le modéliser, de le résoudre, d'en modifier le contexte ou les paramètres afin de faire des prédictions, et enfin d'évaluer vos résultats. Quel que soit votre futur métier (technicien, ingénieur, docteur...) ces compétences vous seront indispensables. Notre objectif est de vous les apprendre à travers l'étude de la physique.

1.2 Un aperçu de physique fondamentale

Les physiciens du XXe siècle ont transformé notre vision du monde sur de nombreux niveaux. En premier lieu, on possède aujourd'hui une interprétation microscopique des phénomènes macroscopiques : on peut placer l'atome au centre de notre compréhension.

L'idée que la matière est composée de briques élémentaires n'est pas nouvelle. Les Grecs anciens (Ve siècle av. JC) avaient introduit cette notion grâce à un raisonnement philosophique. Les chimistes des XVIIIe et XIXe siècles l'ont réintroduite avec les éléments chimiques dans le cadre d'un modèle de la matière pour tenter d'expliquer leurs expériences. Depuis une trentaine d'années on sait prendre des photos des atomes ! Le concept est devenu réalité grâce au développement des technologies expérimentales.

La plupart des phénomènes que l'on observe peuvent se comprendre à l'aide de quatre forces fondamentales :
- **la gravitation** qui décrit l'attraction entre les corps massifs,
- **l'électromagnétisme** qui décrit le jeu entre les charges électriques et qui est la base des phénomènes électriques, magnétiques et lumineux,
- **l'interaction nucléaire forte** expliquant la cohésion du noyau des atomes,
- **l'interaction nucléaire faible** décrivant les phénomènes radioactifs comme la mutation spontanée de particules en d'autres particules plus légères.

On peut se construire une vision (actuelle) du monde en plaçant l'ensemble des phénomènes, ou les divers domaines de la physique, sur trois branches partant de l'atome et allant vers trois « infinis » distincts (voir la figure 1.1). Notons dès à présent que l'infini est un concept abstrait, de nature plutôt mathématique, qui n'existe pas vraiment en physique, ou du moins on n'en sait rien encore. Un physicien devrait parler d'extrêmes plutôt que d'infinis...

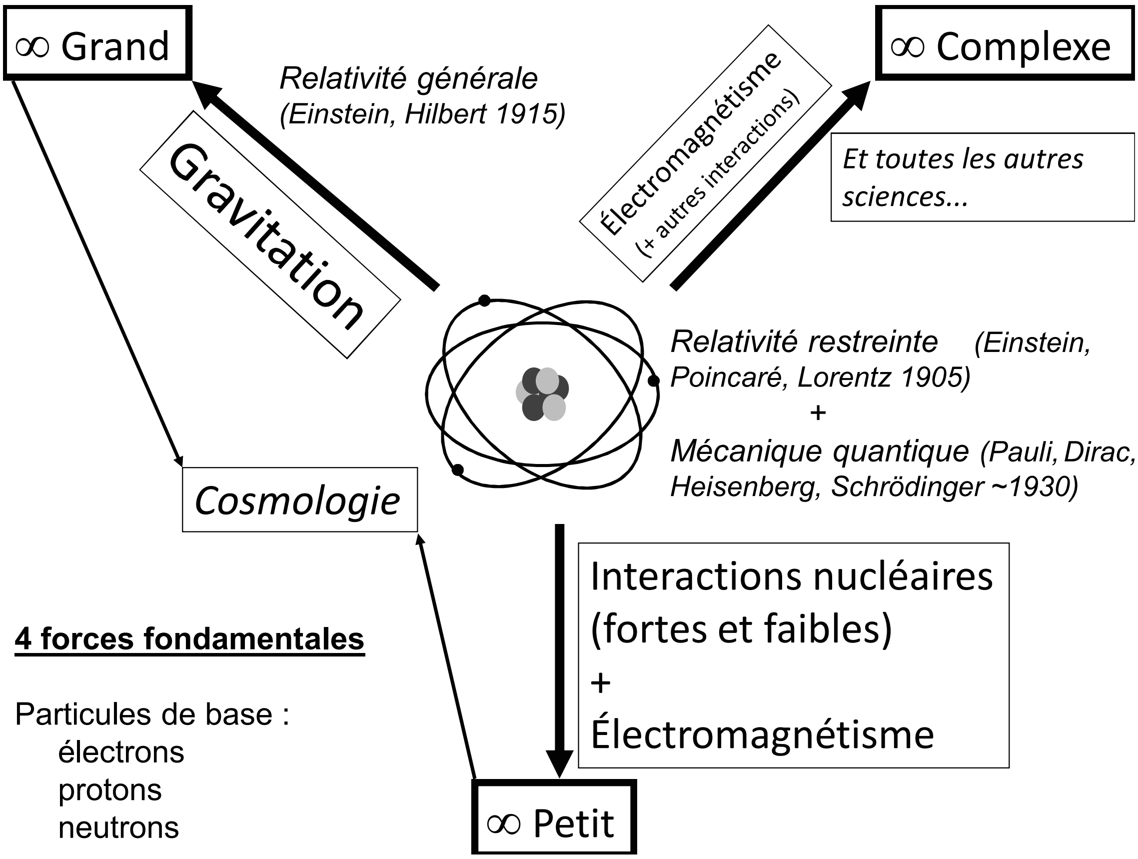

FIGURE 1.1 – Les 4 interactions fondamentales et les 3 infinis

La première branche est celle de l'infiniment grand où règne en maître la gravitation. Dès qu'on dépasse les assemblages de 10^{24} atomes environ (nombre associé à l'échelle du gramme et de la constante d'Avogadro) la gravité domine et agglomère les atomes en des structures de plus en plus grosses : en partant des planètes et en passant par les étoiles, les galaxies et les amas de galaxies, on arrive à la structure filamentaire de l'univers à grande échelle. Ceci est le domaine des astronomes, astrophysiciens et cosmologues.

La seconde branche est celle de l'infiniment petit, où se trouvent les trois autres interactions fondamentales, dites microscopiques. En fait, un atome a une structure relativement complexe. Sa stabilité est assurée par l'électromagnétisme qui explique pourquoi les électrons du nuage électronique sont liés au noyau. Les charges négatives des électrons sont attirées par les charges positives du noyau. C'est le domaine de la physique atomique.

Cependant, pour comprendre la cohésion du noyau qui est constitué de protons et de neutrons, on est obligé de rajouter une nouvelle force, l'interaction nucléaire forte. Mais cette cohésion n'est pas parfaite, et les processus radioactifs impliquent l'introduction de l'interaction nucléaire faible. Le domaine de la physique nucléaire est particulièrement compliqué car les trois interactions microscopiques y jouent un rôle important simultanément.

Néanmoins, en sondant la matière à des distances plus petites encore, en utilisant des énergies plus fortes, on rentre dans le domaine de la physique des particules, dans l'univers des quarks et des gluons, des leptons et des hadrons, des fermions et des bosons, où il devient alors possible d'étudier les trois interactions microscopiques séparément.

La troisième branche concerne celle de l'infiniment complexe. Un atome est globalement électriquement neutre. Cependant, dans un atome, les charges électriques ne sont pas situées au même endroit, ce qui permet l'existence de forces électriques (et magnétiques) résiduelles. C'est ainsi que les atomes vont pouvoir s'assembler pour former des molécules, et les molécules s'assemblent entre elles, soit en réseau pour former les liquides et les solides, soit en macromolécules comme les acides aminés ou l'ARN qui par succession d'assemblages vont nous amener à des choses assez surprenantes telle que la vie...

Sur cette branche, l'interaction dominante est celle de l'électromagnétisme mais elle est rapidement obscurcie par la complexité. En physique, la science fondamentale qui s'intéresse aux propriétés des corps macroscopiques est la thermodynamique, où vous étudierez le jeu entre les atomes et les molécules définissant ce qu'on appelle température, pression ou entropie. En utilisant une vision microscopique des choses, vous entrerez dans le domaine de la physique statistique et vous découvrirez que l'entropie est une mesure de la complexité...

En fait, on peut placer sur la branche de l'infiniment complexe quasiment tous les domaines de la physique et même toutes les sciences y compris les sciences humaines et sociales ! La physique du solide, l'hydrodynamique, les systèmes dynamiques (ou théorie du chaos), la physique moléculaire, la chimie, la biologie, la psychologie, la philosophie... en font partie.

Quels rapports avec la mécanique ? Cette question est légitime, mais derrière ces trois branches sont cachées les théories physiques et mathématiques qui permettent la description et l'interprétation des phénomènes expérimentaux et observationnels [1]. La mécanique « classique » que nous allons étudier dans ce livre va nous permettre d'étudier les phénomènes qui sont gros, lents et pas trop compliqués ! Néanmoins, nous allons introduire plusieurs concepts qu'il sera

1. Sur la branche de l'infiniment grand ce sont des observations et non des expériences qui sont réalisées pour obtenir de l'information.

indispensable de maîtriser pour étendre le domaine de validité de la mécanique classique. Par exemple, la notion d'énergie, essentielle, est à la base de toutes les théories de physique moderne.

• Mécaniques non classiques et constantes fondamentales

La première extension de la mécanique est associée au **principe d'Einstein** qui *stipule qu'aucune particule, ou information sous forme d'énergie, ne peut aller plus vite qu'une certaine vitesse, notée c, appelée communément vitesse de la lumière.* Bien entendu, cette idée trouve sa source dans des observations (l'image des satellites de Jupiter à la fin du XVII^{e}) puis dans des expériences d'optique (fin du XIX^{e}), qui ont permis de mesurer la vitesse de la lumière. Ensuite, la nécessité d'unifier les théories de la gravitation de Newton et la théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell ont permis de comprendre le principe selon lequel rien ne va plus vite que la lumière [2]. Certains aspects des lois de Newton sont remis en cause.

Comme la vitesse est le rapport d'une longueur sur un temps (L/T), l'existence d'une vitesse limite introduit une relation fondamentale entre l'espace (L) et le temps (T). On vient de voir apparaître la **notion d'espace-temps** qui est propre à la **mécanique relativiste**, appelée aussi **théorie de la relativité restreinte** introduite par Einstein en 1905. Des phénomènes inattendus, comme la dilatation du temps ou la contraction des longueurs, sont constatés tous les jours sur les particules de hautes énergies, mais nous n'en avons pas conscience car les vitesses des objets qui nous environnent sont très petites devant $c \approx 3\,10^8\,m/s$. Nous sommes lents !

La seconde extension, introduite par Einstein vers 1915, remplace la théorie de la gravitation de Newton par la **relativité générale** qui est à présent la théorie utilisée pour décrire les effets de la gravité. En un mot, Einstein a montré que les masses ont une influence sur les propriétés de l'espace-temps. On vit dans un espace-temps-matière ! Cette théorie est caractérisée par une constante, notée G et appelée constante de Newton ou constante universelle de la gravitation ou plus simplement constante gravitationnelle. Sa valeur $G = 6,67\,10^{-11}\,SI$ caractérise l'intensité de la force de gravitation ($SI \equiv$ Système International, voir plus bas).

La relativité générale a une origine purement théorique et a fait de nombreuses prédictions vérifiées auprès des corps célestes. C'est la théorie de l'infiniment grand et des corps massifs. L'application technologique principale qui lui est associée est le GPS qui a besoin des corrections relativistes pour fournir des informations précises. L'application conceptuelle la plus importante est la possibilité d'avoir une description physique globale de l'univers : la cosmologie physique est née en 1917 et les modèles de big-bang quelques années plus tard.

La troisième extension concerne l'infiniment petit et la nécessité d'introduire une nouvelle mécanique, nommée **mécanique quantique**. À l'échelle des atomes, la mécanique classique ne fonctionne plus, de nouvelles lois apparaissent

2. « Rien » est à définir si on fait une nuance entre énergie et information...

comme, par exemple, l'absence de précision absolue. On ne peut pas mesurer simultanément position et vitesse avec la précision que l'on veut, il y a une limite inférieure connue sous le nom de « relation d'incertitude de Heisenberg ». Le déterminisme est remplacé par les statistiques et les probabilités, le certain par l'incertain... Nous n'avons pas conscience de ces phénomènes surprenants car les atomes sont très petits par rapport à nous (nous calculerons dans la partie suivante que la taille caractéristique d'un atome est de l'ordre de l'ångström : $r_a \approx 10^{-10}m$). Nous sommes gros !

Le monde quantique est caractérisé par la constante de Planck, noté h et qu'on appelle « action ». Une action en physique est une énergie fois un temps, ce qui est équivalent à une position fois une masse fois une vitesse :
$h = 6,63\,10^{-34}\,J.s = 6,63\,10^{-34}\,kg.m^2.s^{-1}$.

Ceci doit commencer à vous sembler nébuleux, et c'est bien normal. Nous arrêtons là notre discussion sur les mécaniques non classiques, car nous avons déjà en main les constantes et les concepts qui vont nous permettre de trouver les formules et les ordres de grandeurs qui caractérisent les mondes des infiniments petits et grands. Dans la section suivante après avoir défini les unités et les dimensions, nous verrons qu'à l'aide des constantes fondamentales de la physique et du seul raisonnement dimensionnel il va nous être possible de calculer les tailles du noyau, d'un atome, d'une planète et d'une étoile, on pourra aussi calculer le nombre d'atomes qu'il y a dans $1\,g$ de matière, le nombre d'étoiles qu'il y a dans notre galaxie ou encore le nombre de galaxies qu'il y a dans l'univers observable.

1.3 Analyse dimensionnelle, ordres de grandeur

1.3.1 Unités, dimensions et présentation des résultats

• Principes

Contrairement à vos habitudes du lycée, dans l'enseignement supérieur il vous est demandé de **présenter vos résultats sous forme « littérale »**, c-à-d à l'aide de symboles représentant les quantités physiques. On parle aussi d'expression « symbolique » ou « fonctionnelle ». Cet effort d'abstraction qui vous est demandé est un point crucial de votre formation car cela vous permettra, entre autre, de :
- vérifier un résultat après un raisonnement rigoureux,
- obtenir une formule après un raisonnement intuitif,
- comprendre la dépendance fonctionnelle d'une quantité par rapport aux paramètres et variables dont elle dépend.

Ce dernier point est repris tout au long de ce livre, où chaque quantité physique sera traitée comme une fonction et non comme un nombre (ou un ensemble de nombres). Les valeurs des quantités physiques ne seront traitées qu'à la fin du raisonnement dans le cadre d'une application numérique (d'acronyme AN). Les deux premiers points sont propres à l'analyse dimensionnelle, objet d'étude du reste de ce chapitre.

Cette approche devient indispensable lorsque les problèmes, et donc les calculs, se compliquent : on peut toujours avoir un doute sur le résultat obtenu, et très souvent un simple raisonnement dimensionnel nous permet de constater une erreur. On l'utilisera fréquemment dans ce cours et nous vous conseillons de l'utiliser systématiquement lorsque vous obtiendrez un résultat. En général, un correcteur d'examen est sans pitié lorsqu'une réponse est fausse du point de vue dimensionnel...

L'analyse dimensionnelle peut aussi se révéler très puissante pour obtenir des formules, des expressions littérales de certaines quantités physiques, à partir de simples raisonnements intuitifs. Nous donnerons quelques exemples de ce type de raisonnement dans la section suivante. Il est possible de déterminer l'expression d'une loi en une ou deux lignes de calculs élémentaires alors qu'une approche rigoureuse demandera plusieurs pages de calculs après avoir lu plusieurs chapitres d'un livre, voire plusieurs livres !

Le raisonnement à appliquer est le suivant :
- la quantité recherchée (l'inconnue) est proportionnelle *au produit*[3] des quantités fournies par l'énoncé ou par le raisonnement intuitif (les paramètres).
- les paramètres possèdent une certaine puissance que l'on détermine soit par déduction directe si le problème est simple, soit en posant un système de n équations à p inconnues ($n \geq p$) que l'on résout par analyse dimensionnelle. (p correspond au nombre de paramètres et n au nombre de dimensions de base intervenant dans les diverses quantités physiques du problèmes (les paramètres et l'inconnue) ; si $p > n$ il pourra exister plusieurs solutions).

Cependant, il faut bien garder à l'esprit, que **l'analyse dimensionnelle n'est qu'une méthode intuitive et approximative : rien ne garantit la véracité du raisonnement et le résultat ou la formule ne sont possiblement vrais qu'à une constante près.** En d'autres mots, c'est « de la physique avec les mains » ! Seuls des raisonnements rigoureux, sujets des autres chapitres de ce livre, vous permettront d'obtenir des résultats plus précis.

• Unités et dimensions

Concernant les unités, nous utilisons le système international noté *SI* ou *MKSA* pour *Mètre Kilogramme Seconde Ampère*. Parfois il est judicieux d'utiliser d'autres unités (kilomètre, heure...). Nous considérons que vous êtes capable d'effectuer les changements d'unités (toutefois un rappel est donné ci-dessous).

La dimension est la grandeur physique associée à un objet physique indépendamment de l'unité utilisée pour la mesure de l'objet. Ainsi :
- la dimension « longueur » sera notée L et son unité m ;
- la dimension « masse » sera notée M et son unité kg ;

3. Pour qu'il y ait une « somme » il faut avoir plusieurs termes possédant la même dimension, cela peut arriver bien sûr, mais on est alors confronté à un problème trop complexe pour le raisonnement dimensionnel. Une approche rigoureuse est indispensable. L'analyse dimensionnelle permet alors seulement de vérifier la comptabilité des différents termes à sommer.

- la dimension « temps » sera notée T et son unité s.
On dit que deux quantités physiques sont **« homogènes »** si elles ont **la même dimension**.

Exemples : La vitesse v d'un objet est le rapport d'une longueur sur un temps, on écrit alors : $[v] = LT^{-1}$. On utilise des crochets [ ] pour exprimer le fait qu'on ne s'intéresse qu'à la dimension de l'objet considéré. L'accélération a pour dimension $[a] = LT^{-2}$.

Dès que l'on s'intéresse aux forces électromagnétiques, il est nécessaire de rajouter une nouvelle grandeur [4] : la charge électrique (notée q pour une particule ou Q pour un objet macroscopique). **La dimension « charge » sera notée C et son unité, le Coulomb, sera notée également C.**

Il ne faut pas confondre dimension et unité. En effet, une quantité physique a une et une seule dimension, en revanche elle peut être exprimée dans plusieurs systèmes d'unités différents. Par exemple, un physicien exprime une longueur en mètre, un astronome en parsec et un vulgarisateur parlant des étoiles ou des galaxies utilise l'année-lumière...

Le changement d'unité s'effectue par un simple facteur de conversion. Ce facteur peut sembler difficile à obtenir si la quantité physique a une dimension compliquée faisant intervenir un produit d'unités avec des puissances différentes. Cependant, ce facteur de conversion s'obtient simplement en utilisant l'astuce suivante : on multiplie par un facteur 1 défini comme le rapport des unités à convertir en respectant l'ordre « nouvelle unité / ancienne unité » pour une unité au numérateur, ou l'inverse pour une unité du dénominateur (voir exercice de cours C1.1 ci-dessous).

• Applications numériques et incertitudes

Enfin, précisons que **pour toutes les applications numériques**, où le résultat est exprimé sous la forme d'un nombre, **on ne précisera que trois chiffres significatifs, afin d'avoir une précision inférieure à 1%, et on donnera toujours l'unité associée à la quantité physique calculée.**

Le terme « précision » est flou. On définit de façon élémentaire deux types d'incertitudes pour une quantité physique donnée. Soit x une quantité physique. Soit x_r sa « valeur de référence » qui peut être soit une valeur moyenne, soit une valeur théorique, ou tout autre type de valeur que l'on croit être la plus proche de la véritable quantité physique recherchée. Soit x_e la « valeur estimée » qui peut être soit une valeur expérimentale, soit une valeur associée à un modèle spécifique ou à une approximation particulière.
- **L'incertitude absolue**, notée Δx, est telle que $\boldsymbol{\Delta x = |x_r - x_e|}$. La quantité physique et Δx sont homogènes (même dimension).
- **L'incertitude relative**, notée $\Delta x/x$, est telle que $\boldsymbol{\Delta x/x = |(x_r - x_e)/x_r|}$. L'incertitude relative $\Delta x/x$ est sans dimension.

On peut, à présent, clarifier le sens du terme « précision » du paragraphe précé-

4. En toute rigueur, dans le système MKSA, c'est le courant électrique I (avec l'unité Ampère A) qu'il faudrait introduire, mais nous préférons la charge C dans ce livre.

dent : ne retenir que 3 chiffres significatifs à la valeur numérique d'une quantité physique correspond à une approximation dont l'erreur relative est inférieure à 1%. Par exemple, la vitesse limite relativiste $c = 299\,792\,458\,m/s \equiv x_r$ peut être approchée par la valeur $c \simeq x_e = 3,00\,10^8\,m/s$, ce qui donne une erreur absolue $\Delta x = 2,08\,10^6\,m/s$ et une erreur relative $\Delta x/x = 0,07\%$. Autre exemple : si $x_r = 102,5$ et $x_e = 102$ on obtient $\Delta x/x = 0,49\%$.

En fait les notions d'incertitudes et d'erreurs vont bien au-delà des définitions élémentaires précédentes. En toute rigueur une incertitude est généralement associée à un intervalle de confiance, ce qui nécessite, pour être proprement défini, d'entrer dans le domaine des statistiques et des probabilités... Dans ce livre, nous ne rentrerons pas dans les détails de cette complexité, et nous donnerons uniquement les valeurs centrales des quantités physiques et des constantes fondamentales, mais n'oubliez pas que toute valeur n'est qu'approximative et possède une incertitude [5]...

• Exercice de cours C1.1 – Conversions

Effectuer les conversions et donner les dimensions des grandeurs concernées :
1) Votre dernier voyage a duré une heure et quinze minutes. Donner le temps du trajet en minutes, en heures et en secondes.
2) Le jour sidéral dure $T_S = 86\,164\,s$, exprimer cette durée en heures, minutes et en valeurs entières avec un mélange des unités heures, minutes et secondes.
3) La vitesse du son dans l'air est de $340\,m/s$, exprimer cette vitesse appelée « Mach 1 »en km/h.
4) Le débit d'une source est de 3 litres par minute. Combien de cuves de $1\,m^3$ vous faut-il si vous voulez récupérer toute l'eau fournie en une journée ?

Réponses

1) Soit $t = 1\,h\,15\,min$ le temps de trajet. On a :

$$\begin{aligned} t = 1\,h\,15\,min &= 1\,h\frac{60\,min}{1\,h} + 15\,min = 75\,min \\ &= 75\,min\frac{1\,h}{60\,min} = 1,25\,h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 1\,h\,15\,min &= 1\,h + 15\,min\frac{1\,h}{60\,min} = 1,25\,h \\ &= 75\,min\frac{60\,s}{1\,min} = 4500\,s \\ (ou) \quad &= 1,25\,h\frac{3600\,s}{1\,h} = 4500\,s \\ (ou) \quad &= 1\,h\frac{3600\,s}{1\,h} + 15\,min\frac{60\,s}{1\,min} = 4500\,s \end{aligned}$$

La dimension de t est un temps : $[t] = T$.

5. Exceptée la vitesse de la lumière dans le vide, depuis 1983, mais ceci est une autre histoire qui vous sera contée dans un cours de relativité restreinte...

2) La dimension de T est un temps : $[T_S] = T$. Les conversions donnent :

$$\begin{aligned}
t = 86164\,s &= 86164\,s\frac{1\,h}{3600\,s} = 23,934\,h \\
&= 86164\,s\frac{1\,min}{60\,s} = 1436,067\,min \\
&= 23\,h + 0,934\,h\frac{60\,min}{1\,h} = 23h\,56,067\,min \\
&= 23\,h + 56\,min + 0,067\,min\frac{60\,s}{1\,min} = 23\,h\,56\,min\,4\,s
\end{aligned}$$

3) Dans cet exemple il y a deux unités différentes à changer simultanément :

$$v = 340\,m.s^{-1} = \frac{340\,m}{1\,s}\frac{1\,km}{1000\,m}\frac{3600\,s}{1\,h} = 340 \times 3,6\,km.h^{-1} = 1224\,km.h^{-1}$$

La dimension d'une vitesse vaut : $[v] = LT^{-1}$.

4) Dans cet exemple le changement d'unité est « multiple », car $1\,l = 1\,dm^3 = 10^{-3}\,m^3$ et $1\,j = 24\,h = 24 \times 60\,min = 1440\,min$:

$$\begin{aligned}
d = 3\,l.min^{-1} &= \frac{3\,l}{1\,min}\frac{1\,dm^3}{1\,l}\frac{1\,m^3}{1000\,dm^3} \times \frac{60\,min}{1\,h}\frac{24\,h}{1\,j} = 3 \times \frac{1440}{1000}\,m^3.j^{-1} \\
&= 3 \times 1440 \times 10^{-3}\,m^3.j^{-1} = 4,32\,m^3.j^{-1}
\end{aligned}$$

Il faudra donc 5 cuves. La dimension du débit vaut : $[d] = L^3T^{-1}$.

• **Exercice de cours C1.2 – Dimensions**

Lors de l'étude du mouvement circulaire et uniforme, on s'intéressera aux propriétés d'un point situé à la distance r du centre de rotation et animé de la vitesse v. On définit l'accélération centripète comme $a_c = v^2/r$. La quantité $\omega = v/r$ est appelée vitesse angulaire.
1) L'accélération centripète est-elle homogène à une accélération ?
2) La vitesse angulaire est-elle homogène à une vitesse ?

Réponses

1) La dimension de l'accélération centripète vaut $[a_c] = [v^2/r] = L^2T^{-2}/L = LT^{-2}$ ce qui est bien la dimension d'une accélération $[a] = [\Delta v/\Delta t] = [dv/dt] = LT^{-1}/T = LT^{-2}$. Pas de soucis ce coup-ci.

2) Deux quantités sont homogènes si leurs dimensions sont identiques. On a vu que la dimension d'une vitesse vaut $[v] = LT^{-1}$, en revanche la dimension de la vitesse angulaire vaut $[\omega] = [v/r] = T^{-1}$. La vitesse angulaire n'est donc pas une vitesse au sens usuel du terme ! *Il faut toujours se méfier du vocabulaire employé par les physiciens, qui est parfois trompeur...* Un nom plus adapté pour cette quantité pourrait être « fréquence angulaire ». La précision « angulaire » sera étudiée et comprise dans le chapitre 2.

1.3.2 Angle : dimension et unités

Avant de passer aux sections suivantes qui sont de simples applications du raisonnement dimensionnel, nous voulons vous faire réfléchir sur la nature des angles et de leurs unités. **Les angles sont des objets sans dimension : $[\boldsymbol{\theta}] = 1$.** Pourtant on leur attribue des unités ! Dans vos études précédentes vous avez surtout utilisé les *degrés*, dans la vie de tous les jours on parle surtout de *tours* mais en mathématiques les *radians* ont été introduits et en particulier le nombre π. Voici la correspondance entre ces diverses unités :

$$\mathbf{1}\ \boldsymbol{tour}\ (\boldsymbol{tr}) \ = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{radians}\ (\boldsymbol{rad}) \ = \mathbf{360}\ \boldsymbol{degrés}\ (^\circ)$$

Dans vos études supérieures vous allez devoir jongler avec ces trois unités car le tour est facilement visualisé par notre esprit, les degrés sont utilisés dans les sciences expérimentales, mais pour la théorie, quand on a des calculs compliqués à faire, on utilise les radians.

La compréhension de ce dernier point fait appel à la « magie » du nombre π : ce nombre fait le lien entre le « droit » et le « courbe », entre les angles et les distances. La définition géométrique de π est associée au rapport du périmètre (P) d'un cercle sur son diamètre (D) : $\boxed{\boldsymbol{\pi = P/D}}$. Cette définition nous montre bien que c'est un nombre sans dimension : $[\pi] = [P/D] = L/L = 1$. Tous les angles ont la même propriété que π : ils sont sans dimension.

On peut affiner notre compréhension en se souvenant que la longueur d'un arc de cercle (ℓ) de rayon R délimité par un angle θ est égal au produit du rayon par l'angle : $\ell = R\theta$. Du point de vue des dimensions ça nous donne $[\ell] = [R\theta] \ \Rightarrow \ [\theta] = [\ell/R] = L/L = 1$: θ est sans dimension.

Cependant, il est fondamental de réaliser que **cette correspondance entre longueur droite et longueur courbe est réalisée avec des angles exprimés en radians**. Ainsi **l'unité naturelle en physique et en mathématique est le radian**. Dès qu'un produit de grandeurs physiques est homogène à un angle, l'unité à utiliser est le radian. Et comme les angles sont sans dimension, écrire lors d'une application numérique *rad* ou rien du tout, a peu d'importance. En revanche, si on utilise une autre unité d'angle, il est crucial de l'indiquer afin de se rappeler qu'on ne pourra pas multiplier ce nombre par une longueur pour obtenir une autre longueur. Afin d'éviter toute confusion, il est préférable de toujours indiquer l'unité d'angle utilisée.

Enfin, nous allons avoir besoin, dans certaines parties de ce livre, de formules donnant des valeurs approximatives des fonctions trigonométriques. *Lorsque les angles sont petits et* ***exprimés en radians*** on peut utiliser les relations :

$$\text{si } \theta\,(rad) << 1 \quad \text{alors} \quad \sin\theta \simeq \theta \quad , \quad \tan\theta \simeq \theta \quad , \quad \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Ces formules fort utiles sont appelées « développements limités » et sont décrites plus en détails dans le formulaire mathématique (annexe A) de cet ouvrage. Ces formules nous montrent que les angles, tout comme les fonctions trigonométriques, sont des objets sans dimension...

1.3.3 Exercice de cours C1.3 – Forces, énergies, actions

1) La seconde loi de Newton, ou relation fondamentale de la dynamique classique, stipule qu'une force est proportionnelle au produit de la masse et de l'accélération (si la masse est constante). Calculer la dimension d'une force.
2) La force de gravitation exprime l'interaction entre deux corps de masse m et m' séparés par une distance r. Son expression est donnée par la relation $F_G = Gmm'/r^2$ où la constante $G = 6,67\,10^{-11}\,SI$ représente l'intensité de la force gravitationnelle. Déterminer la dimension de G et son unité.
3) La force électrique exprime l'interaction entre deux corps de charge q et q' séparés par une distance r. Son expression est donnée par la relation $F_e = k_e qq'/r^2$ où la constante $k_e = 8,96\,10^9\,SI$ représente l'intensité de la force électrique (souvent, la constante k_e est écrite sous la forme $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ où ϵ_0 est la « permittivité » du vide, notion qui sera étudiée dans un cours d'électromagnétisme). Déterminer la dimension de k_e et son unité.
4) On appelle « travail d'une force » l'énergie associée au mouvement causé par la force. Le travail, noté W, est proportionnel au produit de l'intensité de la force et du déplacement effectué. En déduire la dimension d'une énergie.
*5) **Détermination de l'expression de l'énergie cinétique :***
Sachant que l'énergie cinétique d'un objet est proportionnelle à sa masse et à sa vitesse, calculer l'expression de l'énergie cinétique à une constante près.
6) Déterminer l'expression de la célèbre formule d'Einstein issue de la théorie de la relativité restreinte donnant l'énergie de masse d'une particule de masse m et faisant intervenir la constante fondamentale c (la vitesse limite de transmission des interactions). Estimer (en joules) l'énergie de masse d'un proton sachant que $m_p = 1,67\,10^{-27}\,kg$.
7) Une action est proportionnelle au produit de la position, de la masse et de la vitesse. Calculer la dimension d'une action et montrer qu'elle est homogène au produit de l'énergie et du temps. Quelle constante fondamentale est homogène à une action ? Quelle est la dimension de la constante de Planck « réduite » $\hbar = h/(2\pi)$?

Réponses

1) Par définition $[F] = [ma] = MLT^{-2}$.

2) On a $[G] = [Fr^2/(mm')] = [Fr^2/m^2] = MLT^{-2}L^2/M^2 = M^{-1}L^3T^{-2}$, d'où $G = 6,67\,10^{-11}\,m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.

3) On a $[k_e] = [Fr^2/(qq')] = [Fr^2/q^2] = MLT^{-2}L^2/C^2 = ML^3T^{-2}C^{-2}$, d'où $k_e = 8,9610^9\,kg.m^3.s^{-2}.C^{-2}$.

4) La dimension d'une énergie est par définition $[E] = [W] = [Fr] = ML^2T^{-2}$.

5) Pour la première fois, on demande de déterminer l'expression d'une formule ! On va appliquer la méthode donnée au début de la section 1.3.1.

L'énoncé nous dit que l'énergie cinétique E_c est une fonction de m et v : $E_c = f(m, v)$. Les quantités (paramètres) m et v ont pour dimensions : $[m] = M$ et $[v] = L.T^{-1}$. L'énergie cinétique (fonction inconnue des paramètres) a pour dimension $[E_c] = [W] = ML^2T^{-2}$.

Méthode 1 **: raisonnement intuitif direct**
Le simple examen des dimensions des trois quantités physiques impliquées dans le problème montre que $[E_c] = [mv^2] = ML^2T^{-2}$. Donc : $E_c \approx mv^2$.

Méthode 2 **: calcul brutal.** On pose :

$$E_c = m^x v^y \Rightarrow [m^x v^y] = M^x L^y T^{-y} = [E_c] = ML^2T^{-2} \Rightarrow \begin{cases} (M) : x = 1 \\ (L) : y = 2 \\ (T) : -y = -2 \end{cases}$$

Les deux dernières équations obtenues sur les dimensions de base L et T sont redondantes mais cohérentes. Le système a bien une solution unique donnant à nouveau : $E_c \approx mv^2$. Il faudra un raisonnement rigoureux pour obtenir le facteur numérique 1/2 qu'il manque à cette formule. Nous le ferons lors du chapitre 4 à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique classique et d'un peu de calcul différentiel.

6) L'énergie de masse E_M est reliée à la masse m de la particule et la vitesse c. On a vu qu'une énergie est homogène à une masse fois une vitesse au carré, donc $E_M \approx mc^2$. Vous montrerez dans votre cours de relativité que l'égalité est exacte : $E_M = mc^2$ (il n'y a pas de facteur 1/2 comme pour l'énergie cinétique). Pour un proton, on obtient $E_M^{proton} = m_p c^2 = 1,50\,10^{-10}\,J$.

7) Par définition $[A] = [rmv] = ML^2T^{-1}$. Par ailleurs, $[E.t] = ML^2T^{-2}T = ML^2T^{-1} = [A]$: une énergie fois un temps est bien homogène à une action. La constante de Planck h est homogène à une action. La constante de Planck réduite $\hbar = h/(2\pi)$ l'est aussi car les angles sont sans dimension : $[h] = [\hbar] = ML^2T^{-1}$ et $\hbar = 1,05\,10^{-34}\,J.s = 1,05\,10^{-34}\,kg.m^2.s^{-1}$.

1.3.4 Exercice de cours C1.4 – Atomes et noyaux

Les atomes sont des systèmes constitués d'électrons, de charge électrique négative $q_e = -1.60\,10^{-19}\,C \approx 10^{-19}\,C$ et de masse $m_e = 9,11\,10^{-31}\,kg \approx 10^{-30}\,kg$, en interaction électromagnétique avec un noyau de charge électrique positive. Le noyau est constitué de protons et de neutrons en interactions nucléaires. La masse du proton vaut $m_p = 1,6726\,10^{-27}\,kg \approx 10^{-27}\,kg$, et celle du neutron vaut $m_n = 1,6749\,10^{-27}\,kg \approx 10^{-27}\,kg$. La charge électrique des protons est positive et vaut « exactement » l'opposé de la charge des électrons[6] : $q_p = -q_e$. Les neutrons ont une charge globalement neutre[7] : $q_n = 0$.
Dans cet exercice et les suivants on utilisera la constante de Planck réduite $\hbar$ dès que des effets quantiques seront impliqués.

Partie A : Atomes

A1) Montrer que la force dominante dans les atomes est électromagnétique et non gravitationnelle. Pour cela, on étudiera l'atome le plus simple, l'atome

6. On n'a pas encore compris l'origine de cette exactitude... L'idée de « grande unification » tente d'apporter une solution à ce problème.

7. Les neutrons sont constitués de quarks qui, eux, possèdent des charges électriques non-nulles. Les neutrons possèdent donc des propriétés électromagnétiques. Historiquement, ce sont les mesures de ces propriétés qui ont amenée l'idée que les neutrons n'étaient pas élémentaires, qu'ils possédaient une sous-structure, les fameux quarks.

d'hydrogène, et on appellera r_a *la distance séparant l'électron du proton.*
A2) En physique atomique, c'est la constante $\mathrm{e}^2 = q_e^2/(4\pi\epsilon_0) = k_e q_e^2$ *qui est fréquemment utilisée. Fournir sa dimension, son unité et estimer sa valeur.*
A3) Dans le cadre de l'électrodynamique quantique (théorie quantique ($\hbar$*) et relativiste (c) de l'électromagnétisme (*e^2*)) on introduit une nouvelle constante, notée* α *et appelée « constante de couplage » de l'interaction électromagnétique. À partir des quantités* e^2*,* $\hbar$ *et c, donner l'expression puis estimer la constante de couplage* α*. Cette constante est sans dimension et plus petite que 1.*
A4) À partir des quantités e^2 *et* $\hbar$ *donner l'expression de la vitesse caractéristique des électrons dans les atomes, notée* v_a*. Donner l'expression de* v_a *en fonction de* α *et c. Estimer* v_a*.*
A5) À partir des quantités e^2*,* $\hbar$ *et* m_e*, donner l'expression de la taille caractéristique des atomes, notée* r_a*. Donner l'expression de* r_a *en fonction de* α*, c,* $\hbar$ *et* m_e*. Estimer* r_a*.*
A6) L'énergie d'ionisation caractéristique des atomes, notée E_H*, est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher les électrons extérieurs d'un atome. À partir des quantités* e^2*,* $\hbar$ *et* m_e*, donner l'expression de* E_H*. Déterminer* E_H *en fonction de* α*, c et* m_e*. Estimer* E_H *en J et en électron-Volt. (L'électron-Volt, noté eV, est l'unité d'énergie utilisée dans les domaines physiques de l'infiniment petit (physique atomique, physique nucléaire et physique des particules), la correspondance entre unités est donnée par la relation* $1\,eV = 1,60\,10^{-19}\,J$*.)*
A7) Comparer les différentes énergies intervenant dans le système physique « atome d'hydrogène ». En déduire l'origine de la masse des atomes, et finalement l'origine de la masse de la matière.
A8) À partir des quantités r_a *et* m_p*, donner l'expression puis estimer la densité en masse*[8] *caractéristique des atomes, notée* ρ_a*.*

Partie B : Noyaux et proton

Dans un noyau la force dominante est l'interaction forte, caractérisée par une constante de couplage $\alpha_s \approx 1$*.*
B1) À partir des résultats de la question A5, en fonction $\hbar$*, c,* m_p *et* α_s*, donner l'expression puis estimer la taille caractéristique des noyaux, notée* r_N*.*
B2) À partir des résultats de la question A6, donner l'expression en fonction c, m_p *et* α_s *de l'énergie caractéristique des noyaux, notées* E_N*. Estimer* E_N *(en J et en eV (ou GeV)). Commenter votre résultat à la lumière de vos connaissances en physique nucléaire.*
B3) À partir des quantités a_N *et* m_p*, donner puis estimer l'expression de la densité (en masse) caractéristique des noyaux, notée* ρ_N*. Comparer cette valeur à* ρ_a*.*
B4) Un proton est constitué de 3 quarks, dits « de valence », et de gluons. Les 3 quarks se répartissent en 2 quarks « up » et 1 quark « down » (le neutron est constitué de 2 « down » et 1 « up »). Les gluons ont une masse nulle, la masse du quark up vaut $m_u \simeq 3MeV/c^2 = 5,35\,10^{-30}\,kg$ *et celle du quark down vaut* $m_d \simeq 5MeV/c^2 = 8,91\,10^{-30}\,kg$*. Comparer la masse du proton à la somme des masses de ses constituants. Quelle conclusion en tirez-vous ?*

8. Dans ce livre, la masse volumique sera appelée abusivement « densité en masse » ou simplement « densité », une densité étant normalement un rapport sans dimension.

Partie C : Constante d'Avogadro, passage micro $\longleftrightarrow$ macro

C1) Rappeler les définitions de la constante d'Avogadro et de la mole, unité utilisé en physique et en chimie.
C2) Calculer la quantité $1/m_p$ en g^{-1}. Comparer votre résultat à $\mathcal{N}_A$.
C3) En supposant que proton et neutron ont la même masse m_p, calculer le nombre de protons (en fait, de nucléons) qu'il y a dans $1\,cm^3$ d'eau. Comparer votre résultat à $\mathcal{N}_A$. Essayer de développer une nouvelle interprétation de la constante d'Avogadro.
C4) Questions subsidiaires pour éviter toute confusion : Quel est le nombre de molécules d'eau dans $1\,cm^3$? Combien de cm^3 et de g d'eau faut-il pour avoir $\mathcal{N}_A$ molécules d'eau ?

Réponses de la partie A : Atomes

A1) L'intensité de la force gravitationnelle est donnée par $F_G = Gm_em_p/r_a^2$, et celle de la force électromagnétique par $F_e = k_e|q_e|q_p/r_a^2$. La quantité r_a n'est pas encore connue (elle sera calculée lors de la question A5). Pour s'affranchir de cette inconnue, le plus simple est de calculer le rapport des deux forces :

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{k_e|q_e|q_p}{r_a^2}\frac{r_a^2}{Gm_em_p} = 2,26\,10^{39} \tag{1.1}$$

On constate donc que la force gravitationnelle est totalement négligeable dans les atomes. La force qui lie électrons et noyaux dans les atomes est purement électromagnétique.

A2) Par définition et en utilisant la réponse de la question 3 de l'exercice C1.3, on a : $[e^2] = [k_eq_e^2] = [Fr^2] = [mar^2] = ML^3T^{-2}$, ce qui donne $e^2 = 2,5\,10^{-28}\,kg.m^3.s^{-2}$.

A3) *Méthode 1 : raisonnement intuitif direct*
On a $[e^2] = ML^3T^{-2}$, $[c] = L.T^{-1}$ et $[\hbar] = ML^2T^{-1}$. On constate immédiatement que le produit $\hbar c$ est homogène à e^2 : $[\hbar c] = ML^3T^{-2} = [e^2]$. Le rapport des deux facteurs $(\hbar c)$ et e^2 est sans dimension. Donc $\alpha \approx e^2/(\hbar c)$ ou l'inverse $\alpha \approx (\hbar c)/e^2$. C'est l'application numérique permettant d'estimer les ordres de grandeur de ces deux expressions qui nous permettra de trancher. Nous le faisons plus bas, après avoir présenté le raisonnement par calcul brutal.

Méthode 2 : calcul brutal
On pose : $\alpha = (e^2)^x c^y \hbar^z \;\Rightarrow\; [\alpha] = [1] = M^xL^{3x}T^{-2x}L^yT^{-y}M^zL^{2z}T^{-z}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(M) : x+z=0\\ (L) : 3x+y+2z=0\\ (T) : -2x-y-z=0\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}z=-x\\ y=-x\\ 0=0\end{array}\right.$$

Les trois équations obtenues ne sont pas indépendantes bien qu'elles soient cohérentes. On obtient une infinité de solutions, une pour chaque valeur de x. Les cas les plus simples correspondent à $x = 1$: $\alpha \approx e^2/(\hbar c)$, et à $x = -1$: $\alpha \approx (\hbar c)/e^2$. On retrouve le résultat obtenu par le raisonnement intuitif direct.

Les autres valeurs de x, excepté le cas trivial $x = 0$ ne donnant aucune information, correspondent en fait au même rapport sans dimension entre les trois constantes fondamentales, mais élevé à une puissance quelconque.

Numériquement on obtient $e^2/(\hbar c) = 7,275\,10^{-3}$ et $(\hbar c)/e^2 = 137,46$. Sachant que α est plus petit que 1, on en déduit que le cas $x = 1$ est le bon. **La constante de couplage électromagnétique vaut : $\boldsymbol{\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137}$.**

A4) Grâce à la question précédente, et en se rappelant que c est une vitesse on déduit immédiatement que $[v_a] = [c] = [e^2/\hbar] = L.T^{-1}$ et donc que **la vitesse caractéristique des électrons dans les atomes vaut : $\boldsymbol{v_a \approx e^2/\hbar = \alpha c = 2,19\,10^6\,m/s}$.**

A5) Pour déterminer l'expression de r_a, la taille caractéristique des atomes, l'intuition est mise à rude épreuve, le plus simple est de faire un calcul brutal :

$$r_a = (e^2)^x m_e^y \hbar^z \quad \Rightarrow \quad [r_a] = L = M^x L^{3x} T^{-2x} M^y M^z L^{2z} T^{-z}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (M) : x + y + z = 0 \\ (L) : 3x + 2z = 1 \\ (T) : -2x - z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (-L - 2T) : x = -1 \\ (2L + 3T) : z = 2 \\ (M) : y = -1 \end{array} \right.$$

La taille caractéristique des atomes est donc donnée par :

$$\boldsymbol{r_a \approx \hbar^2/(m_e e^2) = \hbar/(\alpha m_e c) = 5,26\,10^{-11}\,m \simeq 0,5\text{Å}} \qquad (1.2)$$

Un calcul beaucoup plus rigoureux (modèle de Bohr) donnera le même résultat pour l'atome d'hydrogène et permettra de compendre pourquoi m_p la masse du proton n'intervient pas. En physique atomique vous découvrirez que la taille des atomes est très dépendante de leur degré d'excitation, et leur structure particulièrement complexe...

A6) Une énergie a pour dimension $[E_H] = ML^2T^{-2}$. On sait que $[e^2] = ML^3T^{-2}$, donc $[e^2/E_H] = L$. Comme les expressions de E_H et de r_a utilisent les mêmes constantes, on en déduit que $L = [r_a] = [e^2/E_H]$. **L'énergie d'ionisation caractéristique des atomes est donnée par :**

$$\boldsymbol{E_H \approx e^2/r_a = m_e e^4/\hbar^2 = \alpha^2 m_e c^2 = 4,35\,10^{-18}\,J = 27,2\,eV} \qquad (1.3)$$

Un calcul beaucoup plus rigoureux, réalisé dans le cadre quantique et relativiste, donnera le même résultat divisé par un simple facteur 2 pour l'atome d'hydrogène ! Pour ioniser un atome d'hydrogène, c'est-à-dire pour expulser l'électron de l'atome, il faut fournir une énergie de $13,6\,eV$ $(2,18\,10^{-18}\,J)$.

A7) L'atome d'hydrogène est constitué de seulement deux particules : un électron et un proton. Il y a donc deux énergies associées à ces masses, l'énergie de masse du proton $E_M^p = m_p c^2 = 1,50\,10^{-10}\,J = 938\,MeV \approx 1\,GeV$, et l'énergie de masse de l'électron $E_M^e = m_e c^2 = 0,82\,10^{-13}\,J = 511\,keV \approx 0,5\,MeV$. Cependant, une troisième énergie intervient dans le système physique, celle associée à l'interaction électromagnétique entre le proton et l'électron, la force qui lie électron et proton au sein de l'atome. L'énergie correspondante a été calculée à la question précédente, c'est l'énergie de liaison atomique ou énergie d'ionisation : $E_H = 2,18\,10^{-18}\,J = 13,6\,eV \approx 10\,eV$.

Les ordres de grandeur de ces trois énergies sont très différents : le proton domine l'électron d'un facteur 2000 ($E_M^p/E_M^e = m_p/m_e = 1,84\,10^3$), et le proton domine la liaison d'un facteur 100 millions ($E_M^p/E_H = 0,69\,10^8$). L'énergie de l'atome d'hydrogène est donc égale, à une très bonne approximation, à l'énergie de masse du proton.

Néanmoins, les concepts d'énergies sont relativement abstraits pour l'instant, et il est sans doute préférable de raisonner sur le concept de masse. Nous étudierons en détails différentes formes d'énergies dans le chapitre 4 de ce cours. Le problème avec le raisonnement en terme de masse est de comprendre le sens physique de l'énergie de liaison atomique qui n'est pas une masse. La première étape est simple, et vient du raisonnement dimensionnel : il suffit de diviser E_H par c^2 pour obtenir la quantité homogène à une masse. Pour la deuxième étape, plus complexe et qui sera détaillée lors du chapitre 8, il faut réaliser que cette énergie de liaison doit être comptée négativement dans un bilan d'énergie ! En effet, on passe du système physique « atome » (= électron + proton liés) au système « électron + proton libres » en ***ajoutant*** de l'énergie, c'est l'énergie d'ionisation. Donc le système lié « atome » possède une énergie plus faible que le système avec particules libres. En terme de masse cela veut dire que la masse de l'atome d'hydrogène (m_H) est plus faible que la somme des masses de l'électron et du proton. **La masse d'un atome est plus faible que la masse de ses constituants**. Il faut ***soustraire*** l'énergie/masse de liaison/ionisation :

$$m_H < m_p + m_e \quad \Rightarrow \quad m_H = m_p + m_e - E_H/c^2 \tag{1.4}$$

Mais on a vu que les trois termes intervenant dans la définition de m_H sont très différents : $m_H \simeq m_p$, la masse de l'atome d'hydrogène vient donc de la masse du proton. D'une façon générale, **les masses des atomes sont très proches des masses de leurs noyaux.**

Au niveau des molécules, la liaison (moléculaire ou chimique) entre les atomes est de nouveau réalisée par une interaction électromagnétique. Bien que les atomes soient électriquement neutres, les charges électriques du noyau et des électrons ne sont pas localisées au même endroit ce qui amène à des effets électriques « secondaires ». Cet effet, dit de « dipôle électrique », sera étudié l'an prochain dans un cours d'électrostatique. « Secondaire » a été mis entre guillemets car sans cet effet les molécules n'existeraient pas, et sans molécules pas de liquides, ni de solides, ni de cellules ! Secondaire, car les forces associées ou plutôt les énergies associées à ces liaisons chimiques sont encore plus faibles que les liaisons atomiques. Ce qui nous amène à la conclusion que **la masse de la matière vient de la masse des atomes qui vient de la masse de leurs noyaux.**

A8) La densité en masse, ou masse volumique, est par définition le rapport entre la masse et le volume. Pour l'atome le plus simple, l'hydrogène, on a vu que $m_H \simeq m_p$, ce qui justifie l'utilisation du paramètre m_p pour estimer la densité en masse caractéristique des atomes ρ_a. Un raisonnement purement dimensionnel indique que le volume V_a est proportionnel à la taille caractéristique des atomes r_a au cube : $[V_a] = L^3 = [r_a^3]$. D'où $\rho_a \approx m_p/r_a^3 = 11,5\,10^3\,kg/m^3$. On peut être un peu plus précis en supposant que la forme de l'atome est une sphère de rayon r_a, ainsi $V_a = 4\pi r_a^3/3$ ce qui donne $\rho_a \approx 3m_p/(4\pi r_a^3) = 2,74\,10^3\,kg/m^3$. Si on se souvient que l'eau à une masse volumique de $\rho_{eau} = 10^3\,kg/m^3$, on voit que les ordres de grandeurs sont parfaitement corrects, ce qui confirme que les densités en masse des atomes et de la matière ordinaire sont similaires.

Réponses de la partie B : Noyaux et proton

B1) Le raisonnement dimensionnel n'est d'aucune utilité à présent car nous avons déjà obtenu, lors de la question A5, la relation entre longueur et constantes fondamentales. Ce qui change maintenant c'est la nature de l'interaction liant le système. L'électromagnétisme lie électrons et noyaux dans les atomes, l'interaction nucléaire forte lie protons et neutrons, les nucléons, dans un noyau. Dans un atome nous avons trouvé que $r_a \approx \hbar^2/(m_e e^2) = \hbar/(\alpha m_e c)$.

Le premier changement à prendre en compte concerne la constante de couplage : $\alpha \to \alpha_s$. Le second, plus subtil, concerne la masse de la particule à prendre en compte : dans un noyau il n'y a plus d'électron mais des nucléons, ainsi la masse caractéristique à utiliser est celle des nucléons, et non plus m_e. La différence de masse entre proton et neutron étant très faible par rapport à la masse du proton (ou du neutron) : $\Delta m/m = (m_n - m_p)/m_p = 1,38\,10^{-3} = 0,14\,\%$, le choix importe peu. L'énoncé nous indique de prendre m_p.

Ce raisonnement physique nous permet donc d'exprimer la taille caractéristique des noyaux :

$$r_N \approx \hbar/(\alpha_s m_p c) = 2,09\,10^{-16}\,m \tag{1.5}$$

En fait, cette estimation concerne plutôt le noyau le plus petit, c'est-à-dire le proton. Les mesures expérimentales indiquent que la taille du proton est 4 fois plus grande que cette estimation obtenue par raisonnement dimensionnel : $r_p^{exp} \simeq 8,6\,10^{-16}\,m = 0,86\,fm$. Pour un noyau à A nucléons, $r_N \simeq r_0 A^{1/3}$ avec $r_0 \simeq 1,2 - 1,4\,fm$ selon la valeur de A. Vous étudierez cela dans un cours de physique nucléaire.

B2) Lors de la question A6 nous avons vu que l'énergie d'ionisation (de l'atome d'hydrogène) $E_H \approx e^2/r_a = m_e e^4/\hbar^2 = \alpha^2 m_e c^2$. Avec un raisonnement analogue à la question précédente et en utilisant la dernière expression obtenue pour E_H, on en déduit que :

$$E_N \approx \alpha_s^2 m_p c^2 \approx 1\,GeV \tag{1.6}$$

En fait, le problème est ici beaucoup plus complexe, et l'énergie que l'on vient de calculer est essentiellement l'énergie de masse. Un noyau possédant A nucléons possédera une énergie de masse proportionnelle à $A \times E_N$.

Il apparaît que l'énergie caractéristique des réactions nucléaires (et non du noyau lui-même) est liée à la différence de masse entre proton et neutron : $E_N^{réactions} \approx \alpha_s^2 (m_n - m_p) c^2 \approx 1,29\,MeV$. Cette valeur est à peu près 1000 fois plus faible que les énergies de masse mise en jeu : une toute petite fraction de l'énergie de masse intervient dans la mutation des noyaux. On appelle cette énergie, « énergie de liaison nucléaire », et elle intervient dans la définition de la masse du noyau de façon similaire à l'énergie d'ionisation dans la définition de la masse des atomes (voir éq.(1.4)). Si un noyau possède une énergie de liaison, notée B, et A nucléons, décomposé en Z protons et $A - Z$ neutrons, alors la masse du noyau est telle que :

$$m_{noyau} = Zm_p + (A - Z)m_n - B/c^2$$

La raison profonde de ce mécanisme ne faisant intervenir que la différence de masse entre proton et neutron, vient de la conservation d'une quantité appelée « nombre baryonique », nombre caractéristique des interactions nucléaires fortes et grosso-modo équivalent à la charge électrique des interactions électromagnétiques. L'origine fondamentale de la conservation du nombre baryonique n'est pas encore bien comprise...

B3) Par analogie avec la question A8, on a : $\rho_N \approx m_p/r_N^3 = 2,63\,10^{18}\,kg/m^3$, en prenant la valeur $r_N = r_p^{exp} \simeq 8,6\,10^{-16}\,m$. Avec un modèle sphérique, plus proche de la réalité expérimentale, on a $\rho_N \approx 3m_p/(4\pi r_N^3) = 6,27\,10^{17}\,kg/m^3$. Quel que soit le modèle il apparaît que le rapport des densités nucléaire et atomique est très grand : $\rho_N/\rho_a \approx (r_a/r_N)^3 = 2,29\,10^{14}\,kg/m^3$. **Les noyaux sont beaucoup plus denses que les atomes.**

B4) Soit $m_p^{constit.}$ la masse des constituants du protons : $m_p^{constit.} = 2m_u + m_d \simeq 11\,MeV/c^2 = 1,96\,10^{-29}\,kg$. Cette masse est quasiment 100 fois plus faible que la masse du proton. **Pour la première fois, la masse du système ne vient pas de la masse de ses constituants ! La masse du proton (et du neutron, et des « hadrons [9] » en général) provient de l'interaction entre ses constituants**. La majeure partie de la masse de la matière vient donc de l'interaction forte entre les quarks, la masse c'est de l'interaction. Cependant, certaines masses semblent avoir une origine intrinsèque, c'est le cas de celles des électrons et des quarks. La particule appelée « boson de Higgs », récemment découverte (2012) au CERN, représente un premier pas dans la compréhension de l'origine des masses intrinsèques...

Réponses de la partie C : passage micro $\longleftrightarrow$ macro

C1) La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 grammes de carbone constitué de l'isotope ^{12}C. Ce nombre est donné par la constante d'Avogadro et vaut $\mathcal{N}_A = 6,02\,10^{23}\,entités/mol$.

C2) $m_p = 1,6726\,10^{-27}\,kg = 1,6726\,10^{-24}\,g \quad \Rightarrow \quad 1/m_p = 5,98\,10^{23}\,g^{-1}$. Ce nombre est très proche de $\mathcal{N}_A$.

C3) La densité en masse de l'eau vaut $\rho_{eau} = 10^3\,kg/m^3$, ainsi le volume $V_{eau} = 1\,cm^3 = 10^{-6}\,m^3$ a une masse $m = \rho_{eau}V_{eau} = 10^{-3}\,kg = 1\,g$. Si on néglige l'énergie de liaison nucléaire (voir question B2) la masse du noyau vient

9. Les hadrons sont l'ensemble des particules faites de quarks.

de la masse de ses constituants. Si on suppose que les nucléons ont une masse unique et égale à m_p, alors le nombre de nucléons est simplement donné par le rapport des masses : $N = m/m_p = 5,98\,10^{23}$. Ce nombre est identique a celui calculé en C2 car $1/m_p$ en g^{-1} est identique au rapport M/m_p si m_p est en g et $M = 1\,g$ ce qui correspond à $1\,cm^3$ d'eau.

La différence numérique entre ce nombre et la constante d'Avogadro, relativement faible, vient de nos approximations, c'est-à-dire du fait d'avoir négligé la différence de masse proton - neutron, les énergies des liaisons atomiques et moléculaires, mais surtout de la non prise en compte de l'énergie de liaison nucléaire du noyau concerné. Comme cette énergie dépend du noyau, il a fallu définir la mole pour un noyau précis, historiquement le carbone 12 a été choisi. Cependant, l'ordre de grandeur est lui indépendant du noyau particulier étudié, il vient de la masse du proton (des nucléons), et on peut réinterpréter le nombre d'Avogadro comme le nombre de nucléons qu'il y a dans un gramme de matière (quelle qu'elle soit).

C4) Pour réaliser ce calcul il faut connaître la masse molaire de l'eau : $M(H_2O) = 18\,g/mol$. Le nombre 18 vient du fait qu'il y a 18 nucléons dans la molécule d'eau. Le nombre de molécules d'eau dans $1\,cm^3$ vaut :

$$N = \frac{\mathcal{N}_A \rho_{eau} V_{eau}}{M(H_2O)} = \frac{6,02\,10^{23}\,entités}{1\,mol}\frac{1\,g}{1\,cm^3}\frac{1\,mol}{18\,g} 1\ cm^3 = \frac{6,02\,10^{23}}{18}\ entitées.$$

Inversement, pour avoir exactement $\mathcal{N}_A$ molécules d'eau il faut $18\,g$ d'eau soit $18\,cm^3$ d'eau.

1.3.5 Exercice de cours C1.5 – Planètes et étoiles

1) À partir des quantités G, $\hbar$, c et m_p, donner l'expression puis estimer, la "constante de couplage gravitationnelle" α_G (nombre sans dimension et de même forme que la constante de couplage électromagnétique α où $\hbar c$ est au dénominateur).
2) Trouver par un raisonnement dimensionnel, l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle E^G d'une sphère de rayon R et de masse M (à une constante près).
3) Donner l'expression du nombre total de nucléons, N, d'un astre de masse M si on suppose que la masse d'un nucléon vaut m_p. Sachant que la masse de la Terre vaut $M_T = 5,97\,10^{24}\ kg$, estimer le nombre de nucléons qu'elle contient.

4) Planètes

Une planète est constituée d'atomes, soit N_P ce nombre d'atomes.
a) Donner l'expression de la densité (en masse) de la planète suposée être une sphère de rayon R_P et de masse M_P.
b) On supposera que la densité de la planète est celle des atomes obtenue à la question A8 de l'exercice C1.4. Cette hypothèse est-elle justifiée ?
c) À partir de la question A8 de l'exercice C1.4 et des questions précédentes, calculer l'expression du rayon R_P en fonction de N_P et r_a.
d) Une planète est stable si l'énergie caractéristique d'ionisation atomique E_H (voir question A6 de l'exercice C1.4) reste plus grande que l'énergie gravitation-

nelle moyenne par atome E_P^G/N_P. En déduire l'expression du nombre maximal d'atomes N_P^{max} que peut posséder une planète, en fonction de α et α_G.
e) Estimer N_P^{max}, R_P^{max} et M_P^{max}.
f) Sachant qu'on mesure pour Jupiter : $R_J = 7\ 10^4$ km, $M_J = 1.9\ 10^{27}$ kg, commenter vos résultats.

5) Étoiles

Une étoile est un plasma de noyaux (surtout des protons) et d'électrons, qui atteint en son coeur une densité nucléaire (ρ_N).
a) En utilisant les résultats de la partie B de l'exercice C1.4 (ou ceux de la question précédente), calculer l'expression du rayon R_* de l'étoile en fonction de N_*, le nombre de protons constituant l'étoile, et de r_N, la taille caractéristique d'un noyau.
b) Une étoile s'allume dès que l'énergie gravitationnelle moyenne par proton E_*^G/N_*, dépasse l'énergie caractéristique des noyaux E_N (obtenue à la question B2 de l'exercice C1.4). En déduire l'expression du nombre minimal de protons N_*^{min} que doit posséder une étoile, en fonction de α_s et α_G.
c) Estimer N_*^{min}, R_*^{min} et M_*^{min}.
d) Sachant qu'on mesure pour le Soleil : $R_\odot = 7\ 10^5$ km, $M_\odot = 2.0\ 10^{30}$ kg, commenter vos résultats.

6) 3e loi de Kepler et masse du Soleil

La troisième loi de Kepler relie la période T d'un satellite avec la masse M de l'astre attractif et le demi grand axe a de l'ellipse décrivant la trajectoire du satellite (il y a aussi une constante fondamentale dans l'expression de T...). Si la trajectoire est circulaire, a est le rayon R du cercle.
a) Trouver par un raisonnement dimensionnel, l'expression de la période T (à une constante près). Utiliser vos références ou toute autre source d'information sérieuse pour trouver la constante qu'il vous manque.
b) L'unité astronomique (UA) est la distance moyenne Terre-Soleil. L'orbite de la Terre est peu elliptique (on dit plutôt que « l'excentricité » de l'ellipse est faible), et cette distance moyenne peut être assimilée au rayon d'une orbite circulaire en première approximation. Sachant que $1\,UA = 1,5\,10^8\,km$, calculer la masse du Soleil. Le rayon du Soleil valant $R_\odot = 7\,10^5\,km$, en déduire la densité moyenne du Soleil.

Réponses

1) On pose $\alpha_G = G^x m^y c^z \hbar^t \Rightarrow [\alpha_G] = [1] = M^{-x}L^{3x}T^{-2x}M^yL^zT^{-z}M^tL^{2t}T^{-t}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(M) : -x+y+t=0\\(L) : 3x+z+2t=0\\(T) : -2x-z-t=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(M) : y=x-t\\(L+T) : x+t=0\\(T) : z=-2x-t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-t\\y=-2t\\z=t\end{array}\right.$$

Avec trois équations et quatre inconnues il est clair qu'il y a une infinité de solutions, une pour chaque valeur de t. La dernière égalité avec $z = t$ indique que α_G sera proportionnelle au produit $(\hbar c)$. Le fait de vouloir des formes similaires pour α_G et α indique clairement que nous voulons le facteur $(\hbar c)$ au dénominateur, c'est-à-dire que $z = t = -1$. D'où $x = 1$ et $y = 2$ donnant :

$$\alpha_G \approx Gm_p^2/(\hbar c) = 6\,10^{-39} \tag{1.7}$$

2) L'énergie gravitationnelle E^G demandée doit dépendre de M la masse de la sphère, de R le rayon de la sphère, et de la constante de gravitation G. D'où $E^G = G^x M^y R^z \quad \Rightarrow \quad [E^G] = ML^2T^{-2} = M^{-x}L^{3x}T^{-2x}M^yL^z$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (M) : -x + y = 1 \\ (L) : 3x + z = 2 \\ (T) : -2x = -2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad E^G \approx GM^2/R \tag{1.8}$$

Un raisonnement plus élaboré montre qu'il manque un facteur 3/5.

3) On a vu précédemment que les forces de gravitation entre corps microscopiques étaient négligeables devant les forces électromagnétiques, et que ces dernières étaient très petites devant l'énergie de masse (voir questions A1 et A7 de l'exercice C1.4). Donc la masse M d'un astre macroscopique vient des masses de ses constituants microscopiques. Le nombre de constituants est alors simplement donné par le rapport des masses. Cependant, il y a une grande diversité des éléments chimiques chacun avec leur propre masse. Mais on a vu précédemment que le nombre de nucléons est relié à m_p quel que soit le type de matière (voir question C3 de l'exercice C1.4). La masse des atomes vient de la masse du noyau qui vient des masses des nucléons. Par conséquent, en négligeant la différence de masse entre proton et neutron, le nombre de nucléons d'un corps de masse M est donné, approximativement, par le rapport :

$$N \simeq M/m_p \tag{1.9}$$

En appliquant cette formule au cas de la Terre on estime qu'elle contient $N_T \simeq M_T/m_p = 3,57\,10^{51}$ nucléons.

Réponses de la partie planètes

4a) Par définition $\rho_P = M_P/V_P = 3M_P/(4\pi R_P^3)$.

4b) La matière sous forme de gaz, liquides et solides, est faite d'atomes. Il semble raisonnable de penser qu'une planète est faite d'atomes. Peut-être qu'aux environs du centre de la planète où les densités doivent être particulièrement élevées, la matière est fortement ionisée, voire totalement, et se retrouve donc dans un état de plasma (état où électrons et noyaux ne sont plus liés). La taille de cette zone, si elle existe, doit être relativement modeste par rapport au reste de la planète, et nous négligerons cet aspect là des choses dans la suite. On considère que la planète est faite d'atomes.
Par ailleurs, la densité d'un astre varie avec la distance au centre, mais des calculs rigoureux dans le cadre d'un modèle sont nécessaires pour prendre en compte cette dépendance. Ici nos calculs sont grossiers et approximatifs, mais nous verrons que cela nous donne quand même les bons ordres de grandeur...

On suppose donc que $\rho_P \approx \rho_a = cste$.

4c) On a (attention aux indices $P \equiv$ Planète, $p \equiv$ proton) :

$$\rho_P = \frac{3M_P}{4\pi R_P^3} = \frac{3N_P m_p}{4\pi R_P^3} \approx \rho_a = \frac{3m_p}{4\pi r_a^3} \quad \Rightarrow \quad N_P = \left(\frac{R_P}{r_a}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad R_P = N_P^{1/3} r_a \tag{1.10}$$

4d) Une planète est stable si $E_H > E_P^G/N_P$, ce qui implique (en utilisant les équations (1.3), (1.8), (1.9), (1.10), (1.2), (1.7)) :

$$E_H = \alpha^2 m_e c^2 > \frac{E_P^G}{N_P} = \frac{GM_P^2}{R_P N_P} = \frac{GN_P^2 m_p^2}{N_P^{1/3} r_a N_P} = \frac{GN_P^2 m_p^2 \alpha m_e c}{N_P^{1/3} N_P\, \hbar}$$

$$\Rightarrow N_P^{2/3} = \frac{N_P^2}{N_P^{1/3} N_P} < \frac{\alpha^2 m_e c^2 \hbar c}{\alpha m_e c^2 G m_p^2} = \frac{\alpha}{\alpha_G} \Rightarrow N_P < \left(\frac{\alpha}{\alpha_G}\right)^{3/2} = N_P^{max}$$

4e) En utilisant les valeurs numériques :

$$N_P^{max} = (\alpha/\alpha_G)^{3/2} \approx 10^{54} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_P^{max} = (N_P^{max})^{1/3} r_a \approx 5\,10^4\, km \\ M_P^{max} = N_P^{max} m_p \approx 10^{27}\, kg \end{cases}$$

4f) On constate que la masse et le rayon de Jupiter sont très proches des valeurs maximales calculées précédemment. On en déduit que Jupiter est une des plus grosses planètes qui puisse exister ! L'autre conclusion que l'on tire de la proximité de ces valeurs, c'est que le raisonnement dimensionnel est clairement un outil très puissant ! Il faut cependant s'en méfier comme nous le verrons lors de la question suivante...

Réponses de la partie étoiles

5a) La densité ρ_* de l'étoile est reliée à sa masse et à son rayon par la relation $\rho_* \approx M_*/R_*^3$. On a vu lors de la question B3 de l'exercice C1.4 que la densité des noyaux est telle que $\rho_N \approx m_p/r_N^3$. Si on suppose que $\rho_* \approx \rho_N$ alors on obtient

$$R_* \approx (M_*/m_p)^{1/3} r_N \approx N_*^{1/3} r_N \tag{1.11}$$

5b) Une étoile s'allume si $E_N \lesssim E_*^G/N_*$, ce qui implique (en utilisant les équations (1.6), (1.8), (1.9), (1.11), (1.5), (1.7)) :

$$E_N \approx \alpha_s^2 m_p c^2 \lesssim \frac{E_*^G}{N_*} = \frac{GM_*^2}{R_* N_*} = \frac{GN_*^2 m_p^2}{N_*^{1/3} r_N N_*} = \frac{GN_*^2 m_p^2 \alpha_s m_p c}{N_*^{1/3} N_*\, \hbar}$$

$$\Rightarrow N_*^{2/3} = \frac{N_*^2}{N_*^{1/3} N_*} \gtrsim \frac{\alpha_s \hbar c}{G m_p^2} = \frac{\alpha_s}{\alpha_G} \Rightarrow N_* \gtrsim \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_G}\right)^{3/2} = N_*^{min}$$

5c) En utilisant les valeurs numériques :

$$N_*^{min} = (\alpha_s/\alpha_G)^{3/2} \approx 10^{57} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_*^{min} = (N_*^{min})^{1/3} r_N \approx 10\, km \\ M_*^{min} = N_*^{min} m_p \approx 10^{30}\, kg \end{cases}$$

5d) Concernant la masse, on voit que la masse du Soleil est deux fois plus élevée que notre estimation de M_*^{min}. Notre raisonnement semble relativement correct et donc notre estimation du nombre de nucléons N_*^{min} aussi. Cependant, l'estimation de R_*^{min} est erroné, on voit qu'il y a un facteur 10^5 de différence, ce qui n'est pas rien.

En fait notre raisonnement concerne le « cœur » de l'étoile et non l'étoile elle même : le coeur doit avoir une taille d'au moins 10 km, mais les enveloppes supérieures n'ont pas du tout une densité nucléaire et donc notre raisonnement est erroné à cause de cela. On retrouve une estimation correcte en supposant que la taille de l'étoile est caractérisée par une densité atomique (et non nucléaire comme c'est le cas du cœur) : $R_* \approx N_*^{1/3} r_a \approx 10^6\, km$.

Réponses de la partie Kepler et Soleil

6a) La troisième loi de Kepler relie la période T d'un satellite au demi grand axe a de l'ellipse parcourue par le satellite (ou au rayon R pour une trajectoire circulaire), à la masse M du corps attractif et bien-entendu à la constante gravitationnelle G. La dimension de G nous donne instantanément la solution : $[G] = M^{-1}L^3T^{-2} \quad \Rightarrow \quad [GM] = L^3T^{-2} = [a^3/T^2]$ d'où $T^2 \approx a^3/(GM)$. Un raisonnement rigoureux, qui sera effectué lors du chapitre 8, nous fournira le facteur $4\pi^2$ manquant :

$$3^{ème}\, loi\, de\, Kepler \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \left(= \frac{T^2}{R^3} \;\; cas\ circulaire\right) \tag{1.12}$$

6b) La période de l'orbite terrestre est $T = 1\, an = 3,16\, 10^7\, s$, et comme on nous donne $R = a = 1\, UA = 1,5\, 10^{11}\, m$, on en déduit directement la masse du Soleil : $M_\odot = 4\pi^2R^3/(GT^2) = 2\, 10^{30}\, kg$. Ce qui donne une densité moyenne $\rho_\odot = M_\odot/V_\odot = 3M_\odot/(4\pi R_\odot^3) = 1392\, kg/m^3 = 1,39\rho_{eau}$. La densité moyenne du Soleil n'est donc supérieure à celle de l'eau liquide que de 40%, c'est donc bien une densité de type « atomique ».

1.3.6 Exercice de cours C1.6 – Galaxies et Univers

1) Galaxies

Le Soleil se situe à environ 30000 années-lumière (AL) du centre de la galaxie et effectue un tour complet en 250 millions d'années. L'année-lumière est surtout utilisée pour vulgariser les distances astronomiques, elle correspond à la distance parcourue par la lumière en une année. Le Soleil est une étoile « standard » permettant ainsi de considérer sa masse comme la masse moyenne des étoiles. On supposera que le mouvement du Soleil est circulaire et uniforme.

a) Calculer la valeur de l'année lumière en mètres.

b) Calculer la vitesse de déplacement du Soleil au sein de notre galaxie.

c) Calculer la masse de la galaxie.

d) En déduire le nombre moyen d'étoiles qu'elle contient.

2) Univers

En 1929, Hubble montre que les galaxies, en général, s'éloignent de nous avec des vitesses proportionnelles aux distances qui nous en séparent : $v_{exp} = H_0 r$ (loi de Hubble) où r est la distance entre nous et la galaxie considérée, et H_0 est la constante de Hubble. Les mesures de la constante de Hubble donnent la valeur moyenne $H_0 = 72\,km.s^{-1}.Mpc^{-1}$. Le Megaparsec (Mpc) correspond à la distance moyenne entre les galaxies. Par exemple, la galaxie d'Andromède, qui est la galaxie spirale la plus proche de notre galaxie la Voie Lactée, est située à une distance de 778 kpc. Le parsec, contraction de parallaxe-seconde, est l'unité de distance utilisée en astronomie : 1 pc correspond à la distance à laquelle une unité astronomique sous-tend un angle de $\theta = 1''$. La seconde d'arc est telle qu'un angle de 1 degré soit égal à 60 minutes d'arc ($1^\circ = 60'$) et que 1 minute d'arc soit égale à 60 secondes d'arc ($1' = 60''$).

a) Calculer la vitesse d'éloignement d'Andromède par rapport à nous due à l'expansion de l'Univers. En fait Andromède se rapproche de nous à la vitesse de 300 km/s, quelle conclusion en tirez-vous ?

b) Faire un dessin montrant la définition du parsec. Calculer la correspondance entre seconde d'arc et radian. En déduire, la valeur du parsec en mètres. Déterminer la correspondance entre parsec et année lumière.

c) Relier l'âge de l'Univers t_U à la constante de Hubble H_0 à l'aide d'un raisonnement dimensionnel. Donner la valeur de H_0 en s^{-1} et en déduire l'âge de l'Univers en secondes et en années.

d) La densité critique de l'Univers ρ_c (masse volumique) est reliée à la constante de Hubble H_0 et à la constante gravitationnelle G. Calculer l'expression de ρ_c par raisonnement dimensionnel. Nous verrons lors du chapitre 8, à travers la première équation de Friedman, qu'il manque un facteur $3/(8\pi)$ à cette expression. Calculer cette densité critique en kg/m^3 et en $protons/m^3$. Comparer ce chiffre au nombre de nucléons présents dans un m^3 d'eau.

e) L'horizon classique de l'Univers (R_U) correspond à la distance à partir de laquelle la vitesse d'expansion dépasse la vitesse de la lumière. Calculer cette distance (en m, en AL et en Gpc) et essayer de l'interpréter.

f) En déduire une estimation de la masse de l'Univers observable. En déduire le nombre de protons qu'il contient.

g) Estimer le nombre de galaxies présentes dans l'Univers observable.

Réponses de la partie galaxies

1a) L'année lumière est la distance que parcourt la lumière, possédant la vitesse c, en un an : $1\,AL = ct_{1\,an} = 3\,10^8 \times 3,16\,10^7 = 9,46\,10^{15}\,m \simeq 10^{16}\,m$.

1b) L'énoncé donne la période du mouvement du Soleil dans la Voie Lactée $T = 2,5\,10^8\,ans = 7,89\,10^{15}\,s$, ainsi que le rayon de la trajectoire $R = 3\,10^4\,AL = 2,84\,10^{20}\,m$. Si on suppose que la trajectoire est circulaire, la distance parcourue pendant la période T est le périmètre $P = 2\pi R$. En supposant le mouvement uniforme on admet que la vitesse est constante, et est ainsi simplement reliée au rapport de la distance parcourue sur le temps écoulé : $v = d/t = P/T = 226\,km/s$! Le Soleil se déplace vite dans la galaxie, mais les distances entre les étoiles sont telles que l'on n'a pas conscience de ce mouvement...

1c) La masse de la galaxie s'obtient directement à partir de la $3^{ème}$ loi de Kepler donnée par l'éq.(1.12) : $M_g = 4\pi^2 R^3/(GT^2) = 2,57\,10^{41}\,kg$.

1d) En supposant que le Soleil est une étoile « standard », on obtient le nombre d'étoiles de type Soleil dans la Voie Lactée en calculant le rapport des masses : $N_{\odot/g} = M_g/M_\odot \approx 10^{11}$. Il y a environ 100 milliards d'étoiles dans notre galaxie !

Réponses de la partie Univers

2a) La vitesse d'éloignement d'Andromède par rapport à la Voie Lactée due à l'expansion de l'univers s'obtient directement par application de la loi de Hubble : $v_{exp} = H_0 r = 72 \times 0,778 = 56\,km/s$.
En fait, Andromède se rapproche de nous à la vitesse $v_{radial} = 300\,km/s$. L'indice *radial* indique que cette vitesse est la projection de la vitesse (du vecteur vitesse) sur la ligne de visée (la direction Voie Lactée - Andromède). La vitesse due à l'expansion de l'Univers domine les vitesses pour les galaxies « lointaines ». Pour Andromède, la galaxie la plus proche de nous, c'est la vitesse « propre » ou « vitesse particulière » qui domine celle due à l'expansion.

2b) La définition du parsec est donnée sur la figure 1.2. On en déduit la relation entre l'angle $\theta = 1''$ et les distances $d = 1\,pc$ et $R = 1\,UA = 1,5\,10^{11}\,m$: $R/d = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad d = R/\tan\theta$. Cependant pour exprimer d (le parsec) en mètres, il faut exprimer θ en radian ou en degré (en radian si on veut utiliser la formule approchée $d \simeq R/\theta$). Il faut convertir $1''$ en radian ou en degré :

$$1^\circ = 60' = 3600'' \quad \Rightarrow \quad 1'' = \frac{1}{3600}{}^\circ = 2,78\,10^{-4}\,degrés$$

$$\pi = 180^\circ = 180 \times 3600'' \quad \Rightarrow \quad 1'' = \frac{\pi}{6,48\,10^5} rad = 4,85\,10^{-6}\,rad$$

On en déduit la valeur du parsec :

$$1\,pc = d = \frac{R}{\tan\theta} \approx \frac{R}{\theta} = \frac{1\,UA}{1''} = \frac{1,5\,10^{11}}{4,85\,10^{-6}}\frac{m}{rad} = 3,09\,10^{16}\,m$$

Ce résultat avec celui de la question 1a donne immédiatement $1\,pc = 3,27\,AL$.

2c) On a $[t_U] = T$ et $[H_0] = [v/r] = T^{-1}$. La relation entre l'âge de l'Univers et la constante de Hubble est donc immédiate : $t_U \approx 1/H_0$. On peut être surpris par la dimension $1/T$ relativement simple de H_0 au vu de l'unité « compliquée » utilisée pour exprimer sa valeur $H_0 = 72\,km.s^{-1}.Mpc^{-1}$. Il n'y a pas de mystère, car le Megaparsec (Mpc) est une distance comme les kilomètres, ces deux unités ont la même dimension. Les astronomes et les cosmologues s'amusent-ils à nous embrouiller les idées pour le plaisir ? Non, bien-sûr, cette façon d'exprimer H_0 est la plus physique quand on étudie la dynamique des galaxies. À ces échelles où les galaxies sont des points, l'échelle de la cosmologie, les distances caractéristiques sont de l'ordre du Mégaparsec et les vitesses de l'ordre des centaines de km/s.

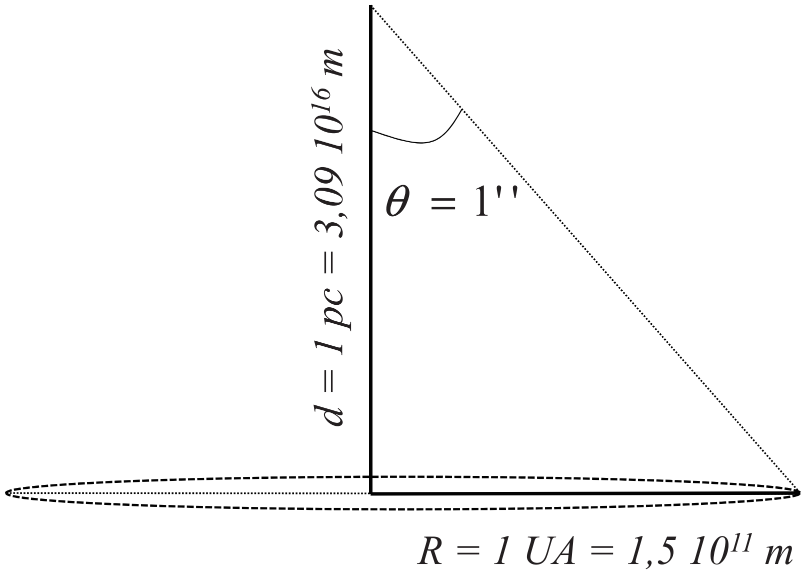

FIGURE 1.2 – Définition du parsec

Calculons à présent l'âge de l'Univers. À cette fin, déterminons la valeur de H_0 en s. Toutes les conversions entre unités sont connues, il suffit de les appliquer à la constante de Hubble H_0 :

$$H_0 = 72\,km.s^{-1}.Mpc^{-1} = 72\frac{10^3\,m}{1\,Mpc}s^{-1} = 72\frac{10^3\,m}{3,09\,10^{22}\,m}s^{-1} = 2,33\,10^{-18}\,s^{-1}$$

On en déduit alors un ordre de grandeur de l'âge de l'Univers :

$$t_U \approx \frac{1}{H_0} \;=\; 4,29\,10^{17}\,s \;=\; 13,6\,10^9 ans$$

Les données cosmologiques les plus récentes interprétées dans le cadre de la théorie de la relativité générale et du modèle cosmologique du big bang chaud, fournissent la même valeur de 13,6 milliards d'années. C'est une chance que ce raisonnement dimensionnel élémentaire fournisse une valeur numérique aussi proche des observations.

2d) On a dimensionnellement : $[\rho_c] = ML^{-3}$, $[H_0] = T^{-1}$ et $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$. Le raisonnement direct est assez évident et donne : $\rho_c \approx H_0^2/G$. Un raisonnement plus rigoureux nous permettra d'obtenir l'équation de Friedman (chapitre 8) montrant que $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$.

Numériquement, on a $\rho_c = 0,97\,10^{-26}\,kg/m^3$. En divisant par la masse du proton, on obtient $\rho_c \simeq 6\,protons/m^3$. Ce chiffre est extrêmement faible par rapport à la densité de la matière ordinaire (liquide ou solide). En effet, aux questions C de l'exercice C1.4 nous avons vu que la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02\,10^{23}$ *entités/mol* était en fait le nombre de protons (nucléons) par gramme de matière. En choisissant de l'eau pour fixer les idées, dans $1\,m^3$ d'eau il y a $10^6\,g$ de matière, soit environ $6\,10^{29}$ protons (nucléons) : la matière ordinaire est 10^{29} fois plus dense que l'Univers !

2e) La loi de Hubble stipule que $v_{exp} = H_0 r$. Pour des distances extrêmement grandes on peut imaginer que cette vitesse d'expansion dépasse la vitesse de la lumière. Cela implique que la lumière, ou toute autre forme d'information, n'arrivera plus à nous parvenir. L'Univers devient « noir » au-delà de cette zone que l'on appelle « horizon ». La distance que l'on va calculer maintenant est l'horizon « classique » par opposition aux calculs qui peuvent être menés dans le cadre de la relativité (générale).

L'horizon classique de l'Univers est atteint, $r = R_U$, lorsque $v_{exp} = c$. Ce qui donne avec la loi de Hubble :
$c = H_0 R_U \quad \Rightarrow \quad R_U = c/H_0 = 1,29\,10^{26}\,m = 4,15\,Gpc = 13,6\,10^9\,AL$
Quel que soit la véritable taille de l'univers (fini ou infini, peu importe), il apparaît que nous, les observateurs, recevons de l'information de toutes les directions où l'on regarde. Cela délimite « une sphère d'information » où nous sommes au centre et qui a pour rayon l'horizon classique calculé précédemment, c'est ce que nous appelons « l'univers observable (classique) ».

2f) Ayant en main une densité, ρ_c, et une distance, R_U, on peut calculer une masse. La masse de l'univers observable, associé à cette sphère d'information, est alors simplement : $M_U = \rho_c 4\pi R_U^3/3 = 8,67\,10^{52}\,kg \simeq 5\,10^{79}\,protons.$

2g) À partir de cette estimation de la masse de l'Univers observable, et de l'estimation de la masse de notre galaxie faite à la question 1c, on en déduit le nombre de galaxies, du type Voie Lactée, dans notre Univers observable : $N_{g/U} = M_U/M_g \simeq 3\,10^{11}$. Il y a quelques centaines de milliards de galaxies dans notre Univers observable !

1.4 Conclusion / À retenir

Dans ce chapitre, nous avons essayé de vous donner une vision globale du monde physique. À l'aide du raisonnement dimensionnel et des constantes fondamentales de la physique nous avons été capable de calculer les ordres de grandeurs de nombreuses quantités sur les branches de l'infiniment petit et de l'infiniment grand, du noyau des atomes à l'Univers dans sa globalité.

Beaucoup de nombres ont été calculés et il est évident qu'il ne faut pas les retenir tous. Nous espérons cependant que certains ordres de grandeur vous ont marqué et que votre esprit les gardera en mémoire, que le plaisir intellectuel de faire des estimations simples et compréhensibles facilitera leur assimilation.

Ce qu'il faut absolument retenir de ce chapitre c'est :
- la nécessité de manipuler des expressions littérales ;
- savoir faire un raisonnement dimensionnel afin d'obtenir une formule ou de vérifier le résultat d'un calcul ;
- être capable de manipuler les unités des grandeurs physiques et faire des conversions, avec aisance ;
- savoir faire et présenter un résultat numérique (3 chiffres significatifs + unités).

1.5 Exercices (édition 2019)

E1.1 – Vitesse d'impact
On lâche, sans vitesse initiale, un objet de masse m, d'une hauteur h, à la surface de la Terre.
1) Identifier les différents paramètres dont pourrait dépendre la vitesse d'impact de l'objet sur le sol.
2) Calculer, à un facteur numérique près, l'expression de la vitesse d'impact en utilisant un raisonnement dimensionnel.

E1.2 – Distance d'arrêt
Une voiture de masse m roule avec une vitesse constante v. On suppose que les pneus exercent sur la route une force de frottement d'intensité constante, notée f. La voiture tombe en panne d'essence. La distance d'arrêt est la distance que va parcourir la voiture entre le moment de la fin de l'injection d'essence et le moment où la voiture s'arrête.
1) Identifier les différents paramètres dont pourrait dépendre la distance d'arrêt.
2) Calculer, à un facteur numérique près, l'expression de la distance d'arrêt en utilisant un raisonnement dimensionnel.

E1.3 – Période des oscillations d'un pendule
Un objet de masse m est accroché au bout d'un fil de longueur L et effectue des oscillations de petites amplitudes. L'expérience a lieu à la surface de la Terre. On néglige les frottements.
1) Identifier les différents paramètres dont pourrait dépendre la période des oscillations de l'objet.
2) Calculer, à un facteur numérique près, l'expression de la période des oscillations en utilisant un raisonnement dimensionnel.