

Physique et Mécanique

Une initiation aux méthodes de
résolution des problèmes de physique

Jean-Marc Virey

Avant-propos

Ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignements auprès de l'université d'Aix Marseille en première année de licence des cycles scientifiques (physique, chimie, mathématiques) et du cycle préparatoire aux écoles d'ingénieurs POLYTECH. Il s'adresse aux étudiants voulant réaliser des études en sciences fondamentales ainsi qu'à ceux désirant s'orienter vers les métiers de l'ingénieur.

Il existe un grand nombre de livres traitant de la mécanique et on peut légitimement se poser la question de l'intérêt d'un nouvel ouvrage sur le sujet. Depuis les années 2000 plusieurs réformes des programmes du secondaire se sont succédé et ont amené à une transformation profonde des connaissances et des compétences des lycéens. Si on doit résumer en une phrase cette mutation, on pourrait dire que les connaissances et les compétences associées à la réflexion sont devenues plus vastes au détriment des compétences calculatoires qui se sont fortement réduites.

Est-ce un mal ? Non. Cependant, le degré d'exigence à l'université et en classes préparatoires, en France, est resté approximativement le même depuis plusieurs décennies. On attend des étudiants qu'ils développent de fortes compétences à la fois théoriques et expérimentales sur leur approche des problèmes de physique.

Pourquoi développer une approche théorique ? La révolution de notre description physique du monde, que l'on peut faire remonter jusqu'à Galilée, est directement associée à la naissance de la démarche scientifique mêlant intimement expériences et modélisation théorique. L'utilisation des mathématiques pour décrire les phénomènes physiques a été, et est toujours, un des moteurs les plus puissants de l'accroissement de nos connaissances ! Les théories physiques font des prédictions ce qui représente une force indéniable. Les sauts intellectuels que nous ont fait franchir Descartes, Lagrange ou Poincaré, pour ne citer que quelques illustres savants français, sont incommensurables. Cette longue tradition de physique mathématique fait que les programmes de physique de l'enseignement supérieur en France reposent sur des compétences théoriques et des techniques calculatoires fortes.

Faut-il pour autant négliger l'approche expérimentale ? Non, certainement pas. Les expériences permettent de cadrer notre description de la nature, elles sont à la base de notre vision du monde physique. L'autre moteur le plus puissant de l'accroissement de nos connaissances correspond aux découvertes expérimentales inattendues ! L'apprentissage des méthodes expérimentales est tout aussi important que celui des méthodes théoriques, cependant le support livre n'est pas adapté pour cela, il faut avoir recours à des manipulations que l'on effectue dans des salles de travaux pratiques... Raison pour laquelle nous ne parlerons que très peu des aspects expérimentaux dans cet ouvrage.

La transition secondaire-supérieur pose donc des problèmes de plus en plus difficiles que ce livre tente d'amoinrir. Il a été rédigé dans le cadre de la mise en place d'une nouvelle méthode pédagogique reposant sur les concepts

d'« apprentissage par problèmes » et d'« apprentissage par les pairs ». Ces aspects sont détaillés dans la partie suivante *Comment exploiter ce livre ?*

En résumé, cet ouvrage expose les aspects les plus fondamentaux d'un cours de mécanique et insiste sur les techniques de résolution des problèmes de physique. Afin d'initier les nouveaux étudiants à ces différentes méthodes une grande partie du livre est rédigée sous la forme d'« exercices de cours » où la résolution des questions posées est grandement détaillée. L'objectif principal de ce manuel est de remplacer le cours magistral réalisé traditionnellement par les enseignants, qui avec le temps est devenu un des meilleurs anesthésiants pour étudiants et une des sources de la dépression des professeurs... Ce livre veut développer la plus grande autonomie possible des étudiants dans l'analyse et la résolution des problèmes de physique.

Contact

Cher lecteur, je vous remercie par avance de me faire part de vos commentaires et suggestions sur le contenu de cet ouvrage en me contactant directement à l'adresse suivante : Jean-Marc.Virey@univ-amu.fr

Remerciements

Ce livre n'aurait jamais vu le jour sans mes collègues enseignants chercheurs de l'université d'Aix Marseille. Il est clair que de nombreux exercices ne sont pas originaux et ont été empruntés à la multitude de fascicules d'exercices rédigés par les générations d'équipes pédagogiques qui se sont succédé dans l'enseignement de la mécanique. Je tiens à remercier ceux qui auront un sourire en reconnaissant un de leurs énoncés dans la liste des exercices qui sont proposés.

Un grand merci aux étudiants ayant suivi mes enseignements et enrichi mon expérience, ainsi qu'aux enseignants des UE Physique1, Physique2 et Physique newtonienne, qui m'ont entouré pendant plusieurs années et fourni les commentaires indispensables dont ce livre bénéficie. Je salue les travaux et l'engagement de Nathaniel Lasry (John Abbott College, Canada), des enseignants de l'Université de Louvain (Belgique) et de l'INSA Toulouse, dans la mise en place de pédagogies actives pour la physique. Je remercie aussi les collègues qui ont joué un rôle plus ou moins important dans l'élaboration de ma vision des mondes physique et éducatif. Voici leurs noms : Simona Bodéa, Régis Bisson, Gwenn Boedec, Mickaël Bosco, Thierry Chave, Éric Salomon, Christian Marinoni, Gaëtan Hagel, Olivier Morizot, Laurent Raymond, Daniel Garnier, Laurence Chérigier-Kovacic, Chérifa Abid, Fabienne Bruny, Anne Ealet, Madeleine Sirugue-Collin, Charling Tao, Alain Bonissent, Claude Bourelly, Dominique Fouchez, Bruno Iochum, Sebastian Linden, Thomas Schücker, Jacques Soffer, Pierre Taxil, André Tilquin et Erden Tuğcu.

Les mots ne sont pas assez forts pour exprimer ma gratitude à ma famille qui m'a soutenu dans ce projet et en particulier à mes parents, Danièle et Pierre, pour leur aide précieuse, et à mes enfants, Angèle et Marius, pour leur gentillesse durant mes longues phases studieuses et qui un jour prochain liront peut-être ce livre.

Comment exploiter ce livre ?

La première chose à réaliser est que l'étude de la mécanique permet de comprendre un grand nombre de phénomènes courants, mais qu'elle est surtout à la base de la compréhension de tous les autres domaines de la physique. Si vous négligez votre compréhension de la mécanique préparez-vous alors à avoir de sérieuses difficultés dans vos autres cours de physique...

Ce livre, ou plutôt ce « manuel d'initiation », a pour objectif que les étudiants développent en toute autonomie les connaissances et les compétences associées à l'étude de la mécanique, nécessaires à la compréhension des phénomènes physiques. La nouvelle méthode pédagogique associée à cet ouvrage, détaillée dans la section suivante, comporte une première phase de travail individuel où la bonne exploitation des contenus de ce livre est indispensable. L'initiation peut se décomposer en cinq phases distinctes :

- 1) Lecture et analyse des objectifs d'apprentissage.
- 2) Lecture du manuel et initiation à la résolution de problème.
- 3) Reprise des exercices de cours.
- 4) Entraînement à résoudre des exercices et des problèmes.
- 5) Vérification des acquis.

Cependant, nous avons choisi de vous fournir un document assez complet, ainsi certaines parties vous sembleront difficiles en première lecture et ne sont pas exigibles comme connaissances de première année, mais vous en aurez besoin les années suivantes. Nous espérons que ce livre vous sera utile pendant toutes vos études et non pour votre première année uniquement. Ci-dessous, nous détaillons les cinq phases qu'il vous faut suivre pour que votre formation en mécanique soit du plus haut niveau.

Phase 1 – Lecture et analyse des objectifs d'apprentissage

Chaque chapitre commence par une liste des objectifs d'apprentissage qui se décomposent en connaissances et en compétences. Prenez le temps de les lire et de distinguer ce qui est connu de ce qui ne l'est pas. Lorsque les notions mentionnées ne vous sont pas étrangères, faites un effort de mémoire pour clarifier dans votre esprit ce qui est maîtrisé et ce qui est obscur, à la fois au niveau des concepts physiques que des techniques mathématiques. Cette phase est la plus rapide mais ne doit pas être négligée.

Phase 2 – Lecture du manuel et initiation à la résolution de problème

Pendant cette phase de lecture, vous devez vous demander en permanence si vous comprenez ce qui est écrit. Le cours expose les points essentiels à connaître avec un développement des idées les plus fondamentales que vous retrouverez, peut être, dans la suite de vos études, ainsi que les démonstrations des résultats et des théorèmes de base. Des exercices, particulièrement importants pour la compréhension du cours et pour développer votre aptitude à la résolution des exercices et des problèmes, sont fournis avec énoncés et solutions détaillées. En fait, des pans entiers d'un cours traditionnel sont rédigés, dans ce livre, sous

la forme d'exercices de cours afin de vous permettre d'identifier aisément les connaissances et compétences que l'on exige de vous.

Néanmoins, la lecture directe de certains chapitres pourra vous sembler trop abstraite et/ou trop technique. En effet, pour ne pas alourdir le cours de trop de textes et afin d'insister sur l'initiation à la résolution des problèmes, nous n'avons pas répété les longues introductions pédagogiques aux différents concepts physiques que l'on peut trouver dans de nombreux ouvrages. Ainsi, **avant d'étudier chaque chapitre nous vous conseillons fortement la lecture de certains chapitres ou sections de chapitre d'un autre livre pris comme « ouvrage de base »**. Les réflexions menées durant la phase 1 de prise de conscience des objectifs d'apprentissage, doivent vous guider sur la nécessité d'utiliser le livre de base ou non. **Si vous choisissez de ne pas étudier préalablement le livre de base mais que vous constatez que les exercices de cours sont trop durs, arrêtez la lecture de ce manuel et plongez-vous dans le livre de base !** Bien-entendu une simple lecture ne suffit pas, il faut essayer de comprendre et aussi être capable de faire les exercices d'applications (relativement faciles) donnés dans le livre de base.

L'ouvrage de base que nous préconisons est le livre en langue anglaise « **University physics plus modern physics** » de **H.D. Young, R.A. Freedman et A.L. Ford** (Éditeur : Pearson). Ce livre (noté YF dans la suite) couvre l'ensemble du programme des deux années de classe préparatoire et des trois années de licence. On vous conseille donc l'achat de ce livre pour l'ensemble de votre cursus en physique. Ne soyez pas effrayé par le fait qu'il soit écrit en anglais, vous verrez que l'anglais scientifique s'apprend rapidement et que cet effort sera d'un grand intérêt pour votre poursuite d'étude. Nous avons choisi ce livre pour ses grandes qualités pédagogiques.

Pour les réfractaires, nous conseillons le livre (en français) « Physique » de E. Hecht (Éditeur : De Boeck). Ce livre couvre aussi l'ensemble du programme de votre cursus en physique. Nous le mettons en second choix car il possède moins d'exercices d'applications avec solutions sans explications.

Ces deux livres offrent de bonnes introductions aux concepts et aux méthodes de calculs élémentaires. Cependant, les programmes français de licence et des classes préparatoires vont, en terme de compétences, bien au-delà de ce qui est présenté dans ces livres. Ils ne sont pas suffisant pour vous garantir le succès à vos examens et concours. C'est une des raisons principales qui a motivé la rédaction du présent ouvrage.

Phase 3 – Reprise des exercices de cours

Vous venez de finir la lecture du chapitre et vous avez compris l'essentiel de l'exposé, les connaissances sont en bonne voie d'acquisition. À présent, il faut s'attaquer au développement des compétences. **Lire et comprendre ne suffit pas pour apprendre et mémoriser, il faut s'exercer.** Une grande partie du manuel est rédigée sous la forme d'exercices de cours afin de vous permettre de voir si vous avez acquis les compétences techniques nécessaires à la résolution des problèmes de physique.

Il est indispensable que vous repreniez les énoncés de tous les

exercices de cours et que vous essayiez de les faire *sans regarder les solutions*. Cette phase est primordiale pour commencer à acquérir les compétences mentionnées en début de chapitre.

Les exercices de cours doivent être parfaitement maîtrisés

Phase 4 – Entraînement à résoudre des exercices et des problèmes

Après la phase précédente, les compétences sont en cours d'acquisition mais pour les forger dans votre esprit, rien de mieux que l'entraînement. À la fin de chaque chapitre, excepté le premier, vous trouverez une liste d'exercices à effectuer pour parfaire votre formation. Les exercices suivent l'avancement des idées du cours et sont triés par ordre de difficulté croissante. Certains exercices de difficulté modeste sont considérés comme des exercices d'entraînement afin d'évaluer vos aptitudes.

Si vous n'arrivez pas à les faire, travaillez plus, travaillez les avec des camarades et posez-vous des questions sur vous ! Analyser en profondeur votre méthode de travail, vos motivations, vos aptitudes... Prenez le livre de base et effectuez les exercices d'applications qui sont relativement faciles et dont les corrections sont grandement détaillées.

Viennent ensuite des exercices plus difficiles, de véritables problèmes, dont la résolution sera une preuve de votre maîtrise des concepts du cours et des techniques de calculs.

Phase 5 – Vérification des acquis

Vous avez bien travaillé et vous voulez passer au chapitre suivant. Cependant, avant de le faire, il est important de revenir à la liste des objectifs d'apprentissage donnés en début de chapitre. Vérifiez que les connaissances et compétences sont acquises. S'il reste des zones d'ombre reprenez vos efforts là où il le faut, s'il n'y en a pas, passez à la suite en étant fier du travail accompli.

Site web compagnon

Des informations et du matériel complémentaires aux contenus de ce livre peuvent être trouvés sur la page enseignement du site web de l'auteur :
<http://www.cpt.univ-mrs.fr/~virey/ens.php>

Bibliographie

Nous complétons cette partie par une courte bibliographie en précisant des livres intéressants qui ont servi de support à la rédaction du présent manuel :

- Le cours de Physique de Feynman (<http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>)
- Introduction à la mécanique, M. Le Bellac, (DIA)
- Cours de Physique de Berkeley (Dunod)
- L'univers mécanique, L. Valentin (Hermann)
- H Prépa : Physique 1ère année MPSI-PCSI-PTSI : Exercices & Problèmes, J.-M. Brébec, T. Desmarais, M. Ménétrier et B. Noel (Hachette)
- Physique générale de M. Alonso et E.J. Finn (Dunod)

Méthode pédagogique associée à ce manuel

L'objectif de ce manuel est de remplacer les cours magistraux afin de favoriser le développement de votre autonomie dans l'analyse et la résolution des problèmes de physique.

Depuis les années 1990-2000 de nouvelles méthodes pédagogiques pour l'enseignement de la physique ont vu le jour en Amérique du nord et en Europe. En particulier, les méthodes d'« apprentissage par problèmes » et d'« apprentissage par les pairs », reposent sur la notion de travail en groupe pour un meilleur apprentissage personnel.

Le travail est organisé sous la forme d'une alternance avec, d'une part, des séances en petits groupes (5 à 7 étudiants encadrés par un enseignant-tuteur qui stimule sans diriger mais dont les objectifs sont précis), et d'autre part, des périodes de travail individuel (étude des cours, réalisation des exercices de cours, d'application et d'entraînement).

Le travail en groupe conduit à une amélioration de l'apprentissage de chaque individu grâce à plusieurs facteurs. L'émulation due au groupe amène à une meilleure préparation du sujet et à une responsabilisation vis à vis des autres membres. La confrontation avec des points de vue différents fournit une meilleure compréhension des problèmes, et dirige le groupe, en général, vers la meilleure solution. Le bon fonctionnement du groupe implique la nécessité d'explicitier sa pensée et de la communiquer à d'autres.

Par ailleurs, cette approche requiert et développe des compétences génériques : communication, raisonnement critique, approche logique et analytique d'un problème, prise de décision, auto-évaluation, travail de collaboration, résolution de conflits...

Afin d'optimiser le fonctionnement du groupe, il est important que chaque membre ait un rôle actif et particulier mais ceci est une autre histoire qui ne concerne pas le cœur du présent manuel. Pour plus d'informations sur ces formes d'apprentissages nous conseillons la lecture du guide des APP réalisé par des enseignants de l'université de Louvain et de l'INSA de Toulouse (http://enseignants.insa-toulouse.fr/fr/L_app/le_guide_app.html), voir aussi le site du CCDMD (Centre Collegial de Développement de Matériel Didactique) au Canada (<http://pbl.ccdmd.qc.ca/fr/>).

Stratégie de résolution d'un problème

Obtenir la solution d'un problème n'est pas forcément une chose aisée en physique. Il y a cependant quelques étapes indispensables à respecter si on veut obtenir un résultat et avoir confiance en lui. La stratégie de résolution d'un problème de physique peut être résumée en quatre étapes essentielles :

1) Lire et analyser le problème

Tout en lisant l'énoncé du problème dans son intégralité, identifier les concepts physiques mis en jeu, le cadre de l'étude et ses approximations. Mesurer ce qui peut être fait sans difficulté et ce qui va demander du travail. Si possible, essayer d'avoir une vision du problème et une intuition de la solution.

2) Poser le problème

On commence à rentrer dans le cœur du problème et pour cela il faut fixer ses idées et les notations qu'on va utiliser. En général, la première chose que l'on doit faire c'est un schéma de la situation. On représente le système physique à un instant quelconque, mais on indique aussi les positions particulières s'il y en a (position d'équilibre, extremums...), les forces mise en jeu, les contraintes... On définit le système de coordonnées et l'ensemble des symboles qui sont donnés par l'énoncé et que l'on va utiliser par la suite. Si le problème est à trois dimensions, on évite les dessins en perspectives et on fait autant de plans de coupe que nécessaires. On distingue bien, au moins dans son esprit, les paramètres et les variables.

3) Résoudre le problème

C'est la partie mathématique proprement dite. Appliquée à la physique, ce sont des techniques à apprendre avec leurs lots de trucs et astuces à mémoriser. Rien de bien sorcier mais qui nécessite du travail et encore du travail pour mémoriser ces concepts abstraits.

4) Évaluer le résultat

C'est l'« art » du physicien ! Certains vont trouver cette étape naturelle (et ont en fait déjà le résultat à partir de l'étape 1), et pour d'autres c'est l'étape la plus dure voire impossible. En général, de la simple logique et un bon esprit critique suffisent. Cependant, un outil très puissant et spécifique à la physique va nous être d'une grande utilité : c'est le raisonnement dimensionnel. En effet, les quantités physiques ont une dimension qui s'exprime dans un système d'unités, et le jeu entre ces grandeurs permet de vérifier la validité d'une formule. Les ordres de grandeurs permettent de vérifier la valeur numérique d'un résultat.

Ces quatre étapes sont toutes aussi importantes, autant l'une que les autres. C'est le temps qu'on y passe qui diffère grandement selon le problème posé. On a tendance à négliger les deux premières étapes au profit de la troisième, et seuls les bons physiciens ont conscience de la dernière ! Insistons sur le fait que plus on passe de temps sur les deux premières étapes, plus la troisième est rapide. Quand vous ne savez pas par quel bout attaquer un problème c'est que vous êtes en train d'oublier la première étape... Quant à la quatrième étape qui ne vous est pas familière, elle ne nécessite aucune technique mathématique excepté le jeu des puissances (c-à-d savoir manipuler des exposants), et donc nous allons commencer par là, c'est le sujet du premier chapitre.

Chapitre 1

Physique et mécanique,
analyse dimensionnelle
et ordres de grandeur

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

- Principes de la démarche scientifique
- Cadre d'étude de la physique
- Définition des mécaniques
- Notions de physique fondamentale moderne
- Ordres de grandeur des différents domaines de la physique

• Compétences

- Conversions entre systèmes d'unités
- Manipulation des expressions littérales
- Analyse dimensionnelle pour vérifier un résultat et pour obtenir une formule
- Estimation d'ordres de grandeur
- Présentation d'un résultat numérique (3 chiffres significatifs et unités)

• Lecture conseillée

Notions de physique	Young et Freedman (2013)	Hecht (1999)
Nature de la physique	1.1 à 1.6 p1-10	ch1 p1-26

1.1 Introduction

1.1.1 Physique et démarche scientifique

La physique se veut une description de la nature. Les buts de la physique sont, d'une part, de décrire le plus simplement possible les expériences en utilisant un nombre limité de grandeurs cohérentes, et d'autre part, d'expliquer la multiplicité des phénomènes sur la base d'un nombre limité d'hypothèses.

En d'autres termes, la physique utilise une description mathématique des phénomènes et, pour que les calculs soient réalisables, il est nécessaire de simplifier la complexité.

Le principe de la démarche scientifique correspond à des allers-retours permanents entre expériences, modèles et théories. La physique repose sur des observations, qui peuvent être trompeuses, et sur des expériences qui doivent être reproductibles. La description des phénomènes observés passe alors par une phase de modélisation où les physiciens essaient, après diverses hypothèses et approximations, de trouver les lois mathématiques cachées derrière le comportement, le mouvement des objets physiques. Ensuite, les physiciens essaient d'entrer dans une phase « explicative » des phénomènes, ils élaborent une théorie. On essaye d'expliquer le pourquoi d'un ensemble de phénomènes. La théorie doit non seulement nous aider à comprendre l'unité sous-jacente d'un ensemble de lois, mais elle doit aussi (et surtout) faire des prédictions, c'est-à-dire prédire l'existence de nouveaux phénomènes.

Une loi ou une théorie n'est jamais vraie, son caractère est provisoire : elle est seulement plus efficace que les autres à un certain moment. De plus, on ne peut pas démontrer que quelque chose est vrai ! On peut seulement réfuter... Une loi ou une théorie n'est jamais fautive : elle a un domaine de validité, son temps de vie est limité... Les physiciens ont alors inventé la notion de « principe », une sorte d'« idée unifiante », à partir duquel on développe un raisonnement permettant de démontrer un ensemble de lois et de décrire une grande diversité de phénomènes qui apparaissaient au départ déconnectés. Derrière le principe se cache la notion de symétrie, directement reliée à des propriétés mathématiques. Raison pour laquelle les théories sont en général associées à des structures mathématiques relativement lourdes. Nous découvrirons plusieurs principes de base dans ce cours.

L'objectif de votre cursus en physique est de vous faire découvrir petit à petit la richesse de cette description de la nature. Einstein disait de la physique : « La chose la plus incompréhensible du monde est que le monde soit compréhensible ! »

1.1.2 Les mécaniques

Dans le langage courant on utilise le mot « mécanique » pour les sciences dont l'objet est l'étude et la conception de machines (mécanique automobile, navale, industrielle...). On peut être un bon mécano ou un bon bricoleur sans avoir besoin de connaître les lois et les principes sous-jacents au fonctionnement de

ces machines, mais ce n'est pas le cas d'un ingénieur ou d'un docteur spécialisé dans ces domaines. Cependant les techniques nécessaires pour l'étude profonde des machines ne seront abordables qu'à partir de votre troisième année d'études supérieures. Dans ce cours nous allons étudier des phénomènes beaucoup plus simples nécessitant une modélisation et un formalisme mathématique allégé qui malheureusement vous semblera déjà particulièrement lourd !

Le cours porte sur la mécanique dite « classique » qui s'intéresse à la compréhension du mouvement. En fait, elle englobe déjà nombre de mécaniques différentes selon la nature des systèmes physiques étudiés (par exemple : mécanique des solides, des fluides... allez sur wikipedia pour en avoir un aperçu plus exhaustif : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Mecanique>). Nous nous intéressons aux trois premières branches de la mécanique classique :

- **la cinématique** : *correspond à la description du mouvement* ;
- **la statique** : *correspond aux conditions d'équilibre et de repos* ;
- **la dynamique** : *correspond à l'étude des causes du mouvement*.

Dans les trois premiers chapitres nous analyserons le mouvement d'un unique point matériel animé de mouvements rectilignes, paraboliques ou circulaires. Dans les chapitres suivants nous approfondirons ces notions, étendrons notre étude aux mouvements vibratoires/oscillants et aux systèmes constitués de deux points. C'est en deuxième année que les systèmes physiques étudiés se compliqueront. Les aspects de la mécanique classique que nous allons étudier dans ce cours s'appellent communément « physique newtonienne ».

Jusqu'à présent votre cursus en physique limitait au maximum l'utilisation de l'approche mathématique et insistait surtout sur les notions de physique afin de vous fournir une culture particulièrement large. Lors de vos études supérieures un nouveau seuil doit être franchi : vos cours ne seront plus de la culture en physique mais chercheront à vous donner une formation pour devenir physicien. Il vous faudra devenir capable d'analyser un problème, puis de le modéliser, de le résoudre, d'en modifier le contexte ou les paramètres afin de faire des prédictions, et enfin d'évaluer vos résultats. Quel que soit votre futur métier (technicien, ingénieur, docteur...) ces compétences vous seront indispensables. Notre objectif est de vous les apprendre à travers l'étude de la physique.

1.2 Un aperçu de physique fondamentale

Les physiciens du XX^e siècle ont transformé notre vision du monde sur de nombreux niveaux. En premier lieu, on possède aujourd'hui une interprétation microscopique des phénomènes macroscopiques : on peut placer l'atome au centre de notre compréhension.

L'idée que la matière est composée de briques élémentaires n'est pas nouvelle. Les Grecs anciens (V^e siècle av. JC) avaient introduit cette notion grâce à un raisonnement philosophique. Les chimistes des XVIII^e et XIX^e siècles l'ont réintroduite avec les éléments chimiques dans le cadre d'un modèle de la matière pour tenter d'expliquer leurs expériences. Depuis une trentaine d'années on sait prendre des photos des atomes ! Le concept est devenu réalité grâce au développement des technologies expérimentales.

La plupart des phénomènes que l'on observe peuvent se comprendre à l'aide de quatre forces fondamentales :

- **la gravitation** qui décrit l'attraction entre les corps massifs,
- **l'électromagnétisme** qui décrit le jeu entre les charges électriques et qui est la base des phénomènes électriques, magnétiques et lumineux,
- **l'interaction nucléaire forte** expliquant la cohésion du noyau des atomes,
- **l'interaction nucléaire faible** décrivant les phénomènes radioactifs comme la mutation spontanée de particules en d'autres particules plus légères.

On peut se construire une vision (actuelle) du monde en plaçant l'ensemble des phénomènes, ou les divers domaines de la physique, sur trois branches partant de l'atome et allant vers trois « infinis » distincts (voir la figure 1.1). Notons dès à présent que l'infini est un concept abstrait, de nature plutôt mathématique, qui n'existe pas vraiment en physique, ou du moins on n'en sait rien encore. Un physicien devrait parler d'extrêmes plutôt que d'infinis...

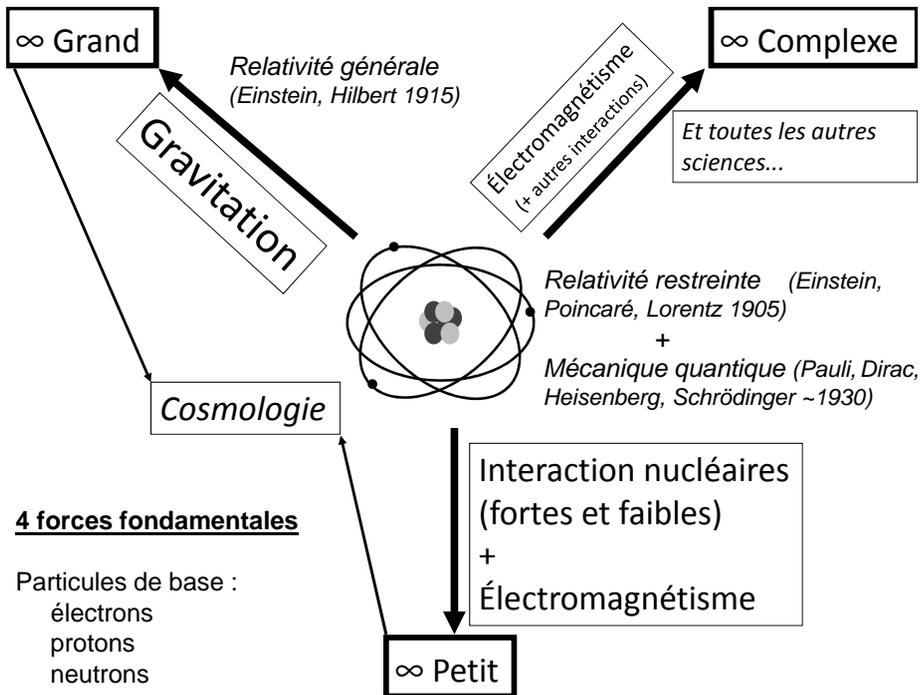


FIGURE 1.1 – Les 4 interactions fondamentales et les 3 infinis

La première branche est celle de l'infiniment grand où règne en maître la gravitation. Dès qu'on dépasse les assemblages de 10^{24} atomes environ (nombre associé à l'échelle du gramme et de la constante d'Avogadro) la gravité domine et agglomère les atomes en des structures de plus en plus grosses : en partant des planètes et en passant par les étoiles, les galaxies et les amas de galaxies, on arrive à la structure filamentaire de l'univers à grande échelle. Ceci est le domaine des astronomes, astrophysiciens et cosmologues.

La seconde branche est celle de l'infiniment petit, où se trouvent les trois autres interactions fondamentales, dites microscopiques. En fait, un atome a une structure relativement complexe. Sa stabilité est assurée par l'électromagnétisme qui explique pourquoi les électrons du nuage électronique sont liés au noyau. Les charges négatives des électrons sont attirées par les charges positives du noyau. C'est le domaine de la physique atomique.

Cependant, pour comprendre la cohésion du noyau qui est constitué de protons et de neutrons, on est obligé de rajouter une nouvelle force, l'interaction nucléaire forte. Mais cette cohésion n'est pas parfaite, et les processus radioactifs impliquent l'introduction de l'interaction nucléaire faible. Le domaine de la physique nucléaire est particulièrement compliqué car les trois interactions microscopiques y jouent un rôle important simultanément.

Néanmoins, en sondant la matière à des distances plus petites encore, en utilisant des énergies plus fortes, on rentre dans le domaine de la physique des particules, dans l'univers des quarks et des gluons, des leptons et des hadrons, des fermions et des bosons, où il devient alors possible d'étudier les trois interactions microscopiques séparément.

La troisième branche concerne celle de l'infiniment complexe. Un atome est globalement électriquement neutre. Cependant, dans un atome, les charges électriques ne sont pas situées au même endroit, ce qui permet l'existence de forces électriques (et magnétiques) résiduelles. C'est ainsi que les atomes vont pouvoir s'assembler pour former des molécules, et les molécules s'assemblent entre elles, soit en réseau pour former les liquides et les solides, soit en macromolécules comme les acides aminés ou l'ARN qui par succession d'assemblages vont nous amener à des choses assez surprenantes telle que la vie...

Sur cette branche, l'interaction dominante est celle de l'électromagnétisme mais elle est rapidement obscurcie par la complexité. En physique, la science fondamentale qui s'intéresse aux propriétés des corps macroscopiques est la thermodynamique, où vous étudierez le jeu entre les atomes et les molécules définissant ce qu'on appelle température, pression ou entropie. En utilisant une vision microscopique des choses, vous entrerez dans le domaine de la physique statistique et vous découvrirez que l'entropie est une mesure de la complexité...

En fait, on peut placer sur la branche de l'infiniment complexe quasiment tous les domaines de la physique et même toutes les sciences y compris les sciences humaines et sociales! La physique du solide, l'hydrodynamique, les systèmes dynamiques (ou théorie du chaos), la physique moléculaire, la chimie, la biologie, la psychologie, la philosophie... en font partie.

Quels rapports avec la mécanique? Cette question est légitime, mais derrière ces trois branches sont cachées les théories physiques et mathématiques qui permettent la description et l'interprétation des phénomènes expérimentaux et observationnels¹. La mécanique « classique » que nous allons étudier dans ce livre va nous permettre d'étudier les phénomènes qui sont gros, lents et pas trop compliqués! Néanmoins, nous allons introduire plusieurs concepts qu'il sera

1. Sur la branche de l'infiniment grand ce sont des observations et non des expériences qui sont réalisées pour obtenir de l'information.

indispensable de maîtriser pour étendre le domaine de validité de la mécanique classique. Par exemple, la notion d'énergie, essentielle, est à la base de toutes les théories de physique moderne.

• Mécaniques non classiques et constantes fondamentales

La première extension de la mécanique est associée au **principe d'Einstein** qui stipule qu'aucune particule, ou information sous forme d'énergie, ne peut aller plus vite qu'une certaine vitesse, notée c , appelée communément vitesse de la lumière. Bien entendu, cette idée trouve sa source dans des observations (l'image des satellites de Jupiter à la fin du XVII^e) puis dans des expériences d'optique (fin du XIX^e), qui ont permis de mesurer la vitesse de la lumière. Ensuite, la nécessité d'unifier les théories de la gravitation de Newton et la théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell ont permis de comprendre le principe selon lequel rien ne va plus vite que la lumière². Certains aspects des lois de Newton sont remis en cause.

Comme la vitesse est le rapport d'une longueur sur un temps (L/T), l'existence d'une vitesse limite introduit une relation fondamentale entre l'espace (L) et le temps (T). On vient de voir apparaître la **notion d'espace-temps** qui est propre à la **mécanique relativiste**, appelée aussi **théorie de la relativité restreinte** introduite par Einstein en 1905. Des phénomènes inattendus, comme la dilatation du temps ou la contraction des longueurs, sont constatés tous les jours sur les particules de hautes énergies, mais nous n'en avons pas conscience car les vitesses des objets qui nous environnent sont très petites devant $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Nous sommes lents!

La seconde extension, introduite par Einstein vers 1915, remplace la théorie de la gravitation de Newton par la **relativité générale** qui est à présent la théorie utilisée pour décrire les effets de la gravité. En un mot, Einstein a montré que les masses ont une influence sur les propriétés de l'espace-temps. On vit dans un espace-temps-matière! Cette théorie est caractérisée par une constante, notée G et appelée constante de Newton ou constante universelle de la gravitation ou plus simplement constante gravitationnelle. Sa valeur $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI caractérise l'intensité de la force de gravitation ($SI \equiv$ Système International, voir plus bas).

La relativité générale a une origine purement théorique et a fait de nombreuses prédictions vérifiées auprès des corps célestes. C'est la théorie de l'infiniment grand et des corps massifs. L'application technologique principale qui lui est associée est le GPS qui a besoin des corrections relativistes pour fournir des informations précises. L'application conceptuelle la plus importante est la possibilité d'avoir une description physique globale de l'univers : la cosmologie physique est née en 1917 et les modèles de big-bang quelques années plus tard.

La troisième extension concerne l'infiniment petit et la nécessité d'introduire une nouvelle mécanique, nommée **mécanique quantique**. À l'échelle des atomes, la mécanique classique ne fonctionne plus, de nouvelles lois apparaissent

2. « Rien » est à définir si on fait une nuance entre énergie et information...

comme, par exemple, l'absence de précision absolue. On ne peut pas mesurer simultanément position et vitesse avec la précision que l'on veut, il y a une limite inférieure connue sous le nom de « relation d'incertitude de Heisenberg ». Le déterminisme est remplacé par les statistiques et les probabilités, le certain par l'incertain... Nous n'avons pas conscience de ces phénomènes surprenants car les atomes sont très petits par rapport à nous (nous calculerons dans la partie suivante que la taille caractéristique d'un atome est de l'ordre de l'ångström : $r_a \approx 10^{-10}m$). Nous sommes gros !

Le monde quantique est caractérisé par la constante de Planck, noté h et qu'on appelle « action ». Une action en physique est une énergie fois un temps, ce qui est équivalent à une position fois une masse fois une vitesse :

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}.$$

Ceci doit commencer à vous sembler nébuleux, et c'est bien normal. Nous arrêtons là notre discussion sur les mécaniques non classiques, car nous avons déjà en main les constantes et les concepts qui vont nous permettre de trouver les formules et les ordres de grandeurs qui caractérisent les mondes des infiniments petits et grands. Dans la section suivante après avoir défini les unités et les dimensions, nous verrons qu'à l'aide des constantes fondamentales de la physique et du seul raisonnement dimensionnel il va nous être possible de calculer les tailles du noyau, d'un atome, d'une planète et d'une étoile, on pourra aussi calculer le nombre d'atomes qu'il y a dans 1 g de matière, le nombre d'étoiles qu'il y a dans notre galaxie ou encore le nombre de galaxies qu'il y a dans l'univers observable.

1.3 Analyse dimensionnelle, ordres de grandeur

1.3.1 Unités, dimensions et présentation des résultats

• Principes

Contrairement à vos habitudes du lycée, dans l'enseignement supérieur il vous est demandé de **présenter vos résultats sous forme « littérale »**, c-à-d à l'aide de symboles représentant les quantités physiques. On parle aussi d'expression « symbolique » ou « fonctionnelle ». Cet effort d'abstraction qui vous est demandé est un point crucial de votre formation car cela vous permettra, entre autre, de :

- **vérifier un résultat après un raisonnement rigoureux,**
- **obtenir une formule après un raisonnement intuitif,**
- **comprendre la dépendance fonctionnelle d'une quantité par rapport aux paramètres et variables dont elle dépend.**

Ce dernier point est repris tout au long de ce livre, où chaque quantité physique sera traitée comme une fonction et non comme un nombre (ou un ensemble de nombres). Les valeurs des quantités physiques ne seront traitées qu'à la fin du raisonnement dans le cadre d'une application numérique (d'acronyme *AN*). Les deux premiers points sont propres à l'analyse dimensionnelle, objet d'étude du reste de ce chapitre.

Cette approche devient indispensable lorsque les problèmes, et donc les calculs, se compliquent : on peut toujours avoir un doute sur le résultat obtenu, et très souvent un simple raisonnement dimensionnel nous permet de constater une erreur. On l'utilisera fréquemment dans ce cours et nous vous conseillons de l'utiliser systématiquement lorsque vous obtiendrez un résultat. En général, un correcteur d'examen est sans pitié lorsqu'une réponse est fautive du point de vue dimensionnel...

L'analyse dimensionnelle peut aussi se révéler très puissante pour obtenir des formules, des expressions littérales de certaines quantités physiques, à partir de simples raisonnements intuitifs. Nous donnerons quelques exemples de ce type de raisonnement dans la section suivante. Il est possible de déterminer l'expression d'une loi en une ou deux lignes de calculs élémentaires alors qu'une approche rigoureuse demandera plusieurs pages de calculs après avoir lu plusieurs chapitres d'un livre, voire plusieurs livres !

Le raisonnement à appliquer est le suivant :

- la quantité recherchée (l'inconnue) est proportionnelle *au produit*³ des quantités fournies par l'énoncé ou par le raisonnement intuitif (les paramètres).
- les paramètres possèdent une certaine puissance que l'on détermine soit par déduction directe si le problème est simple, soit en posant un système de n équations à p inconnues ($n \geq p$) que l'on résout par analyse dimensionnelle. (p correspond au nombre de paramètres et n au nombre de dimensions de base intervenant dans les diverses quantités physiques du problème (les paramètres et l'inconnue) ; si $p > n$ il pourra exister plusieurs solutions).

Cependant, il faut bien garder à l'esprit, que **l'analyse dimensionnelle n'est qu'une méthode intuitive et approximative : rien ne garantit la véracité du raisonnement et le résultat ou la formule ne sont possiblement vrais qu'à une constante près.** En d'autres mots, c'est « de la physique avec les mains » ! Seuls des raisonnements rigoureux, sujets des autres chapitres de ce livre, vous permettront d'obtenir des résultats plus précis.

• Unités et dimensions

Concernant les unités, nous utilisons le système international noté *SI* ou *MKSA* pour *Mètre Kilogramme Seconde Ampère*. Parfois il est judicieux d'utiliser d'autres unités (kilomètre, heure...). Nous considérons que vous êtes capable d'effectuer les changements d'unités (toutefois un rappel est donné ci-dessous).

La dimension est la grandeur physique associée à un objet physique indépendamment de l'unité utilisée pour la mesure de l'objet. Ainsi :

- la dimension « longueur » sera notée L et son unité m ;
- la dimension « masse » sera notée M et son unité kg ;

3. Pour qu'il y ait une « somme » il faut avoir plusieurs termes possédant la même dimension, cela peut arriver bien sûr, mais on est alors confronté à un problème trop complexe pour le raisonnement dimensionnel. Une approche rigoureuse est indispensable. L'analyse dimensionnelle permet alors seulement de vérifier la comptabilité des différents termes à sommer.

- la dimension « temps » sera notée T et son unité s .

On dit que deux quantités physiques sont « homogènes » si elles ont la même dimension.

Exemples : La vitesse v d'un objet est le rapport d'une longueur sur un temps, on écrit alors : $[v] = LT^{-1}$. On utilise des crochets $[\]$ pour exprimer le fait qu'on ne s'intéresse qu'à la dimension de l'objet considéré. L'accélération a a pour dimension $[a] = LT^{-2}$.

Dès que l'on s'intéresse aux forces électromagnétiques, il est nécessaire de rajouter une nouvelle grandeur⁴ : la charge électrique (notée q pour une particule ou Q pour un objet macroscopique). La dimension « charge » sera notée C et son unité, le Coulomb, sera notée également C .

Il ne faut pas confondre dimension et unité. En effet, une quantité physique a une et une seule dimension, en revanche elle peut être exprimée dans plusieurs systèmes d'unités différents. Par exemple, un physicien exprime une longueur en mètre, un astronome en parsec et un vulgarisateur parlant des étoiles ou des galaxies utilise l'année-lumière...

Le changement d'unité s'effectue par un simple facteur de conversion. Ce facteur peut sembler difficile à obtenir si la quantité physique a une dimension compliquée faisant intervenir un produit d'unités avec des puissances différentes. Cependant, ce facteur de conversion s'obtient simplement en utilisant l'astuce suivante : on multiplie par un facteur 1 défini comme le rapport des unités à convertir en respectant l'ordre « nouvelle unité / ancienne unité » (voir exercice de cours C1.1 ci-dessous) .

• Applications numériques et incertitudes

Enfin, précisons que **pour toutes les applications numériques**, où le résultat est exprimé sous la forme d'un nombre, **on ne précisera que trois chiffres significatifs, afin d'avoir une précision inférieure à 1%, et on donnera toujours l'unité associée à la quantité physique calculée.**

Le terme « précision » est flou. On définit de façon élémentaire deux types d'incertitudes pour une quantité physique donnée. Soit x une quantité physique. Soit x_r sa « valeur de référence » qui peut être soit une valeur moyenne, soit une valeur théorique, ou tout autre type de valeur que l'on croit être la plus proche de la véritable quantité physique recherchée. Soit x_e la « valeur estimée » qui peut être soit une valeur expérimentale, soit une valeur associée à un modèle spécifique ou à une approximation particulière.

- **L'incertitude absolue**, notée Δx , est telle que $\Delta x = |x_r - x_e|$. La quantité physique et Δx sont homogènes (même dimension).

- **L'incertitude relative**, notée $\Delta x/x$, est telle que $\Delta x/x = |(x_r - x_e)/x_r|$. L'incertitude relative $\Delta x/x$ est sans dimension.

On peut, à présent, clarifier le sens du terme « précision » du paragraphe précédent : ne retenir que 3 chiffres significatifs à la valeur numérique d'une quantité

4. En toute rigueur, dans le système MKSA, c'est le courant électrique I (avec l'unité Ampère A) qu'il faudrait introduire, mais nous préférons la charge C dans ce livre.

physique correspond à une approximation dont l'erreur relative est inférieure à 1%. Par exemple, la vitesse limite relativiste $c = 299\,792\,458\text{ m/s} \equiv x_r$ peut être approchée par la valeur $c \simeq x_e = 3,00\,10^8\text{ m/s}$, ce qui donne une erreur absolue $\Delta x = 2,08\,10^6\text{ m/s}$ et une erreur relative $\Delta x/x = 0,07\%$. Autre exemple : si $x_r = 102,5$ et $x_e = 102$ on obtient $\Delta x/x = 0,49\%$.

En fait les notions d'incertitudes et d'erreurs vont bien au-delà des définitions élémentaires précédentes. En toute rigueur une incertitude est généralement associée à un intervalle de confiance, ce qui nécessite, pour être proprement défini, d'entrer dans le domaine des statistiques et des probabilités... Dans ce livre, nous ne rentrerons pas dans les détails de cette complexité, et nous donnerons uniquement les valeurs centrales des quantités physiques et des constantes fondamentales, mais n'oubliez pas que toute valeur n'est qu'approximative et possède une incertitude⁵...

• Exercice de cours C1.1 – Conversions

Effectuer les conversions et donner les dimensions des grandeurs concernées :

1) Votre dernier voyage a duré une heure et quinze minutes. Donner le temps du trajet en minutes, en heures et en secondes.

2) Le jour sidéral dure $T_S = 86\,164\text{ s}$, exprimer cette durée en heures, minutes et en valeurs entières avec un mélange des unités heures, minutes et secondes.

3) La vitesse du son dans l'air est de 340 m/s , exprimer cette vitesse appelée « Mach 1 » en km/h .

4) Le débit d'une source est de 3 litres par minute. Combien de cuves de 1 m^3 vous faut-il si vous voulez récupérer toute l'eau fournie en une journée ?

Réponses

1) Soit $t = 1\text{ h }15\text{ min}$ le temps de trajet. On a :

$$\begin{aligned} t = 1\text{ h }15\text{ min} &= 1\text{ h} \frac{60\text{ min}}{1\text{ h}} + 15\text{ min} = 75\text{ min} \\ &= 75\text{ min} \frac{1\text{ h}}{60\text{ min}} = 1,25\text{ h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 1\text{ h }15\text{ min} &= 1\text{ h} + 15\text{ min} \frac{1\text{ h}}{60\text{ min}} = 1,25\text{ h} \\ &= 75\text{ min} \frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 4500\text{ s} \end{aligned}$$

$$\text{(ou)} \quad = 1,25\text{ h} \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} = 4500\text{ s}$$

$$\text{(ou)} \quad = 1\text{ h} \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} + 15\text{ min} \frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 4500\text{ s}$$

La dimension de t est un temps : $[t] = T$.

5. Exceptée la vitesse de la lumière dans le vide, depuis 1983, mais ceci est une autre histoire qui vous sera contée dans un cours de relativité restreinte...

2) La dimension de T est un temps : $[T_S] = T$. Les conversions donnent :

$$\begin{aligned} t = 86164 \text{ s} &= 86164 \text{ s} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 23,934 \text{ h} \\ &= 86164 \text{ s} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1436,067 \text{ min} \\ &= 23 \text{ h} + 0,934 \text{ h} \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 23 \text{ h } 56,067 \text{ min} \\ &= 23 \text{ h} + 56 \text{ min} + 0,067 \text{ min} \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} \end{aligned}$$

3) Dans cet exemple il y a deux unités différentes à changer simultanément :

$$v = 340 \text{ m.s}^{-1} = \frac{340 \text{ m}}{1 \text{ s}} \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 340 \times 3,6 \text{ km.h}^{-1} = 1224 \text{ km.h}^{-1}$$

La dimension d'une vitesse vaut : $[v] = LT^{-1}$.

4) Dans cet exemple le changement d'unité est « multiple », car $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ et $1 \text{ j} = 24 \text{ h} = 24 \times 60 \text{ min} = 1440 \text{ min}$:

$$\begin{aligned} d = 3 \text{ l.min}^{-1} &= \frac{3 \text{ l}}{1 \text{ min}} \frac{1 \text{ dm}^3}{1 \text{ l}} \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ dm}^3} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ j}} = 3 \times \frac{1440}{1000} \text{ m}^3.\text{j}^{-1} \\ &= 3 \times 1440 \times 10^{-3} \text{ m}^3.\text{j}^{-1} = 4,32 \text{ m}^3.\text{j}^{-1} \end{aligned}$$

Il faudra donc 5 cuves. La dimension du débit vaut : $[d] = L^3T^{-1}$.

• Exercice de cours C1.2 – Dimensions

Lors de l'étude du mouvement circulaire et uniforme, on s'intéressera aux propriétés d'un point situé à la distance r du centre de rotation et animé de la vitesse v . On définit l'accélération centripète comme $a_c = v^2/r$. La quantité $\omega = v/r$ est appelée vitesse angulaire.

- 1) L'accélération centripète est-elle homogène à une accélération ?
- 2) La vitesse angulaire est-elle homogène à une vitesse ?

Réponses

1) La dimension de l'accélération centripète vaut $[a_c] = [v^2/r] = L^2T^{-2}/L = LT^{-2}$ ce qui est bien la dimension d'une accélération $[a] = [\Delta v/\Delta t] = [dv/dt] = LT^{-1}/T = LT^{-2}$. Pas de soucis ce coup-ci.

2) Deux quantités sont homogènes si leurs dimensions sont identiques. On a vu que la dimension d'une vitesse vaut $[v] = LT^{-1}$, en revanche la dimension de la vitesse angulaire vaut $[\omega] = [v/r] = T^{-1}$. La vitesse angulaire n'est donc pas une vitesse au sens usuel du terme ! *Il faut toujours se méfier du vocabulaire employé par les physiciens, qui est parfois trompeur...* Un nom plus adapté pour cette quantité pourrait être « fréquence angulaire ». La précision « angulaire » sera étudiée et comprise dans le chapitre 2.

1.3.2 Angle : dimension et unités

Avant de passer aux sections suivantes qui sont de simples applications du raisonnement dimensionnel, nous voulons vous faire réfléchir sur la nature des angles et de leurs unités. **Les angles sont des objets sans dimension : $[\theta] = 1$.** Pourtant on leur attribue des unités! Dans vos études précédentes vous avez surtout utilisé les *degrés*, dans la vie de tous les jours on parle surtout de *tours* mais en mathématiques les *radians* ont été introduits et en particulier le nombre π . Voici la correspondance entre ces diverses unités :

$$1 \text{ tour (tr)} = 2\pi \text{ radians (rad)} = 360 \text{ degrés (}^\circ\text{)}$$

Dans vos études supérieures vous allez devoir jongler avec ces trois unités car le tour est facilement visualisé par notre esprit, les degrés sont utilisés dans les sciences expérimentales, mais pour la théorie, quand on a des calculs compliqués à faire, on utilise les radians.

La compréhension de ce dernier point fait appel à la « magie » du nombre π : ce nombre fait le lien entre le « droit » et le « courbe », entre les angles et les distances. La définition géométrique de π est associée au rapport du périmètre (P) d'un cercle sur son diamètre (D) : $\pi = P/D$. Cette définition nous montre bien que c'est un nombre sans dimension : $[\pi] = [P/D] = L/L = 1$. Tous les angles ont la même propriété que π : ils sont sans dimension.

On peut affiner notre compréhension en se souvenant que la longueur d'un arc de cercle (ℓ) de rayon R délimité par un angle θ est égal au produit du rayon par l'angle : $\ell = R\theta$. Du point de vue des dimensions ça nous donne $[\ell] = [R\theta] \Rightarrow [\theta] = [\ell/R] = L/L = 1$: θ est sans dimension.

Cependant, il est fondamental de réaliser que **cette correspondance entre longueur droite et longueur courbe est réalisée avec des angles exprimés en radians**. Ainsi l'unité naturelle en physique et en mathématique est le radian. Dès qu'un produit de grandeurs physiques est homogène à un angle, l'unité à utiliser est le radian. Et comme les angles sont sans dimension, écrire lors d'une application numérique *rad* ou rien du tout, a peu d'importance. En revanche, si on utilise une autre unité d'angle, il est crucial de l'indiquer afin de se rappeler qu'on ne pourra pas multiplier ce nombre par une longueur pour obtenir une autre longueur. Afin d'éviter toute confusion, il est préférable de toujours indiquer l'unité d'angle utilisée.

Enfin, nous allons avoir besoin, dans certaines parties de ce livre, de formules donnant des valeurs approximatives des fonctions trigonométriques. *Lorsque les angles sont petits et exprimés en radians* on peut utiliser les relations :

$$\text{si } \theta \text{ (rad)} \ll 1 \quad \text{alors} \quad \sin \theta \simeq \theta \quad , \quad \tan \theta \simeq \theta \quad , \quad \cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Ces formules fort utiles sont appelées « développements limités » et sont décrites plus en détails dans le formulaire mathématique (annexe A) de cet ouvrage. Ces formules nous montrent que les angles, tout comme les fonctions trigonométriques, sont des objets sans dimension...

1.3.3 Exercice de cours C1.3 – Forces, énergies, actions

1) La seconde loi de Newton, ou relation fondamentale de la dynamique classique, stipule qu'une force est proportionnelle au produit de la masse et de l'accélération (si la masse est constante). Calculer la dimension d'une force.

2) La force de gravitation exprime l'interaction entre deux corps de masse m et m' séparés par une distance r . Son expression est donnée par la relation $F_G = Gmm'/r^2$ où la constante $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI représente l'intensité de la force gravitationnelle. Déterminer la dimension de G et son unité.

3) La force électrique exprime l'interaction entre deux corps de charge q et q' séparés par une distance r . Son expression est donnée par la relation $F_e = k_e qq'/r^2$ où la constante $k_e = 8,96 \cdot 10^9$ SI représente l'intensité de la force électrique (souvent, la constante k_e est écrite sous la forme $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ où ϵ_0 est la « permittivité » du vide, notion qui sera étudiée dans un cours d'électromagnétisme). Déterminer la dimension de k_e et son unité.

4) On appelle « travail d'une force » l'énergie associée au mouvement causé par la force. Le travail, noté W , est proportionnel au produit de l'intensité de la force et du déplacement effectué. En déduire la dimension d'une énergie.

5) **Détermination de l'expression de l'énergie cinétique :**

Sachant que l'énergie cinétique d'un objet est proportionnelle à sa masse et à sa vitesse, calculer l'expression de l'énergie cinétique à une constante près.

6) Déterminer l'expression de la célèbre formule d'Einstein issue de la théorie de la relativité restreinte donnant l'énergie de masse d'une particule de masse m et faisant intervenir la constante fondamentale c (la vitesse limite de transmission des interactions). Estimer (en joules) l'énergie de masse d'un proton sachant que $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

7) Une action est proportionnelle au produit de la position, de la masse et de la vitesse. Calculer la dimension d'une action et montrer qu'elle est homogène au produit de l'énergie et du temps. Quelle constante fondamentale est homogène à une action ? Quelle est la dimension de la constante de Planck « réduite » $\hbar = h/(2\pi)$?

Réponses

1) Par définition $[F] = [ma] = MLT^{-2}$.

2) On a $[G] = [Fr^2/(mm')] = [Fr^2/m^2] = MLT^{-2}L^2/M^2 = M^{-1}L^3T^{-2}$, d'où $G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}$.

3) On a $[k_e] = [Fr^2/(qq')] = [Fr^2/q^2] = MLT^{-2}L^2/C^2 = ML^3T^{-2}C^{-2}$, d'où $k_e = 8,96 \cdot 10^9 kg \cdot m^3 \cdot s^{-2} \cdot C^{-2}$.

4) La dimension d'une énergie est par définition $[E] = [W] = [Fr] = ML^2T^{-2}$.

5) Pour la première fois, on demande de déterminer l'expression d'une formule ! On va appliquer la méthode donnée au début de la section 1.3.1.

L'énoncé nous dit que l'énergie cinétique E_c est une fonction de m et v : $E_c = f(m, v)$. Les quantités (paramètres) m et v ont pour dimensions : $[m] = M$ et $[v] = L \cdot T^{-1}$. L'énergie cinétique (fonction inconnue des paramètres) a pour dimension $[E_c] = [W] = ML^2T^{-2}$.

Méthode 1 : raisonnement intuitif direct

Le simple examen des dimensions des trois quantités physiques impliquées dans le problème montre que $[E_c] = [mv^2] = ML^2T^{-2}$. Donc : $E_c \approx mv^2$.

Méthode 2 : calcul brutal. On pose :

$$E_c = m^x v^y \Rightarrow [m^x v^y] = M^x L^y T^{-y} = [E_c] = ML^2 T^{-2} \Rightarrow \begin{cases} (M) : x = 1 \\ (L) : y = 2 \\ (T) : -y = -2 \end{cases}$$

Les deux dernières équations obtenues sur les dimensions de base L et T sont redondantes mais cohérentes. Le système a bien une solution unique donnant à nouveau : $E_c \approx mv^2$. Il faudra un raisonnement rigoureux pour obtenir le facteur numérique $1/2$ qu'il manque à cette formule. Nous le ferons lors du chapitre 4 à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique classique et d'un peu de calcul différentiel.

6) L'énergie de masse E_M est reliée à la masse m de la particule et la vitesse c . On a vu qu'une énergie est homogène à une masse fois une vitesse au carré, donc $E_M \approx mc^2$. Vous montrerez dans votre cours de relativité que l'égalité est exacte : $E_M = mc^2$ (il n'y a pas de facteur $1/2$ comme pour l'énergie cinétique). Pour un proton, on obtient $E_M^{proton} = m_p c^2 = 1,50 \cdot 10^{-10} J$.

7) Par définition $[A] = [rmv] = ML^2T^{-1}$. Par ailleurs, $[E.t] = ML^2T^{-2}T = ML^2T^{-1} = [A]$: une énergie fois un temps est bien homogène à une action. La constante de Planck h est homogène à une action. La constante de Planck réduite $\hbar = h/(2\pi)$ l'est aussi car les angles sont sans dimension : $[h] = [\hbar] = ML^2T^{-1}$ et $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} J.s = 1,05 \cdot 10^{-34} kg.m^2.s^{-1}$.

1.3.4 Exercice de cours C1.4 – Atomes et noyaux

Les atomes sont des systèmes constitués d'électrons, de charge électrique négative $q_e = -1.60 \cdot 10^{-19} C \approx 10^{-19} C$ et de masse $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} kg \approx 10^{-30} kg$, en interaction électromagnétique avec un noyau de charge électrique positive. Le noyau est constitué de protons et de neutrons en interactions nucléaires. La masse du proton vaut $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} kg \approx 10^{-27} kg$, et celle du neutron vaut $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} kg \approx 10^{-27} kg$. La charge électrique des protons est positive et vaut « exactement » l'opposé de la charge des électrons⁶ : $q_p = -q_e$. Les neutrons ont une charge globalement neutre⁷ : $q_n = 0$. Dans cet exercice et les suivants on utilisera la constante de Planck réduite \hbar dès que des effets quantiques seront impliqués.

Partie A : Atomes

A1) Montrer que la force dominante dans les atomes est électromagnétique et non gravitationnelle. Pour cela, on étudiera l'atome le plus simple, l'atome

6. On n'a pas encore compris l'origine de cette exactitude... L'idée de « grande unification » tente d'apporter une solution à ce problème.

7. Les neutrons sont constitués de quarks qui, eux, possèdent des charges électriques non-nulles. Les neutrons possèdent donc des propriétés électromagnétiques. Historiquement, ce sont les mesures de ces propriétés qui ont amené l'idée que les neutrons n'étaient pas élémentaires, qu'ils possédaient une sous-structure, les fameux quarks.

d'hydrogène, et on appellera r_a la distance séparant l'électron du proton.

A2) En physique atomique, c'est la constante $e^2 = q_e^2 / (4\pi\epsilon_0) = k_e q_e^2$ qui est fréquemment utilisée. Fournir sa dimension, son unité et estimer sa valeur.

A3) Dans le cadre de l'électrodynamique quantique (théorie quantique (\hbar) et relativiste (c) de l'électromagnétisme (e^2)) on introduit une nouvelle constante, notée α et appelée « constante de couplage » de l'interaction électromagnétique. À partir des quantités e^2 , \hbar et c , donner l'expression puis estimer la constante de couplage α . Cette constante est sans dimension et plus petite que 1.

A4) À partir des quantités e^2 et \hbar donner l'expression de la vitesse caractéristique des électrons dans les atomes, notée v_a . Donner l'expression de v_a en fonction de α et c . Estimer v_a .

A5) À partir des quantités e^2 , \hbar et m_e , donner l'expression de la taille caractéristique des atomes, notée r_a . Donner l'expression de r_a en fonction de α , c , \hbar et m_e . Estimer r_a .

A6) L'énergie d'ionisation caractéristique des atomes, notée E_H , est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher les électrons extérieurs d'un atome. À partir des quantités e^2 , \hbar et m_e , donner l'expression de E_H . Déterminer E_H en fonction de α , c et m_e . Estimer E_H en J et en électron-Volt. (L'électron-Volt, noté eV, est l'unité d'énergie utilisée dans les domaines physiques de l'infiniment petit (physique atomique, physique nucléaire et physique des particules), la correspondance entre unités est donnée par la relation $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.)

A7) Comparer les différentes énergies intervenant dans le système physique « atome d'hydrogène ». En déduire l'origine de la masse des atomes, et finalement l'origine de la masse de la matière.

A8) À partir des quantités r_a et m_p , donner l'expression puis estimer la densité en masse⁸ caractéristique des atomes, notée ρ_a .

Partie B : Noyaux et proton

Dans un noyau la force dominante est l'interaction forte, caractérisée par une constante de couplage $\alpha_s \approx 1$.

B1) À partir des résultats de la question A5, en fonction \hbar , c , m_p et α_s , donner l'expression puis estimer la taille caractéristique des noyaux, notée r_N .

B2) À partir des résultats de la question A6, donner l'expression en fonction c , m_p et α_s de l'énergie caractéristique des noyaux, notées E_N . Estimer E_N (en J et en eV (ou GeV)). Commenter votre résultat à la lumière de vos connaissances en physique nucléaire.

B3) À partir des quantités a_N et m_p , donner puis estimer l'expression de la densité (en masse) caractéristique des noyaux, notée ρ_N . Comparer cette valeur à ρ_a .

B4) Un proton est constitué de 3 quarks, dits « de valence », et de gluons. Les 3 quarks se répartissent en 2 quarks « up » et 1 quark « down » (le neutron est constitué de 2 « down » et 1 « up »). Les gluons ont une masse nulle, la masse du quark up vaut $m_u \simeq 3 \text{ MeV}/c^2 = 5,35 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ et celle du quark down vaut $m_d \simeq 5 \text{ MeV}/c^2 = 8,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$. Comparer la masse du proton à la somme des masses de ses constituants. Quelle conclusion en tirez-vous ?

8. Dans ce livre, la masse volumique sera appelée abusivement « densité en masse » ou simplement « densité », une densité étant normalement un rapport sans dimension.

Partie C : Constante d'Avogadro, passage micro \longleftrightarrow macro

C1) Rappeler les définitions de la constante d'Avogadro et de la mole, unité utilisé en physique et en chimie.

C2) Calculer la quantité $1/m_p$ en g^{-1} . Comparer votre résultat à N_A .

C3) En supposant que proton et neutron ont la même masse m_p , calculer le nombre de protons (en fait, de nucléons) qu'il y a dans 1 cm^3 d'eau. Comparer votre résultat à N_A . Essayer de développer une nouvelle interprétation de la constante d'Avogadro.

C4) Questions subsidiaires pour éviter toute confusion : Quel est le nombre de molécules d'eau dans 1 cm^3 ? Combien de cm^3 et de g d'eau faut-il pour avoir N_A molécules d'eau ?

Réponses de la partie A : Atomes

A1) L'intensité de la force gravitationnelle est donnée par $F_G = Gm_em_p/r_a^2$, et celle de la force électromagnétique par $F_e = k_e|q_e|q_p/r_a^2$. La quantité r_a n'est pas encore connue (elle sera calculée lors de la question A5). Pour s'affranchir de cette inconnue, le plus simple est de calculer le rapport des deux forces :

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{k_e|q_e|q_p}{r_a^2} \frac{r_a^2}{Gm_em_p} = 2,26 \cdot 10^{39} \quad (1.1)$$

On constate donc que la force gravitationnelle est totalement négligeable dans les atomes. La force qui lie électrons et noyaux dans les atomes est purement électromagnétique.

A2) Par définition et en utilisant la réponse de la question 3 de l'exercice C1.3, on a : $[e^2] = [k_e q_e^2] = [F r^2] = [m a r^2] = M L^3 T^{-2}$, ce qui donne $e^2 = 2,5 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.

A3) Méthode 1 : raisonnement intuitif direct

On a $[e^2] = M L^3 T^{-2}$, $[c] = L T^{-1}$ et $[\hbar] = M L^2 T^{-1}$. On constate immédiatement que le produit $\hbar c$ est homogène à e^2 : $[\hbar c] = M L^3 T^{-2} = [e^2]$. Le rapport des deux facteurs ($\hbar c$) et e^2 est sans dimension. Donc $\alpha \approx e^2/(\hbar c)$ ou l'inverse $\alpha \approx (\hbar c)/e^2$. C'est l'application numérique permettant d'estimer les ordres de grandeur de ces deux expressions qui nous permettra de trancher. Nous le faisons plus bas, après avoir présenté le raisonnement par calcul brutal.

Méthode 2 : calcul brutal

On pose : $\alpha = (e^2)^x c^y \hbar^z \Rightarrow [\alpha] = [1] = M^x L^{3x} T^{-2x} L^y T^{-y} M^z L^{2z} T^{-z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M) : x + z = 0 \\ (L) : 3x + y + 2z = 0 \\ (T) : -2x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les trois équations obtenues ne sont pas indépendantes bien qu'elles soient cohérentes. On obtient une infinité de solutions, une pour chaque valeur de x . Les cas les plus simples correspondent à $x = 1$: $\alpha \approx e^2/(\hbar c)$, et à $x = -1$: $\alpha \approx (\hbar c)/e^2$. On retrouve le résultat obtenu par le raisonnement intuitif direct.

Les autres valeurs de x , excepté le cas trivial $x = 0$ ne donnant aucune information, correspondent en fait au même rapport sans dimension entre les trois constantes fondamentales, mais élevé à une puissance quelconque.

Numériquement on obtient $e^2/(\hbar c) = 7,275 \cdot 10^{-3}$ et $(\hbar c)/e^2 = 137,46$. Sachant que α est plus petit que 1, on en déduit que le cas $x = 1$ est le bon. **La constante de couplage électromagnétique vaut : $\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$.**

A4) Grâce à la question précédente, et en se rappelant que c est une vitesse on déduit immédiatement que $[v_a] = [c] = [e^2/\hbar] = L.T^{-1}$ et donc que **la vitesse caractéristique des électrons dans les atomes vaut : $v_a \approx e^2/\hbar = \alpha c = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.**

A5) Pour déterminer l'expression de r_a , la taille caractéristique des atomes, l'intuition est mise à rude épreuve, le plus simple est de faire un calcul brutal :

$$r_a = (e^2)^x m_e^y \hbar^z \Rightarrow [r_a] = L = M^x L^{3x} T^{-2x} M^y M^z L^{2z} T^{-z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M) : x + y + z = 0 \\ (L) : 3x + 2z = 1 \\ (T) : -2x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-L - 2T) : x = -1 \\ (2L + 3T) : z = 2 \\ (M) : y = -1 \end{cases}$$

La taille caractéristique des atomes est donc donnée par :

$$r_a \approx \hbar^2/(m_e e^2) = \hbar/(\alpha m_e c) = 5,26 \cdot 10^{-11} \text{ m} \simeq 0,5 \text{ \AA} \quad (1.2)$$

Un calcul beaucoup plus rigoureux (modèle de Bohr) donnera le même résultat pour l'atome d'hydrogène et permettra de comprendre pourquoi m_p la masse du proton n'intervient pas. En physique atomique vous découvrirez que la taille des atomes est très dépendante de leur degré d'excitation, et leur structure particulièrement complexe...

A6) Une énergie a pour dimension $[E_H] = ML^2T^{-2}$. On sait que $[e^2] = ML^3T^{-2}$, donc $[e^2/E_H] = L$. Comme les expressions de E_H et de r_a utilisent les mêmes constantes, on en déduit que $L = [r_a] = [e^2/E_H]$. **L'énergie d'ionisation caractéristique des atomes est donnée par :**

$$E_H \approx e^2/r_a = m_e e^4/\hbar^2 = \alpha^2 m_e c^2 = 4,35 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 27,2 \text{ eV} \quad (1.3)$$

Un calcul beaucoup plus rigoureux, réalisé dans le cadre quantique et relativiste, donnera le même résultat divisé par un simple facteur 2 pour l'atome d'hydrogène! Pour ioniser un atome d'hydrogène, c'est-à-dire pour expulser l'électron de l'atome, il faut fournir une énergie de $13,6 \text{ eV}$ ($2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$).

A7) L'atome d'hydrogène est constitué de seulement deux particules : un électron et un proton. Il y a donc deux énergies associées à ces masses, l'énergie de masse du proton $E_M^p = m_p c^2 = 1,50 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 938 \text{ MeV} \approx 1 \text{ GeV}$, et l'énergie de masse de l'électron $E_M^e = m_e c^2 = 0,82 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 511 \text{ keV} \approx 0,5 \text{ MeV}$. Cependant, une troisième énergie intervient dans le système physique, celle associée à l'interaction électromagnétique entre le proton et l'électron, la force qui lie électron et proton au sein de l'atome. L'énergie correspondante a été

calculée à la question précédente, c'est l'énergie de liaison atomique ou énergie d'ionisation : $E_H = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV} \approx 10 \text{ eV}$.

Les ordres de grandeur de ces trois énergies sont très différents : le proton domine l'électron d'un facteur 2000 ($E_M^p/E_M^e = m_p/m_e = 1,84 \cdot 10^3$), et le proton domine la liaison d'un facteur 100 millions ($E_M^p/E_H = 0,69 \cdot 10^8$). L'énergie de l'atome d'hydrogène est donc égale, à une très bonne approximation, à l'énergie de masse du proton.

Néanmoins, les concepts d'énergies sont relativement abstraits pour l'instant, et il est sans doute préférable de raisonner sur le concept de masse. Nous étudierons en détails différentes formes d'énergies dans le chapitre 4 de ce cours. Le problème avec le raisonnement en terme de masse est de comprendre le sens physique de l'énergie de liaison atomique qui n'est pas une masse. La première étape est simple, et vient du raisonnement dimensionnel : il suffit de diviser E_H par c^2 pour obtenir la quantité homogène à une masse. Pour la deuxième étape, plus complexe et qui sera détaillée lors du chapitre 8, il faut réaliser que cette énergie de liaison doit être comptée négativement dans un bilan d'énergie ! En effet, on passe du système physique « atome » (= électron + proton liés) au système « électron + proton libres » en *ajoutant* de l'énergie, c'est l'énergie d'ionisation. Donc le système lié « atome » possède une énergie plus faible que le système avec particules libres. En terme de masse cela veut dire que la masse de l'atome d'hydrogène (m_H) est plus faible que la somme des masses de l'électron et du proton. **La masse d'un atome est plus faible que la masse de ses constituants.** Il faut *soustraire* l'énergie/masse de liaison/ionisation :

$$m_H < m_p + m_e \quad \Rightarrow \quad m_H = m_p + m_e - E_H/c^2 \quad (1.4)$$

Mais on a vu que les trois termes intervenant dans la définition de m_H sont très différents : $m_H \simeq m_p$, la masse de l'atome d'hydrogène vient donc de la masse du proton. D'une façon générale, **les masses des atomes sont très proches des masses de leurs noyaux.**

Au niveau des molécules, la liaison (moléculaire ou chimique) entre les atomes est de nouveau réalisée par une interaction électromagnétique. Bien que les atomes soient électriquement neutres, les charges électriques du noyau et des électrons ne sont pas localisées au même endroit ce qui amène à des effets électriques « secondaires ». Cet effet, dit de « dipôle électrique », sera étudié l'an prochain dans un cours d'électrostatique. « Secondaire » a été mis entre guillemets car sans cet effet les molécules n'existeraient pas, et sans molécules pas de liquides, ni de solides, ni de cellules ! Secondaire, car les forces associées ou plutôt les énergies associées à ces liaisons chimiques sont encore plus faibles que les liaisons atomiques. Ce qui nous amène à la conclusion que **la masse de la matière vient de la masse des atomes qui vient de la masse de leurs noyaux.**

A8) La densité en masse, ou masse volumique, est par définition le rapport entre la masse et le volume. Pour l'atome le plus simple, l'hydrogène, on a vu que $m_H \simeq m_p$, ce qui justifie l'utilisation du paramètre m_p pour estimer la densité en masse caractéristique des atomes ρ_a . Un raisonnement purement

dimensionnel indique que le volume V_a est proportionnel à la taille caractéristique des atomes r_a au cube : $[V_a] = L^3 = [r_a^3]$. D'où $\rho_a \approx m_p/r_a^3 = 11,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. On peut être un peu plus précis en supposant que la forme de l'atome est une sphère de rayon r_a , ainsi $V_a = 4\pi r_a^3/3$ ce qui donne $\rho_a \approx 3m_p/(4\pi r_a^3) = 2,74 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Si on se souvient que l'eau a une masse volumique de $\rho_{eau} = 10^3 \text{ kg/m}^3$, on voit que les ordres de grandeurs sont parfaitement corrects, ce qui confirme que les densités en masse des atomes et de la matière ordinaire sont similaires.

Réponses de la partie B : Noyaux et proton

B1) Le raisonnement dimensionnel n'est d'aucune utilité à présent car nous avons déjà obtenu, lors de la question A5, la relation entre longueur et constantes fondamentales. Ce qui change maintenant c'est la nature de l'interaction liant le système. L'électromagnétisme lie électrons et noyaux dans les atomes, l'interaction nucléaire forte lie protons et neutrons, les nucléons, dans un noyau. Dans un atome nous avons trouvé que $r_a \approx \hbar^2/(m_e e^2) = \hbar/(\alpha m_e c)$.

Le premier changement à prendre en compte concerne la constante de couplage : $\alpha \rightarrow \alpha_s$. Le second, plus subtil, concerne la masse de la particule à prendre en compte : dans un noyau il n'y a plus d'électron mais des nucléons, ainsi la masse caractéristique à utiliser est celle des nucléons, et non plus m_e . La différence de masse entre proton et neutron étant très faible par rapport à la masse du proton (ou du neutron) : $\Delta m/m = (m_n - m_p)/m_p = 1,38 \cdot 10^{-3} = 0,14\%$, le choix importe peu. L'énoncé nous indique de prendre m_p .

Ce raisonnement physique nous permet donc d'exprimer la taille caractéristique des noyaux :

$$r_N \approx \hbar/(\alpha_s m_p c) = 2,09 \cdot 10^{-16} \text{ m} \quad (1.5)$$

En fait, cette estimation concerne plutôt le noyau le plus petit, c'est-à-dire le proton. Les mesures expérimentales indiquent que la taille du proton est 4 fois plus grande que cette estimation obtenue par raisonnement dimensionnel : $r_p^{exp} \simeq 8,6 \cdot 10^{-16} \text{ m} = 0,86 \text{ fm}$. Pour un noyau à A nucléons, $r_N \simeq r_0 A^{1/3}$ avec $r_0 \simeq 1,2 - 1,4 \text{ fm}$ selon la valeur de A . Vous étudierez cela dans un cours de physique nucléaire.

B2) Lors de la question A6 nous avons vu que l'énergie d'ionisation (de l'atome d'hydrogène) $E_H \approx e^2/r_a = m_e e^4/\hbar^2 = \alpha^2 m_e c^2$. Avec un raisonnement analogue à la question précédente et en utilisant la dernière expression obtenue pour E_H , on en déduit que :

$$E_N \approx \alpha_s^2 m_p c^2 \approx 1 \text{ GeV} \quad (1.6)$$

En fait, le problème est ici beaucoup plus complexe, et l'énergie que l'on vient de calculer est essentiellement l'énergie de masse. Un noyau possédant A nucléons possédera une énergie de masse proportionnelle à $A \times E_N$.

Il apparaît que l'énergie caractéristique des réactions nucléaires (et non du noyau lui-même) est liée à la différence de masse entre proton et neutron : $E_N^{réactions} \approx \alpha_s^2 (m_n - m_p) c^2 \approx 1,29 \text{ MeV}$. Cette valeur est à peu près 1000 fois plus faible que les énergies de masse mise en jeu : une toute petite fraction

de l'énergie de masse intervient dans la mutation des noyaux. On appelle cette énergie, « énergie de liaison nucléaire », et elle intervient dans la définition de la masse du noyau de façon similaire à l'énergie d'ionisation dans la définition de la masse des atomes (voir éq.(1.4)). Si un noyau possède une énergie de liaison, notée B , et A nucléons, décomposé en Z protons et $A - Z$ neutrons, alors la masse du noyau est telle que :

$$m_{\text{noyau}} = Zm_p + (A - Z)m_n - B/c^2$$

La raison profonde de ce mécanisme ne faisant intervenir que la différence de masse entre proton et neutron, vient de la conservation d'une quantité appelée « nombre baryonique », nombre caractéristique des interactions nucléaires fortes et grosso-modo équivalent à la charge électrique des interactions électromagnétiques. L'origine fondamentale de la conservation du nombre baryonique n'est pas encore bien comprise...

B3) Par analogie avec la question A8, on a : $\rho_N \approx m_p/r_N^3 = 2,63 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}^3$, en prenant la valeur $r_N = r_p^{exp} \simeq 8,6 \cdot 10^{-16} \text{ m}$. Avec un modèle sphérique, plus proche de la réalité expérimentale, on a $\rho_N \approx 3m_p/(4\pi r_N^3) = 6,27 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$. Quel que soit le modèle il apparaît que le rapport des densités nucléaire et atomique est très grand : $\rho_N/\rho_a \approx (r_a/r_N)^3 = 2,29 \cdot 10^{14} \text{ kg/m}^3$. **Les noyaux sont beaucoup plus denses que les atomes.**

B4) Soit $m_p^{constit.}$ la masse des constituants du protons : $m_p^{constit.} = 2m_u + m_d \simeq 11 \text{ MeV}/c^2 = 1,96 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$. Cette masse est quasiment 100 fois plus faible que la masse du proton. **Pour la première fois, la masse du système ne vient pas de la masse de ses constituants! La masse du proton (et du neutron, et des « hadrons⁹ » en général) provient de l'interaction entre ses constituants.** La majeure partie de la masse de la matière vient donc de l'interaction forte entre les quarks, la masse c'est de l'interaction. Cependant, certaines masses semblent avoir une origine intrinsèque, c'est le cas de celles des électrons et des quarks. La particule appelée « boson de Higgs », récemment découverte (2012) au CERN, représente un premier pas dans la compréhension de l'origine des masses intrinsèques...

Réponses de la partie C : passage micro \longleftrightarrow macro

C1) La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 grammes de carbone constitué de l'isotope ^{12}C . Ce nombre est donné par la constante d'Avogadro et vaut $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ entités/mol}$.

C2) $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,6726 \cdot 10^{-24} \text{ g} \Rightarrow 1/m_p = 5,98 \cdot 10^{23} \text{ g}^{-1}$. Ce nombre est très proche de \mathcal{N}_A .

C3) La densité en masse de l'eau vaut $\rho_{eau} = 10^3 \text{ kg/m}^3$, ainsi le volume $V_{eau} = 1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$ a une masse $m = \rho_{eau}V_{eau} = 10^{-3} \text{ kg} = 1 \text{ g}$. Si on néglige l'énergie de liaison nucléaire (voir question B2) la masse du noyau vient

9. Les hadrons sont l'ensemble des particules faites de quarks.

de la masse de ses constituants. Si on suppose que les nucléons ont une masse unique et égale à m_p , alors le nombre de nucléons est simplement donné par le rapport des masses : $N = m/m_p = 5,98 \cdot 10^{23}$. Ce nombre est identique à celui calculé en C2 car $1/m_p$ en g^{-1} est identique au rapport M/m_p si m_p est en g et $M = 1 g$ ce qui correspond à $1 cm^3$ d'eau.

La différence numérique entre ce nombre et la constante d'Avogadro, relativement faible, vient de nos approximations, c'est-à-dire du fait d'avoir négligé la différence de masse proton - neutron, les énergies des liaisons atomiques et moléculaires, mais surtout de la non prise en compte de l'énergie de liaison nucléaire du noyau concerné. Comme cette énergie dépend du noyau, il a fallu définir la mole pour un noyau précis, historiquement le carbone 12 a été choisi. Cependant, l'ordre de grandeur est lui indépendant du noyau particulier étudié, il vient de la masse du proton (des nucléons), et on peut réinterpréter le nombre d'Avogadro comme le nombre de nucléons qu'il y a dans un gramme de matière (quelle qu'elle soit).

C4) Pour réaliser ce calcul il faut connaître la masse molaire de l'eau :

$M(H_2O) = 18 g/mol$. Le nombre 18 vient du fait qu'il y a 18 nucléons dans la molécule d'eau. Le nombre de molécules d'eau dans $1 cm^3$ vaut :

$$N = \frac{N_A \rho_{eau} V_{eau}}{M(H_2O)} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ entités}}{1 \text{ mol}} \frac{1 g}{1 cm^3} \frac{1 mol}{18 g} 1 cm^3 = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{18} \text{ entités.}$$

Inversement, pour avoir exactement N_A molécules d'eau il faut $18 g$ d'eau soit $18 cm^3$ d'eau.

1.3.5 Exercice de cours C1.5 – Planètes et étoiles

1) À partir des quantités G , \hbar , c et m_p , donner l'expression puis estimer, la "constante de couplage gravitationnelle" α_G (nombre sans dimension et de même forme que la constante de couplage électromagnétique α où $\hbar c$ est au dénominateur).

2) Trouver par un raisonnement dimensionnel, l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle E^G d'une sphère de rayon R et de masse M (à une constante près).

3) Donner l'expression du nombre total de nucléons, N , d'un astre de masse M si on suppose que la masse d'un nucléon vaut m_p . Sachant que la masse de la Terre vaut $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} kg$, estimer le nombre de nucléons qu'elle contient.

4) Planètes

Une planète est constituée d'atomes, soit N_P ce nombre d'atomes.

a) Donner l'expression de la densité (en masse) de la planète supposée être une sphère de rayon R_P et de masse M_P .

b) On supposera que la densité de la planète est celle des atomes obtenue à la question A8 de l'exercice C1.4. Cette hypothèse est-elle justifiée ?

c) À partir de la question A8 de l'exercice C1.4 et des questions précédentes, calculer l'expression du rayon R_P en fonction de N_P et r_a .

d) Une planète est stable si l'énergie caractéristique d'ionisation atomique E_H (voir question A6 de l'exercice C1.4) reste plus grande que l'énergie gravitation-

nelle moyenne par atome E_P^G/N_P . En déduire l'expression du nombre maximal d'atomes N_P^{max} que peut posséder une planète, en fonction de α et α_G .

e) Estimer N_P^{max} , R_P^{max} et M_P^{max} .

f) Sachant qu'on mesure pour Jupiter : $R_J = 7 \cdot 10^4$ km, $M_J = 1.9 \cdot 10^{27}$ kg, commenter vos résultats.

5) Étoiles

Une étoile est un plasma de noyaux (surtout des protons) et d'électrons, qui atteint en son coeur une densité nucléaire (ρ_N).

a) En utilisant les résultats de la partie B de l'exercice C1.4 (ou ceux de la question précédente), calculer l'expression du rayon R_* de l'étoile en fonction de N_* , le nombre de protons constituant l'étoile, et de r_N , la taille caractéristique d'un noyau.

b) Une étoile s'allume dès que l'énergie gravitationnelle moyenne par proton E_*^G/N_* , dépasse l'énergie caractéristique des noyaux E_N (obtenue à la question B2 de l'exercice C1.4). En déduire l'expression du nombre minimal de protons N_*^{min} que doit posséder une étoile, en fonction de α_s et α_G .

c) Estimer N_*^{min} , R_*^{min} et M_*^{min} .

d) Sachant qu'on mesure pour le Soleil : $R_\odot = 7 \cdot 10^5$ km, $M_\odot = 2.0 \cdot 10^{30}$ kg, commenter vos résultats.

6) 3^e loi de Kepler et masse du Soleil

La troisième loi de Kepler relie la période T d'un satellite avec la masse M de l'astre attractif et le demi grand axe a de l'ellipse décrivant la trajectoire du satellite (il y a aussi une constante fondamentale dans l'expression de T ...). Si la trajectoire est circulaire, a est le rayon R du cercle.

a) Trouver par un raisonnement dimensionnel, l'expression de la période T (à une constante près). Utiliser vos références ou toute autre source d'information sérieuse pour trouver la constante qu'il vous manque.

b) L'unité astronomique (UA) est la distance moyenne Terre-Soleil. L'orbite de la Terre est peu elliptique (on dit plutôt que « l'excentricité » de l'ellipse est faible), et cette distance moyenne peut être assimilée au rayon d'une orbite circulaire en première approximation. Sachant que $1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^8$ km, calculer la masse du Soleil. Le rayon du Soleil valant $R_\odot = 7 \cdot 10^5$ km, en déduire la densité moyenne du Soleil.

Réponses

1) On pose $\alpha_G = G^x m^y c^z \hbar^t \Rightarrow [\alpha_G] = [1] = M^{-x} L^{3x} T^{-2x} M^y L^z T^{-z} M^t L^{2t} T^{-t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M) : -x + y + t = 0 \\ (L) : 3x + z + 2t = 0 \\ (T) : -2x - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (M) : y = x - t \\ (L + T) : x + t = 0 \\ (T) : z = -2x - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

Avec trois équations et quatre inconnues il est clair qu'il y a une infinité de solutions, une pour chaque valeur de t . La dernière égalité avec $z = t$ indique que α_G sera proportionnelle au produit ($\hbar c$). Le fait de vouloir des formes similaires pour α_G et α indique clairement que nous voulons le facteur ($\hbar c$) au

dénominateur, c'est-à-dire que $z = t = -1$. D'où $x = 1$ et $y = 2$ donnant :

$$\alpha_G \approx Gm_p^2/(\hbar c) = 6 \cdot 10^{-39} \quad (1.7)$$

2) L'énergie gravitationnelle E^G demandée doit dépendre de M la masse de la sphère, de R le rayon de la sphère, et de la constante de gravitation G . D'où $E^G = G^x M^y R^z \Rightarrow [E^G] = ML^2T^{-2} = M^{-x} L^{3x} T^{-2x} M^y L^z$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M) : -x + y = 1 \\ (L) : 3x + z = 2 \\ (T) : -2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E^G \approx GM^2/R \quad (1.8)$$

Un raisonnement plus élaboré montre qu'il manque un facteur $3/5$.

3) On a vu précédemment que les forces de gravitation entre corps microscopiques étaient négligeables devant les forces électromagnétiques, et que ces dernières étaient très petites devant l'énergie de masse (voir questions A1 et A7 de l'exercice C1.4). Donc la masse M d'un astre macroscopique vient des masses de ses constituants microscopiques. Le nombre de constituants est alors simplement donné par le rapport des masses. Cependant, il y a une grande diversité des éléments chimiques chacun avec leur propre masse. Mais on a vu précédemment que le nombre de nucléons est relié à m_p quel que soit le type de matière (voir question C3 de l'exercice C1.4). La masse des atomes vient de la masse du noyau qui vient des masses des nucléons. Par conséquent, en négligeant la différence de masse entre proton et neutron, le nombre de nucléons d'un corps de masse M est donné, approximativement, par le rapport :

$$N \simeq M/m_p \quad (1.9)$$

En appliquant cette formule au cas de la Terre on estime qu'elle contient $N_T \simeq M_T/m_p = 3,57 \cdot 10^{51}$ nucléons.

Réponses de la partie planètes

4a) Par définition $\rho_P = M_P/V_P = 3M_P/(4\pi R_P^3)$.

4b) La matière sous forme de gaz, liquides et solides, est faite d'atomes. Il semble raisonnable de penser qu'une planète est faite d'atomes. Peut-être qu'aux environs du centre de la planète où les densités doivent être particulièrement élevées, la matière est fortement ionisée, voire totalement, et se retrouve donc dans un état de plasma (état où électrons et noyaux ne sont plus liés). La taille de cette zone, si elle existe, doit être relativement modeste par rapport au reste de la planète, et nous négligerons cet aspect là des choses dans la suite. On considère que la planète est faite d'atomes.

Par ailleurs, la densité d'un astre varie avec la distance au centre, mais des calculs rigoureux dans le cadre d'un modèle sont nécessaires pour prendre en compte cette dépendance. Ici nos calculs sont grossiers et approximatifs, mais nous verrons que cela nous donne quand même les bons ordres de grandeur...

On suppose donc que $\rho_P \approx \rho_a = cste$.

4c) On a (attention aux indices $P \equiv$ Planète, $p \equiv$ proton) :

$$\rho_P = \frac{3M_P}{4\pi R_P^3} = \frac{3N_P m_p}{4\pi R_P^3} \approx \rho_a = \frac{3m_p}{4\pi r_a^3} \Rightarrow N_P = \left(\frac{R_P}{r_a}\right)^3 \Rightarrow R_P = N_P^{1/3} r_a \quad (1.10)$$

4d) Une planète est stable si $E_H > E_P^G/N_P$, ce qui implique (en utilisant les équations (1.3), (1.8), (1.9), (1.10), (1.2), (1.7)) :

$$E_H = \alpha^2 m_e c^2 > \frac{E_P^G}{N_P} = \frac{GM_P^2}{R_P N_P} = \frac{GN_P^2 m_p^2}{N_P^{1/3} r_a N_P} = \frac{GN_P^2 m_p^2 \alpha m_e c}{N_P^{1/3} N_P \hbar}$$

$$\Rightarrow N_P^{2/3} = \frac{N_P^2}{N_P^{1/3} N_P} < \frac{\alpha^2 m_e c^2 \hbar c}{\alpha m_e c^2 G m_p^2} = \frac{\alpha}{\alpha_G} \Rightarrow N_P < \left(\frac{\alpha}{\alpha_G}\right)^{3/2} = N_P^{max}$$

4e) En utilisant les valeurs numériques :

$$N_P^{max} = (\alpha/\alpha_G)^{3/2} \approx 10^{54} \Rightarrow \begin{cases} R_P^{max} = (N_P^{max})^{1/3} r_a \approx 5 \cdot 10^4 \text{ km} \\ M_P^{max} = N_P^{max} m_p \approx 10^{27} \text{ kg} \end{cases}$$

4f) On constate que la masse et le rayon de Jupiter sont très proches des valeurs maximales calculées précédemment. On en déduit que Jupiter est une des plus grosses planètes qui puisse exister ! L'autre conclusion que l'on tire de la proximité de ces valeurs, c'est que le raisonnement dimensionnel est clairement un outil très puissant ! Il faut cependant s'en méfier comme nous le verrons lors de la question suivante...

Réponses de la partie étoiles

5a) La densité ρ_* de l'étoile est reliée à sa masse et à son rayon par la relation $\rho_* \approx M_*/R_*^3$. On a vu lors de la question B3 de l'exercice C1.4 que la densité des noyaux est telle que $\rho_N \approx m_p/r_N^3$. Si on suppose que $\rho_* \approx \rho_N$ alors on obtient

$$R_* \approx (M_*/m_p)^{1/3} r_N \approx N_*^{1/3} r_N \quad (1.11)$$

5b) Une étoile s'allume si $E_N \lesssim E_*^G/N_*$, ce qui implique (en utilisant les équations (1.6), (1.8), (1.9), (1.11), (1.5), (1.7)) :

$$E_N \approx \alpha_s^2 m_p c^2 \lesssim \frac{E_*^G}{N_*} = \frac{GM_*^2}{R_* N_*} = \frac{GN_*^2 m_p^2}{N_*^{1/3} r_N N_*} = \frac{GN_*^2 m_p^2 \alpha_s m_p c}{N_*^{1/3} N_* \hbar}$$

$$\Rightarrow N_*^{2/3} = \frac{N_*^2}{N_*^{1/3} N_*} \gtrsim \frac{\alpha_s \hbar c}{G m_p^2} = \frac{\alpha_s}{\alpha_G} \Rightarrow N_* \gtrsim \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_G}\right)^{3/2} = N_*^{min}$$

5c) En utilisant les valeurs numériques :

$$N_*^{min} = (\alpha_s/\alpha_G)^{3/2} \approx 10^{57} \Rightarrow \begin{cases} R_*^{min} = (N_*^{min})^{1/3} r_N \approx 10 \text{ km} \\ M_*^{min} = N_*^{min} m_p \approx 10^{30} \text{ kg} \end{cases}$$

5d) Concernant la masse, on voit que la masse du Soleil est deux fois plus élevée que notre estimation de M_*^{min} . Notre raisonnement semble relativement correct et donc notre estimation du nombre de nucléons N_*^{min} aussi. Cependant, l'estimation de R_*^{min} est erroné, on voit qu'il y a un facteur 10^5 de différence, ce qui n'est pas rien.

En fait notre raisonnement concerne le « cœur » de l'étoile et non l'étoile elle-même : le cœur doit avoir une taille d'au moins 10 km , mais les enveloppes supérieures n'ont pas du tout une densité nucléaire et donc notre raisonnement est erroné à cause de cela. On retrouve une estimation correcte en supposant que la taille de l'étoile est caractérisée par une densité atomique (et non nucléaire comme c'est le cas du cœur) : $R_* \approx N_*^{1/3} r_a \approx 10^6 \text{ km}$.

Réponses de la partie Kepler et Soleil

6a) La troisième loi de Kepler relie la période T d'un satellite au demi grand axe a de l'ellipse parcourue par le satellite (ou au rayon R pour une trajectoire circulaire), à la masse M du corps attractif et bien-entendu à la constante gravitationnelle G . La dimension de G nous donne instantanément la solution : $[G] = M^{-1}L^3T^{-2} \Rightarrow [GM] = L^3T^{-2} = [a^3/T^2]$ d'où $T^2 \approx a^3/(GM)$. Un raisonnement rigoureux, qui sera effectué lors du chapitre 8, nous fournira le facteur $4\pi^2$ manquant :

$$3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (= \frac{T^2}{R^3} \text{ cas circulaire}) \quad (1.12)$$

6b) La période de l'orbite terrestre est $T = 1 \text{ an} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$, et comme on nous donne $R = a = 1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, on en déduit directement la masse du Soleil : $M_\odot = 4\pi^2 R^3 / (GT^2) = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Ce qui donne une densité moyenne $\rho_\odot = M_\odot / V_\odot = 3M_\odot / (4\pi R_\odot^3) = 1392 \text{ kg/m}^3 = 1,39\rho_{\text{eau}}$. La densité moyenne du Soleil n'est donc supérieure à celle de l'eau liquide que de 40%, c'est donc bien une densité de type « atomique ».

1.3.6 Exercice de cours C1.6 – Galaxies et Univers

1) Galaxies

Le Soleil se situe à environ 30000 années-lumière (AL) du centre de la galaxie et effectue un tour complet en 250 millions d'années. L'année-lumière est surtout utilisée pour vulgariser les distances astronomiques, elle correspond à la distance parcourue par la lumière en une année. Le Soleil est une étoile « standard » permettant ainsi de considérer sa masse comme la masse moyenne des étoiles. On supposera que le mouvement du Soleil est circulaire et uniforme.

- Calculer la valeur de l'année lumière en mètres.
- Calculer la vitesse de déplacement du Soleil au sein de notre galaxie.
- Calculer la masse de la galaxie.
- En déduire le nombre moyen d'étoiles qu'elle contient.

2) Univers

En 1929, Hubble montre que les galaxies, en général, s'éloignent de nous avec des vitesses proportionnelles aux distances qui nous en séparent : $v_{exp} = H_0 r$ (loi de Hubble) où r est la distance entre nous et la galaxie considérée, et H_0 est la constante de Hubble. Les mesures de la constante de Hubble donnent la valeur moyenne $H_0 = 72 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$. Le Megaparsec (Mpc) correspond à la distance moyenne entre les galaxies. Par exemple, la galaxie d'Andromède, qui est la galaxie spirale la plus proche de notre galaxie la Voie Lactée, est située à une distance de 778 kpc. Le parsec, contraction de parallaxe-seconde, est l'unité de distance utilisée en astronomie : 1 pc correspond à la distance à laquelle une unité astronomique sous-tend un angle de $\theta = 1''$. La seconde d'arc est telle qu'un angle de 1 degré soit égal à 60 minutes d'arc ($1^\circ = 60'$) et que 1 minute d'arc soit égale à 60 secondes d'arc ($1' = 60''$).

a) Calculer la vitesse d'éloignement d'Andromède par rapport à nous due à l'expansion de l'Univers. En fait Andromède se rapproche de nous à la vitesse de 300 km/s, quelle conclusion en tirez-vous ?

b) Faire un dessin montrant la définition du parsec. Calculer la correspondance entre seconde d'arc et radian. En déduire, la valeur du parsec en mètres. Déterminer la correspondance entre parsec et année lumière.

c) Relier l'âge de l'Univers t_U à la constante de Hubble H_0 à l'aide d'un raisonnement dimensionnel. Donner la valeur de H_0 en s^{-1} et en déduire l'âge de l'Univers en s et en années.

d) La densité critique de l'Univers ρ_c (masse volumique) est reliée à la constante de Hubble H_0 et à la constante gravitationnelle G . Calculer l'expression de ρ_c par raisonnement dimensionnel. Nous verrons lors du chapitre 8, à travers la première équation de Friedman, qu'il manque un facteur $3/(8\pi)$ à cette expression. Calculer cette densité critique en kg/m^3 et en protons/ m^3 . Comparer ce chiffre au nombre de nucléons présents dans un m^3 d'eau.

e) L'horizon classique de l'Univers (R_U) correspond à la distance à partir de laquelle la vitesse d'expansion dépasse la vitesse de la lumière. Calculer cette distance (en m, en AL et en Gpc) et essayer de l'interpréter.

f) En déduire une estimation de la masse de l'Univers observable. En déduire le nombre de protons qu'il contient.

g) Estimer le nombre de galaxies présentes dans l'Univers observable.

Réponses de la partie galaxies

1a) L'année lumière est la distance que parcourt la lumière, possédant la vitesse c , en un an : $1 \text{ AL} = ct_{1 \text{ an}} = 3 \cdot 10^8 \times 3,16 \cdot 10^7 = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} \simeq 10^{16} \text{ m}$.

1b) L'énoncé donne la période du mouvement du Soleil dans la Voie Lactée $T = 2,5 \cdot 10^8 \text{ ans} = 7,89 \cdot 10^{15} \text{ s}$, ainsi que le rayon de la trajectoire $R = 3 \cdot 10^4 \text{ AL} = 2,84 \cdot 10^{20} \text{ m}$. Si on suppose que la trajectoire est circulaire, la distance parcourue pendant la période T est le périmètre $P = 2\pi R$. En supposant le mouvement uniforme on admet que la vitesse est constante, et est ainsi simplement reliée au rapport de la distance parcourue sur le temps écoulé : $v = d/t = P/T = 226 \text{ km/s}$! Le Soleil se déplace vite dans la galaxie, mais les distances entre les étoiles sont telles que l'on n'a pas conscience de ce mouvement...

1c) La masse de la galaxie s'obtient directement à partir de la 3^{ème} loi de Kepler donnée par l'éq.(1.12) : $M_g = 4\pi^2 R^3 / (GT^2) = 2,57 \cdot 10^{41} \text{ kg}$.

1d) En supposant que le Soleil est une étoile « standard », on obtient le nombre d'étoiles de type Soleil dans la Voie Lactée en calculant le rapport des masses : $N_{\odot/g} = M_g / M_{\odot} \approx 10^{11}$. Il y a environ 100 milliards d'étoiles dans notre galaxie !

Réponses de la partie Univers

2a) La vitesse d'éloignement d'Andromède par rapport à la Voie Lactée due à l'expansion de l'univers s'obtient directement par application de la loi de Hubble : $v_{exp} = H_0 r = 72 \times 0,778 = 56 \text{ km/s}$.

En fait, Andromède se rapproche de nous à la vitesse $v_{radial} = 300 \text{ km/s}$. L'indice *radial* indique que cette vitesse est la projection de la vitesse (du vecteur vitesse) sur la ligne de visée (la direction Voie Lactée - Andromède). La vitesse due à l'expansion de l'Univers domine les vitesses pour les galaxies « lointaines ». Pour Andromède, la galaxie la plus proche de nous, c'est la vitesse « propre » ou « vitesse particulière » qui domine celle due à l'expansion.

2b) La définition du parsec est donnée sur la figure 1.2. On en déduit la relation entre l'angle $\theta = 1''$ et les distances $d = 1 \text{ pc}$ et $R = 1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$: $R/d = \tan \theta \Rightarrow d = R / \tan \theta$. Cependant pour exprimer d (le parsec) en mètres, il faut exprimer θ en radian ou en degré (en radian si on veut utiliser la formule approchée $d \simeq R/\theta$). Il faut convertir $1''$ en radian ou en degré :

$$1^\circ = 60' = 3600'' \Rightarrow 1'' = \frac{1}{3600}^\circ = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ degrés}$$

$$\pi = 180^\circ = 180 \times 3600'' \Rightarrow 1'' = \frac{\pi}{6,48 \cdot 10^5} \text{ rad} = 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

On en déduit la valeur du parsec :

$$1 \text{ pc} = d = \frac{R}{\tan \theta} \approx \frac{R}{\theta} = \frac{1 \text{ UA}}{1''} = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{4,85 \cdot 10^{-6} \text{ rad}} = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

Ce résultat avec celui de la question 1a donne immédiatement $1 \text{ pc} = 3,27 \text{ AL}$.

2c) On a $[t_U] = T$ et $[H_0] = [v/r] = T^{-1}$. La relation entre l'âge de l'Univers et la constante de Hubble est donc immédiate : $t_U \approx 1/H_0$. On peut être surpris par la dimension $1/T$ relativement simple de H_0 au vu de l'unité « compliquée » utilisée pour exprimer sa valeur $H_0 = 72 \text{ km.s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Il n'y a pas de mystère, car le Megaparsec (Mpc) est une distance comme les kilomètres, ces deux unités ont la même dimension. Les astronomes et les cosmologues s'amuse-t-ils à nous embrouiller les idées pour le plaisir ? Non, bien-sûr, cette façon d'exprimer H_0 est la plus physique quand on étudie la dynamique des galaxies. À ces échelles où les galaxies sont des points, l'échelle de la cosmologie, les distances caractéristiques sont de l'ordre du Mégaparsec et les vitesses de l'ordre des centaines de km/s .

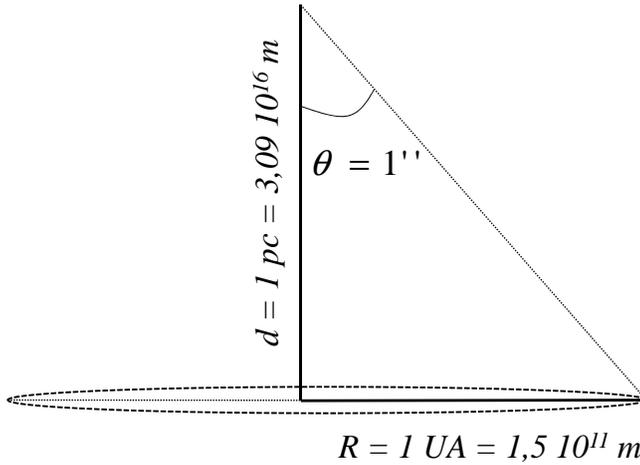


FIGURE 1.2 – Définition du parsec

Calculons à présent l'âge de l'Univers. À cette fin, déterminons la valeur de H_0 en s . Toutes les conversions entre unités sont connues, il suffit de les appliquer à la constante de Hubble H_0 :

$$H_0 = 72 \text{ km.s}^{-1} . Mpc^{-1} = 72 \frac{10^3 \text{ m}}{1 Mpc} s^{-1} = 72 \frac{10^3 \text{ m}}{3,09 10^{22} \text{ m}} s^{-1} = 2,33 10^{-18} s^{-1}$$

On en déduit alors un ordre de grandeur de l'âge de l'Univers :

$$t_U \approx \frac{1}{H_0} = 4,29 10^{17} s = 13,6 10^9 \text{ ans}$$

Les données cosmologiques les plus récentes interprétées dans le cadre de la théorie de la relativité générale et du modèle cosmologique du big bang chaud, fournissent la même valeur de 13,6 milliards d'années. C'est une chance que ce raisonnement dimensionnel élémentaire fournisse une valeur numérique aussi proche des observations.

2d) On a dimensionnellement : $[\rho_c] = ML^{-3}$, $[H_0] = T^{-1}$ et $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$. Le raisonnement direct est assez évident et donne : $\rho_c \approx H_0^2/G$. Un raisonnement plus rigoureux nous permettra d'obtenir l'équation de Friedman (chapitre 8) montrant que $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$.

Numériquement, on a $\rho_c = 0,97 10^{-26} \text{ kg/m}^3$. En divisant par la masse du proton, on obtient $\rho_c \simeq 6 \text{ protons/m}^3$. Ce chiffre est extrêmement faible par rapport à la densité de la matière ordinaire (liquide ou solide). En effet, aux questions C de l'exercice C1.4 nous avons vu que la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 10^{23} \text{ entités/mol}$ était en fait le nombre de protons (nucléons) par gramme de matière. En choisissant de l'eau pour fixer les idées, dans 1 m^3 d'eau il y a 10^6 g de matière, soit environ $6 10^{29}$ protons (nucléons) : la matière ordinaire est 10^{29} fois plus dense que l'Univers !

2e) La loi de Hubble stipule que $v_{exp} = H_0 r$. Pour des distances extrêmement grandes on peut imaginer que cette vitesse d'expansion dépasse la vitesse de la lumière. Cela implique que la lumière, ou toute autre forme d'information, n'arrivera plus à nous parvenir. L'Univers devient « noir » au-delà de cette zone que l'on appelle « horizon ». La distance que l'on va calculer maintenant est l'horizon « classique » par opposition aux calculs qui peuvent être menés dans le cadre de la relativité (générale).

L'horizon classique de l'Univers est atteint, $r = R_U$, lorsque $v_{exp} = c$. Ce qui donne avec la loi de Hubble :

$$c = H_0 R_U \Rightarrow R_U = c/H_0 = 1,29 \cdot 10^{26} \text{ m} = 4,15 \text{ Gpc} = 13,6 \cdot 10^9 \text{ AL}$$

Quel que soit la véritable taille de l'univers (fini ou infini, peu importe), il apparaît que nous, les observateurs, recevons de l'information de toutes les directions où l'on regarde. Cela délimite « une sphère d'information » où nous sommes au centre et qui a pour rayon l'horizon classique calculé précédemment, c'est ce que nous appelons « l'univers observable (classique) ».

2f) Ayant en main une densité, ρ_c , et une distance, R_U , on peut calculer une masse. La masse de l'univers observable, associé à cette sphère d'information, est alors simplement : $M_U = \rho_c 4\pi R_U^3 / 3 = 8,67 \cdot 10^{52} \text{ kg} \simeq 5 \cdot 10^{79} \text{ protons}$.

2g) À partir de cette estimation de la masse de l'Univers observable, et de l'estimation de la masse de notre galaxie faite à la question 1c, on en déduit le nombre de galaxies, du type Voie Lactée, dans notre Univers observable : $N_{g/U} = M_U/M_g \simeq 3 \cdot 10^{11}$. Il y a quelques centaines de milliards de galaxies dans notre Univers observable !

1.4 Conclusion / À retenir

Dans ce chapitre, nous avons essayé de vous donner une vision globale du monde physique. À l'aide du raisonnement dimensionnel et des constantes fondamentales de la physique nous avons été capable de calculer les ordres de grandeurs de nombreuses quantités sur les branches de l'infiniment petit et de l'infiniment grand, du noyau des atomes à l'Univers dans sa globalité.

Beaucoup de nombres ont été calculés et il est évident qu'il ne faut pas les retenir tous. Nous espérons cependant que certains ordres de grandeur vous ont marqué et que votre esprit les gardera en mémoire, que le plaisir intellectuel de faire des estimations simples et compréhensibles facilitera leur assimilation.

Ce qu'il faut absolument retenir de ce chapitre c'est :

- la nécessité de manipuler des expressions littérales ;
- savoir faire un raisonnement dimensionnel afin d'obtenir une formule ou de vérifier le résultat d'un calcul ;
- être capable de manipuler les unités des grandeurs physiques et faire des conversions, avec aisance ;
- savoir faire et présenter un résultat numérique (3 chiffres significatifs + unités).

Chapitre 2

Cinématique

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

- Notions d'espace, de temps et de référentiel. Système de coordonnées cartésiennes.
- Définitions 1d vitesse et accélération (moyennes et instantanées). Caractéristiques du mouvement (accéléré, retardé). Mouvement rectiligne.
- Introduction des notions d'abscisse curviligne et d'oscillateur harmonique.
- Vitesse et accélération : définitions et propriétés vectorielles.
- Mouvements bidimensionnels : circulaire et parabolique. Mouvements 3d.
- Notion de vitesse relative, loi de composition des vitesses.
- Systèmes de coordonnées polaires (exercices de cours C2.5, C2.6 et C2.7) et cylindriques (C2.8). Base de Frenet. Système de coordonnées sphériques (C2.9).
- Principe de Fermat et lois de l'optique géométrique (C2.10).

• Compétences

- Savoir résoudre un problème de cinématique :
 - * Extraction de $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ à partir de $\vec{r}(t)$ (C2.1).
 - * Calcul de la trajectoire $\vec{r}(t)$ à partir de $\vec{a}(t)$: intégration (C2.2).
- Caractériser un mouvement par application du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}$.
- Maîtrise des problèmes de balistique (C2.3).
- Étude détaillée du mouvement circulaire avec raisonnements cartésien et polaire (C2.4 et C2.6).
- Maîtrise des outils mathématiques :
 - * Dérivées et intégrales de polynômes et des fonctions usuelles.
 - * Opérations sur les vecteurs : somme, différence, produit scalaire, produit vectoriel, dérivée et intégrale.

• Lecture conseillée

Notions de physique	YF (2013)	Hecht (1999)
cinématique 1d	ch.2 p35-68	2.1-2.4 p27-37 + 3.1-3.4 p69-83
analyse vectorielle	ch.1 p10-26	/
cinématique 2d-3d	ch.3 p69-103	2.5-2.10 p38-68 + ch.3 p69-114 + 5.6-5.8 p167-173 + 8.1 p269-279

2.1 Introduction

La cinématique est la branche de la mécanique qui s'attaque à la description du mouvement sans en chercher la cause. Mais qu'est-ce que le mouvement et comment le décrire ? Dans le cadre de la physique newtonienne, nous réduisons le système physique à un point, qui peut alors être vu comme une particule (dite « particule test ») ou comme le « centre de masse » du système physique s'il est étendu/macroscopique. Cette approximation de la réalité correspond à ce qu'on appelle « la mécanique du point ». On associe à cette particule test un point M susceptible de se déplacer dans l'espace et dans le temps. Nous reviendrons plus en détails sur cette approximation dans les chapitres suivants et la notion de centre de masse sera clairement définie lors du chapitre 6.

En physique newtonienne, le déplacement du système physique est associé à une trajectoire dans l'espace réel¹ qui est à 3 dimensions. Au cours du temps le point M évolue le long de cette trajectoire. La description du mouvement nécessite donc de définir proprement l'espace et le temps. À cette fin, nous introduisons la notion de « référentiel » où l'on définit un observateur qui effectue les mesures d'espace et de temps.

L'observateur mesure le temps grâce à une horloge, la quantité associée sera notée t . La position de la particule test par rapport à l'observateur est représentée par le vecteur \vec{r} . Un vecteur possède intrinsèquement trois informations : taille (norme), direction et sens². Le codage de ces informations nécessite autant de nombres qu'il y a de dimensions dans votre espace. À une dimension, sur une ligne (droite ou courbe), un seul nombre suffit. À deux dimensions, sur une surface, il faut deux nombres, et dans l'espace (réel) à trois dimensions, il en faut trois. Il existe plusieurs méthodes différentes pour choisir ces nombres. Un choix particulier correspond à ce qu'on appelle un système de coordonnées (ou un repère d'espace).

Le système de coordonnées le plus simple est le système « cartésien » où chaque coordonnée est associée à une distance. Un système de coordonnées nécessite de définir une origine, appelée O et correspondant à la position de l'observateur, ainsi qu'une « base » qui est un ensemble de vecteurs unitaires permettant de repérer n'importe quel point de l'espace. Il faut autant de vecteurs unitaires qu'il y a de dimensions dans l'espace, nous les noterons $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. Par simplicité, nous choisissons une base « orthonormée directe » : les vecteurs unitaires sont perpendiculaires entre eux, on les associe à trois axes perpendiculaires notés x, y et z , et leurs sens sont tels qu'ils obéissent à la règle « des trois doigts » : le triplet $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forme un trièdre direct. Nous verrons lors de la section 2.3 de ce chapitre que cette propriété tridimensionnelle est caractérisée par un outil mathématique fort utile : le produit vectoriel (noté \wedge).

Les vecteurs unitaires du système de coordonnées cartésiennes sont fixes,

1. L'espace réel, que nous appellerons simplement « espace », est à opposer à la notion d'espace « abstrait » comme l'espace d'évolution ou l'espace de phase qui seront introduits ultérieurement dans vos cours de mécanique.

2. Vous définirez plus proprement ce qu'est un vecteur dans votre cours de mathématiques via la notion d'espace vectoriel.

c'est à dire indépendants du temps³. À partir de ces définitions on peut alors exprimer de manière algébrique les vecteurs de l'espace :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \quad (2.1)$$

et le triplet de nombre (x, y, z) est appelé « coordonnées cartésiennes » du point M . Toutes ces définitions sont illustrées ci-dessous sur la figure 1.

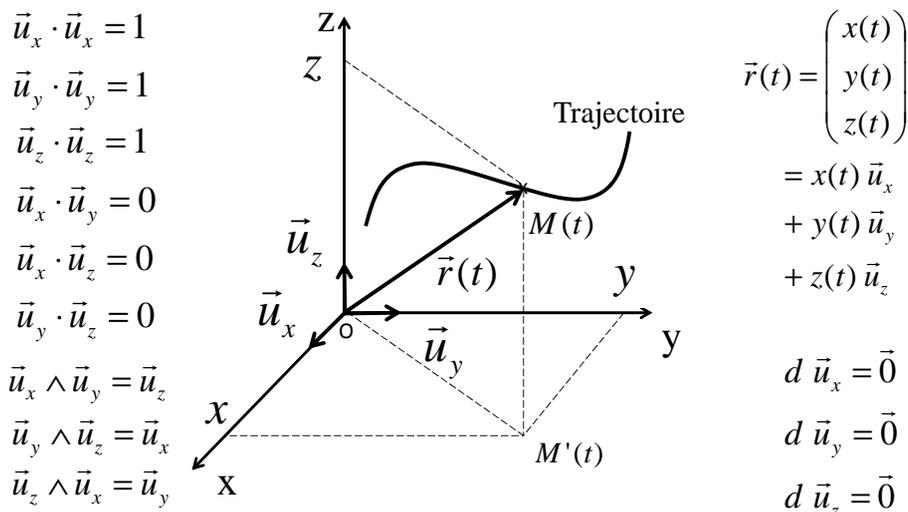


FIGURE 2.1 – Trajectoire et coordonnées cartésiennes

Afin d'éviter d'introduire trop de notions et de techniques d'un seul coup, nous traiterons dans la section 2.2 le cas à une dimension uniquement. L'étude multidimensionnelle et la définition des autres systèmes de coordonnées utilisés en mécanique seront vues dans la section 2.3. On peut donc à présent définir plus proprement ce qu'est un référentiel : c'est un système de coordonnées muni d'une horloge ! Nous étudierons plus en détails la notion de référentiel dans le chapitre 3 lors de l'étude de la dynamique et en particulier lorsque nous verrons la première loi de Newton ou principe de l'inertie. C'est à ce moment que l'on comprendra mieux que le mouvement est relatif, c'est à dire que la description du mouvement (et non le mouvement lui-même) de la particule test située en M est profondément liée à l'observateur situé en O . La définition du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ en physique n'est donc pas triviale car elle est directement liée à la notion de référentiel, mais à présent étudions les propriétés de ce vecteur lorsque le temps s'écoule.

3. En termes mathématiques on a : $d\vec{u}_x = \vec{0}$, $d\vec{u}_y = \vec{0}$, $d\vec{u}_z = \vec{0}$, où le symbole d représente une « différentielle » (ou « opérateur différentiel »), notion abordée dans la section suivante et qui sera proprement définie dans votre cours de mathématiques.

2.2 Cinématique à une dimension

2.2.1 Position et vitesses

• Définitions

À une dimension, la notion de vecteur se réduit à celle de « valeur algébrique » (nombre possédant un signe). L'étude de la position \vec{r} du système physique situé en M se réduit alors à la simple étude de la coordonnée cartésienne x :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x \quad \longrightarrow \quad \overline{OM} = x$$

Le « problème vectoriel » a été éliminé et la seule variable pertinente de notre problème est l'abscisse x du point M . Cette variable évolue au cours du temps, c'est donc une fonction du temps : $x = x(t)$. **On appelle « équation horaire de la position » ou « équation horaire de la trajectoire », l'expression de x en fonction de t .** Cette description est utile lorsque le mouvement s'effectue le long d'une droite. Cette droite est choisie comme axe x (du système de coordonnées cartésiennes), et l'observateur muni de son chronomètre est situé en O .

Soit $M_1 = M(t_1)$ et $M_2 = M(t_2)$ les positions de M à deux instants différents tels que $t_2 > t_1$. On note $x_1 = \overline{OM_1} = x(t_1)$, $x_2 = \overline{OM_2} = x(t_2)$, $\Delta t = t_2 - t_1$ (par convention $\Delta t > 0$) et $\Delta x = x_2 - x_1$. On définit alors la vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 , ou entre les positions x_1 et x_2 , par :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{moy}(x_1, x_2, t_1, t_2)$$

Cette quantité est naturelle car nous la rencontrons dans la vie de tous les jours. Cependant cette quantité est compliquée car c'est une fonction à 4 variables : elle dépend de la position et du temps initial (x_1, t_1), ainsi que de la position et du temps final (x_2, t_2).

Il est important d'introduire une vitesse spécifique au point de la trajectoire où la particule M est à un certain instant, et ceci indépendamment de la position de M longtemps avant ou longtemps après. On définit alors **la vitesse instantanée** :

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}} \quad (2.2)$$

La vitesse instantanée, simplement appelée « vitesse », est donc la dérivée par rapport au temps de la fonction position $x(t)$. (*C'est la vitesse donnée par le compteur des véhicules !*) Ainsi si vous connaissez $x(t)$ vous pouvez en déduire très rapidement l'équation horaire de la vitesse $v(t)$.

• Problème inverse, condition initiale, condition limite

Comment faire si votre problème est inversé, c'est à dire si $v(t)$ est connue et que l'on cherche à déterminer $x(t)$? La réponse est donnée par la relation mathématique entre dérivation et intégration. La position est la primitive par

rapport au temps de la vitesse :

$$x(t) = \int v(t) dt \quad (2.3)$$

Cependant, une primitive est définie à une constante près. Pour une situation physique réaliste, il faut connaître cette constante d'intégration. On la détermine avec la connaissance d'une « condition » sur la position. Cette condition est, en général, une « condition initiale » c-à-d la connaissance de la position du système physique au début de l'étude du mouvement : $x(t = 0)$. Parfois c'est une « condition limite » ou « condition asymptotique », comme par exemple la connaissance de $x(t \rightarrow +\infty)$, qui permet de fixer cette constante d'intégration.

• Diagramme d'espace-temps

Il est souvent utile de représenter graphiquement l'équation horaire de la position, soit la fonction $x(t)$ comme illustré sur la figure 2.2. Ce graphe, dit « diagramme d'espace-temps » ou « diagramme d'univers », permet d'avoir une vision globale de l'évolution temporelle de la position du système physique. L'autre avantage de ce diagramme, et non des moindres, est que la pente de la tangente en un point quelconque de cette courbe correspond à la vitesse en ce point. Cependant, il est très important de réaliser que cette courbe ne représente absolument pas la trajectoire ! Le graphe de la figure 2.2 est associé à une trajectoire qui est un simple segment de droite sur lequel le système physique avance et recule avec des vitesses différentes.

En fait, ces diagrammes d'espace-temps ont une portée très profonde. Ils peuvent se révéler très pratiques pour obtenir des résultats rapidement (voir exercice E2.9) ou mettre en évidence simplement des phénomènes physiques très complexes. L'annexe D montre cette puissance sur l'exemple de l'effet Doppler.

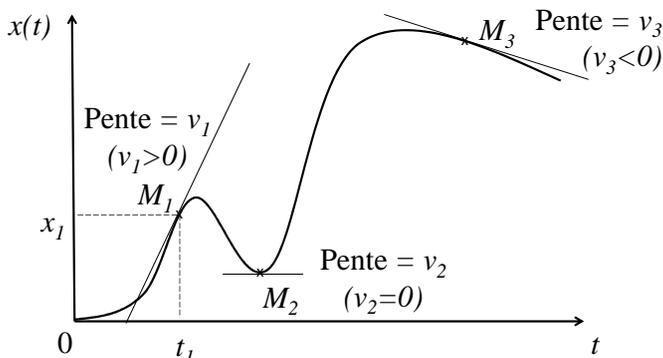


FIGURE 2.2 – Représentation graphique de l'équation horaire de la position $x(t)$ (diagramme d'espace-temps).

• Notion de différentielle

Afin de poursuivre, vous comprenez qu'il est indispensable de maîtriser les propriétés des dérivées et intégrales de polynômes et des fonctions usuelles. Le formulaire mathématique (annexe A) rappelle les relations de base à connaître

parfaitement. Les dérivées et intégrales sont reliées à un objet mathématique appelé « différentielle » qui est indispensable pour l'étude de la mécanique et la résolution de problèmes de physique.

Revenons sur le problème inverse, c'est à dire sur la détermination de $x(t)$ quand $v(t)$ est connue. On peut voir la vitesse, éq.(2.2), non pas comme une dérivée mais comme un rapport de différentielles où l'on traite les quantités dx et dt comme indépendantes. La définition la plus simple d'une différentielle⁴ est de la voir comme la différence extrêmement petite mais non nulle, dite « infinitésimale », de la fonction f entre deux points infiniment voisins :

$$\boxed{df = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{f_2 \rightarrow f_1} (f_2 - f_1)} \quad (2.4)$$

Ainsi, dt est une variation infinitésimale de la variable temps (pas besoin d'espace pour la définir), et dx est une variation infinitésimale de la variable espace (pas besoin de temps ni de mouvement pour la définir). L'avantage de cette approche est de pouvoir séparer numérateur et dénominateur. On peut alors exprimer la position en fonction de la vitesse et du temps :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = v(t) dt \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int v(t) dt$$

$$\text{or } \int dx = \int 1 dx = x (+cste) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int v(t) dt$$

On retrouve le fait que l'équation horaire des positions $x(t)$ est la primitive de la fonction vitesse par rapport au temps.

Pour les problèmes de physique à une dimension ou pour ceux de mathématiques à une variable, cette nuance entre dérivée et différentielle importe peu. Dès que le problème est multidimensionnel et donc à plusieurs variables, la nuance est cruciale, la dérivée est remplacée par la notion de « dérivée partielle » et la notion de différentielle acquiert un sens plus profond... Dans ce cours nous allons étudier des problèmes multidimensionnels et il va falloir vous familiariser avec cette nouvelle notion de différentielle.

La notion de différentielle peut s'appliquer à tout type de fonction⁵ (scalaire ou vectorielle). Les règles de calculs des différentielles sont les mêmes que celles des dérivées de fonctions (composées). Par exemple, si $f = u^\alpha$, où $u = u(x)$ est une fonction de la variable x , on sait que la dérivée par rapport à la variable x est telle que $f' = df/dx = \alpha u^{\alpha-1} u' = \alpha u^{\alpha-1} du/dx$, où le symbole $'$ représente « l'opérateur différentiel » $\frac{d}{dx}$. On obtient la relation en terme des différentielles des fonctions f et u en supprimant simplement la différentielle dx : $df = \alpha u^{\alpha-1} du$. En fait cette relation est plus générale que la précédente en terme de dérivée, car elle reste vraie quel que soit la variable ou même le

4. Approche historique mais non rigoureuse du point de vue mathématique. La nuance entre différentielle et quantité infinitésimale sera abordée succinctement lors du chapitre 4.

5. Il existe des conditions de « différentiabilité » que vous verrez dans un cours de mathématiques.

nombre de variables... Avec cette simple définition et cette seule remarque calculatoire nous allons déjà pouvoir faire beaucoup de choses, mais vous pouvez trouver plus d'informations sur les différentielles à la fin de l'annexe A.

2.2.2 Accélération

La variation temporelle de la vitesse est une quantité physique importante. À nouveau, on peut définir une accélération moyenne entre les instants t_1 et t_2 , ou entre les positions x_1 de vitesse (instantanée) v_1 et x_2 de vitesse v_2 , par :

$$a_{\text{moy}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (= a_{\text{moy}}(v_1, v_2, t_1, t_2))$$

Mais la quantité physique la plus pertinente est l'**accélération** (instantanée) :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (2.5)$$

L'accélération est donc la dérivée de la vitesse par rapport au temps, soit la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

Si l'accélération est connue et non la vitesse, alors on procède par intégration :

$$dv = a(t) dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int a(t) dt \quad (2.6)$$

Si nous n'avons aucune information sur les positions, une condition initiale sur la vitesse est nécessaire pour connaître précisément $v(t)$. L'équation horaire des positions s'obtient grâce à une intégration supplémentaire. Ainsi le passage $a(t) \rightarrow x(t)$ implique deux intégrations, il faut donc deux conditions initiales (ou conditions limites) pour fixer les constantes d'intégrations. Elles peuvent correspondre soit à deux positions connues (x_1 et x_2) soit à une position (x_0) et à une vitesse (v_0). Parfois ce ne sont pas les conditions initiales qui sont connues, mais les conditions « limites » c'est-à-dire les valeurs de la position et/ou de la vitesse lors d'un changement de régime d'accélération.

• Caractéristiques du mouvement

Le mouvement est *accéléré* si a et v sont dans le même sens : $a \cdot v > 0$. Inversement, le mouvement est *retardé* si $a \cdot v < 0$.

• Relation sans le temps

Grâce au jeu entre différentielles, on peut obtenir une relation entre position, vitesse et accélération sans avoir besoin de la variable temporelle, genre de raisonnement que nous retrouverons lorsque nous étudierons les différentes formes d'énergies au chapitre 4 :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad a \cdot dx = v \cdot dv = d\left(\frac{1}{2}v^2\right) \quad (2.7)$$

Pour comprendre la dernière égalité, posons $f = \frac{1}{2}v^2$ et réalisez que $df/dv = v$ soit $df = v dv$ ce qui donne bien $df = d(\frac{1}{2}v^2) = v dv$.

Si on suppose que l'accélération est constante, l'éq.(2.7) donne : $a(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$, où les indices 1 et 2 caractérisent deux états différents du système physique. L'état i est associé aux quantités $t_i, x_i, v_i, a_i \dots$. Formellement on a :

$$a \cdot dx = v \cdot dv = d\left(\frac{1}{2}v^2\right) \Rightarrow \int_{Etat_1}^{Etat_2} a \cdot dx = \int_{Etat_1}^{Etat_2} v \cdot dv = \int_{Etat_1}^{Etat_2} d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

puis, en remplaçant les bornes d'intégrations par les variables associées :

$$\begin{aligned} \int_{Etat_1}^{Etat_2} a \cdot dx &= \int_{x_1}^{x_2} a \cdot dx \stackrel{(a=cste)}{=} a \int_{x_1}^{x_2} dx = a(x_2 - x_1) = \\ \int_{Etat_1}^{Etat_2} v \cdot dv &= \int_{v_1}^{v_2} v \cdot dv = \frac{1}{2}v^2 \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \\ \int_{Etat_1}^{Etat_2} d\left(\frac{1}{2}v^2\right) &= \int_{v_1^2/2}^{v_2^2/2} d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

La dérivée de l'accélération par rapport au temps s'appelle le « jerk » ($j = d^3x/dt^3$), et celle du jerk le « snap ». En général, nous n'avons pas besoin de ces quantités car la dynamique est modélisée par des forces qui sont proportionnelles à l'accélération, ce que nous verrons au chapitre 3.

2.2.3 Exercices de cours – Équations horaires

C2.1 – vitesse et accélération à partir de l'évolution des positions

Le mouvement d'une particule est décrite par l'équation horaire :

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0 \quad (2.8)$$

où a_0, v_0 et x_0 sont des constantes.

- 1) Calculer l'équation horaire des vitesses $v(t)$.
- 2) Calculer l'équation horaire des accélérations $a(t)$. En déduire le type du mouvement (cas où a_0 et v_0 sont positifs, puis cas général).
- 3) Interpréter et donner la dimension de a_0, v_0 et x_0 .
- 4) AN : Avec $x(t) = 5t^2 + 7t + 10$ dans le système d'unités international, donner les valeurs de l'accélération, de la vitesse et de la position à l'instant initial $t = 0$. Représenter graphiquement $x(t), v(t)$ et $a(t)$.

Réponses

C2.2 – Calcul de l'équation horaire d'un mouvement

Une personne tire un coup de fusil verticalement. On suppose que la balle est tirée d'une hauteur h à partir du sol et part avec une vitesse v_0 . On néglige les frottements de l'air. La balle est uniquement soumise à l'accélération de la pesanteur ($\|\vec{a}\| = g$). Après chaque calcul on vérifiera la dimension des expressions trouvées.

- 1) Calculer les équations horaires pour $a(t)$, $v(t)$ et $z(t)$. Représenter graphiquement ces trois fonctions.*
- 2) Calculer le temps mis pour atteindre le sommet de la trajectoire. En déduire la hauteur maximale atteinte par la balle.*
- 3) Calculer le temps mis pour revenir à la hauteur h . Comparer les temps de montée et de descente. Calculer la vitesse juste à ce moment là.*

- 4) *Calculer le temps mis pour atteindre le sol. Comparer les temps de montée et de descente. Calculer la vitesse juste avant impact au sol.*
- 5) *Dessiner la trajectoire.*

Réponses

2.2.4 Oscillateur harmonique

Un autre mouvement, en général unidimensionnel, que l'on retrouve très fréquemment dans les phénomènes physiques, est le mouvement oscillant (masse accrochée à un ressort, vibrations, liaison moléculaire, courant alternatif...). On appelle « oscillateur harmonique » le cas le plus simple de mouvement oscillant, où l'on néglige les frottements (absence d'amortissement) et les phénomènes de résonance (absence de force extérieure). Le cas général sera traité lors du chapitre 5.

Soit C le centre du mouvement oscillant, que l'on choisit en général comme origine de notre repère afin de simplifier les expressions mathématiques ($C = O$). Le point d'étude, M , repéré par la variable $x(t)$ oscille autour de l'origine O de notre repère ($x_C = 0$). La fonction mathématique périodique la plus simple que l'on connaisse est la fonction cosinus (ou sinus si vous préférez, les deux étant équivalentes « à une phase $\phi = \pi/2$ près »). Par convention, on écrit l'équation horaire du mouvement de M de la façon suivante :

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)} \quad (2.9)$$

où x_m est l'amplitude des oscillations, ω est la pulsation et ϕ est la phase (ou déphasage).

Soit T la période du mouvement, qui, par définition, correspond au temps nécessaire pour que le point M revienne à sa position initiale. On peut alors relier T à ω , en se souvenant que la fonction cosinus est de période 2π :

$$\begin{aligned} x(t+T) = x(t) &\Rightarrow A \cos(\omega(t+T) + \phi) = A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \\ \cos(\omega T + \omega t + \phi) &= \cos(\omega t + \phi) = \cos(2\pi + \omega t + \phi) \Rightarrow \omega T = 2\pi \\ &\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

On introduit aussi une autre grandeur, appelée fréquence, notée f ou ν selon les domaines, et telle que $f = \nu = 1/T$.

Nous verrons plus tard que ce type de mouvement est caractérisé par une équation différentielle du type :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.11)$$

où $\ddot{x} = d^2x/dt^2$. Cette équation différentielle est dite « du second ordre », et nécessite des techniques mathématiques que nous étudierons à partir du chapitre 5. Vous pouvez vous confronter à ces techniques exposées dans l'annexe mathématique « Résolution des équations différentielles », mais nous nous limitons pour le moment aux équations différentielles du premier ordre (où seuls x et sa dérivée première, en général $\dot{x} = dx/dt$, sont reliés).

Remarque : Si $x_C \neq 0$ alors il faut remplacer dans les équations précédentes $x(t)$ par $\Delta x(t) = x(t) - x_C$.

2.2.5 Abscisse curviligne et vecteur déplacement différentiel élémentaire

À présent, revenons à la notion de trajectoire. Pour la visualiser il faut être dans un espace à 2 ou 3 dimensions, et si l'on veut y associer les notions de vitesse et d'accélération, il faut être familiarisé avec les vecteurs et l'ensemble de leurs propriétés. C'est ce que nous allons étudier dans la prochaine section. Cependant, il est intéressant de remarquer que la trajectoire d'un point est en fait une courbe à une dimension. Il est donc encore possible de définir une quantité physique algébrique (qui n'est pas un vecteur) le long de la trajectoire : c'est l'abscisse curviligne⁶ $\ell(t) = \widehat{OM}$ où O est une origine choisie sur la trajectoire. $\ell(t)$ est simplement la distance parcourue par le point M depuis l'origine O le long de la trajectoire, en prenant comme sens positif le sens du déplacement. Ainsi la norme de la vitesse du point M est telle que $v = d\ell/dt$ et sa direction est tangente à la trajectoire comme indiqué sur la figure 2.5.

Si on introduit le vecteur unitaire \vec{u}_T tangent à la trajectoire, la vitesse a pour expression :

$$\vec{v} = \frac{d\ell}{dt} \vec{u}_T = v \vec{u}_T \quad (2.12)$$

Le vecteur unitaire tangent \vec{u}_T change pour chaque point de la trajectoire... Une quantité importante en physique est le « **vecteur déplacement différentiel élémentaire** », noté $d\vec{r}$, qui représente une variation infinitésimale du vecteur position. Ce vecteur est toujours tangent à la trajectoire (démonstration dans la section suivante).

Avec l'abscisse curviligne et le vecteur unitaire tangent, le vecteur déplacement différentiel a une expression simple :

$$d\vec{r} = d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_T \quad (2.13)$$

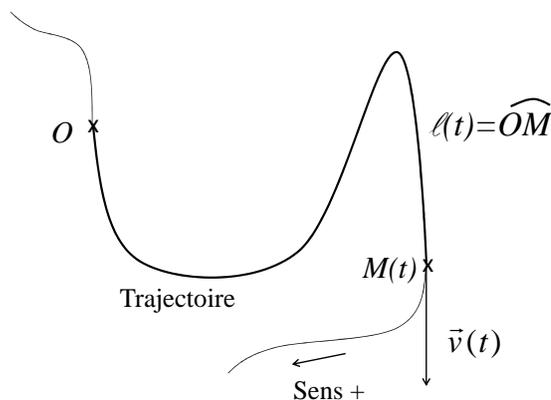


FIGURE 2.5 – Abscisse curviligne $\ell(t)$

6. Dans la littérature elle est souvent notée $s(t)$, nous préférons $\ell(t)$ pour éviter toute confusion avec la surface S .

2.3 Cinématique 2d et 3d

2.3.1 Opérations sur les vecteurs

• Produit vectoriel

Vous devez être capable de projeter un vecteur, d'additionner ou soustraire deux vecteurs et ceci de façon géométrique (dessin) et algébrique (composantes), et de calculer un produit scalaire. Le formulaire mathématique (annexe A) vous rappelle les relations de base à connaître parfaitement.

Le produit vectoriel est une opération nouvelle. Nous allons essayer de vous familiariser avec cette notion et les techniques de calculs associées au fur et à mesure du cours. Il faudra le maîtriser lorsque nous aborderons le mouvement de rotation. C'est un outil de base pour l'étude des corps solides, des phénomènes magnétiques... en fait cet outil intervient dans presque tous les domaines de la physique... Mais la seule chose que nous vous demandons de retenir pour l'instant, c'est que les 3 vecteurs unitaires d'un système de coordonnées tridimensionnel orthonormé direct, sont reliés par un produit vectoriel. Pour le système cartésien, nous avons⁷ :

$$\begin{array}{l} \vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{u}_x = \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x \\ \text{et} \quad \vec{u}_i \wedge \vec{u}_j = -\vec{u}_j \wedge \vec{u}_i \quad \text{et} \quad \vec{u}_i \wedge \vec{u}_i = \vec{0} \quad (i, j = x, y, z) \end{array}$$

Ces définitions suffisent pour effectuer tout calcul de produit vectoriel. La méthode du déterminant est juste une astuce pour simplifier les calculs et obtenir le résultat directement, elle est présentée dans l'annexe A.

• Dérivée d'un vecteur (par rapport au temps)

Soit le vecteur \vec{A} dépendant du temps, $\vec{A} = \vec{A}(t)$, que l'on exprime en composantes dans une base cartésienne : $\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{u}_x + A_y(t)\vec{u}_y + A_z(t)\vec{u}_z$.

À partir de la définition usuelle de la dérivée par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{A_x(t + \Delta t) - A_x(t)}{\Delta t} \vec{u}_x + \frac{A_y(t + \Delta t) - A_y(t)}{\Delta t} \vec{u}_y \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_z(t + \Delta t) - A_z(t)}{\Delta t} \vec{u}_z \right] \\ &= \dot{A}_x \vec{u}_x + \dot{A}_y \vec{u}_y + \dot{A}_z \vec{u}_z \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation $\dot{A} = dA/dt$. L'expression obtenue est relativement simple : la dérivée d'un vecteur s'obtient par dérivation de ses composantes. Mais attention ceci n'est vrai que dans le système de coordonnées cartésiennes,

7. Dans presque tous les autres pays du monde le symbole utilisé est une simple croix \times et non \wedge

où les vecteurs unitaires sont constants dans le temps. Dans d'autres systèmes de coordonnées les vecteurs unitaires varient dans le temps ce qui amène des termes supplémentaires dans l'expression du vecteur dérivé, comme nous le verrons bientôt.

Lorsqu'un vecteur dépend du temps il varie en général à la fois en norme et en direction. Ceci est illustré sur la figure 2.6.

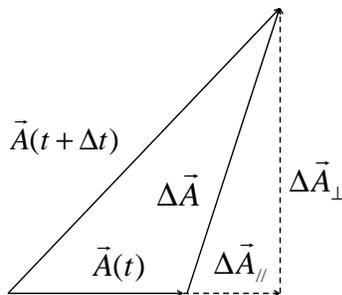


FIGURE 2.6 – Variation d'un vecteur

Pour une variation infinitésimale ($\|\overrightarrow{\Delta A}\| \ll \|\vec{A}\|$, $\Delta \rightarrow d$), $d\vec{A}_{//}$ représente la variation de longueur de \vec{A} , et $d\vec{A}_{\perp}$ représente la variation de direction.

• Propriétés

- On vient d'étudier la dérivation par rapport au temps d'un vecteur mais bien-entendu on peut dériver des vecteurs par rapport à n'importe quel type de variable.

- Distributivité :

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d(\vec{A} \wedge \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Cette propriété est vraie au niveau de la différentielle :

$$d(\vec{A} \cdot \vec{B}) = d\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot d\vec{B} \quad \text{et} \quad d(\vec{A} \wedge \vec{B}) = d\vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge d\vec{B}$$

- **Un vecteur unitaire et sa dérivée sont perpendiculaires :**

$$\|\vec{u}_A\|^2 = \vec{u}_A \cdot \vec{u}_A = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}_A \cdot \vec{u}_A}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{u}_A \cdot \vec{u}_A}{dt} = \frac{d(\vec{u}_A \cdot \vec{u}_A)}{dt} = 2\vec{u}_A \cdot \frac{d\vec{u}_A}{dt}$$

$$\text{d'où} \quad \vec{u}_A \cdot \frac{d\vec{u}_A}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{u}_A \perp \frac{d\vec{u}_A}{dt}} \quad (2.14)$$

Cette propriété est vraie au niveau de la différentielle : $\vec{u}_A \perp d\vec{u}_A$.

- En coordonnées cartésiennes l'intégrale d'un vecteur est simplement l'intégrale de ses composantes :

$$\vec{B}(t) = \int \vec{A}(t) dt = \vec{u}_x \int A_x(t) dt + \vec{u}_y \int A_y(t) dt + \vec{u}_z \int A_z(t) dt$$

2.3.2 Vitesses et accélérations

La section précédente nous a montré que la dérivation peut s'effectuer aussi bien sur des fonctions scalaires que sur des fonctions vectorielles. On va donc généraliser les définitions vues dans la section 2.2 au cas vectoriel :

$$\text{Vitesse moyenne : } \vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{Vitesse (instantanée) : } \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.15)$$

La figure 2.7 montre que le vecteur déplacement différentiel $d\vec{r}$ donne la direction de la tangente au point M . On en déduit une propriété fondamentale :

la vitesse (instantanée) est toujours tangente à la trajectoire

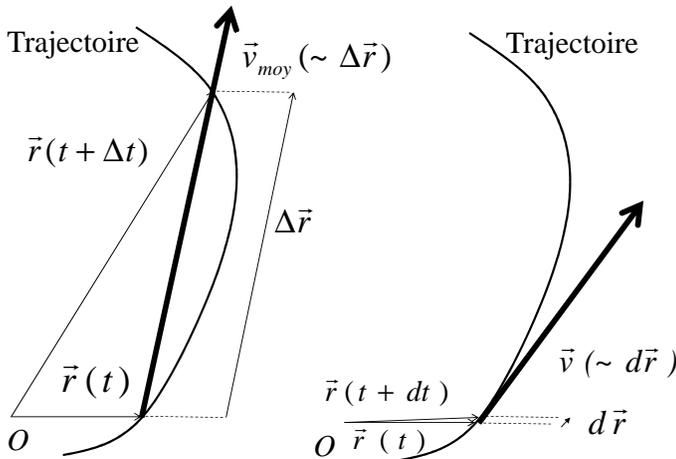


FIGURE 2.7 – Vecteurs vitesse moyenne et vitesse instantanée

En coordonnées cartésiennes, nous obtenons l'expression :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

Rappelons que par définition : $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$

De manière analogue nous définissons :

$$\text{accélération moyenne} \quad \vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{accélération (instantanée)} \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (2.16)$$

de composantes cartésiennes :

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z = \dot{v}_x \vec{u}_x + \dot{v}_y \vec{u}_y + \dot{v}_z \vec{u}_z = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

L'accélération est toujours orientée vers l'intérieur de la trajectoire

On peut le comprendre géométriquement à partir de la figure 2.8 où l'accélération au point $M(t)$ (repéré par $\vec{r}(t)$) est construite par la relation $\vec{a}(t) = [\vec{v}(t) - \vec{v}(t - \Delta t)]/\Delta t$, absolument équivalente à celle donnée par l'équation (2.16) quand $\Delta t \rightarrow 0$. Remarquons que deux points étaient suffisants pour définir une vitesse (une pente), en revanche il en faut trois pour définir une accélération (une courbure...). *Prenez le temps d'essayer de comprendre cette figure difficile.*

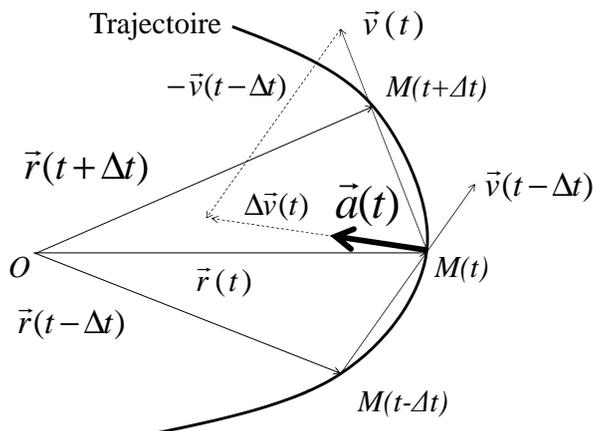


FIGURE 2.8 – Construction géométrique du vecteur accélération

• Caractéristiques du mouvement

Voici un ensemble de définitions à retenir :

- **Le mouvement est accéléré si : $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$.**
- **Inversement, le mouvement est retardé si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$.**
- Si la norme de la vitesse est constante, le mouvement est uniforme.
- Si la direction de la vitesse est constante, le mouvement est rectiligne.
- Si l'accélération est dans la même direction que la vitesse, l'accélération est dite « tangentielle ». Si cette propriété est vérifiée en tout point de la trajectoire, le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré.
- Si l'accélération est perpendiculaire à la vitesse, l'accélération est dite « normale » ou « centripète ». Si cette propriété est vérifiée en tout point de la trajectoire et si l'accélération est constante, le mouvement est circulaire et uniforme.

Dans le cas général l'accélération est quelconque. Pour un mouvement plan, on la décompose en deux composantes tangentielle et normale (perpendiculaire). **La composante tangentielle représente la variation de la norme de la vitesse : $a_T = d\|\vec{v}\|/dt$. La composante normale représente la variation de la direction de la vitesse.** Ceci est illustré sur la figure 2.9.

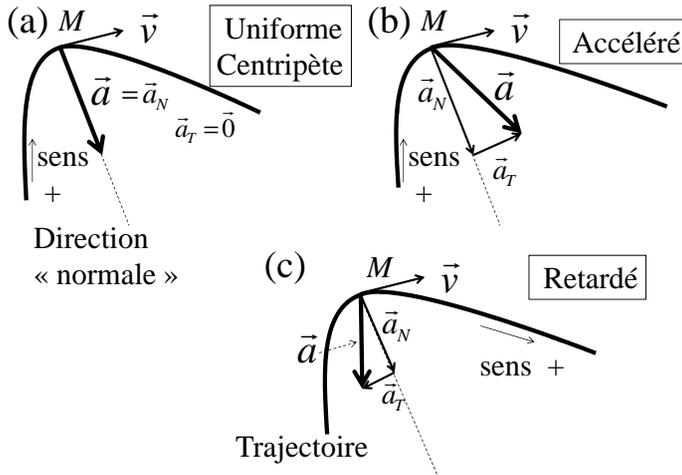


FIGURE 2.9 – Vecteurs vitesse et accélération pour divers mouvements

Partie plus difficile :

Localement autour du point M , on peut représenter un mouvement quelconque dans le plan (\vec{v}, \vec{a}) , et définir le **rayon de courbure** $R(t)$ de la trajectoire à l'instant t comme le rayon du cercle qui vient parfaitement épouser la trajectoire à cet instant (voir la figure 2.10).

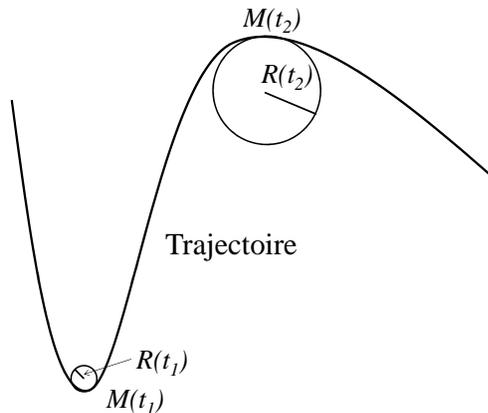


FIGURE 2.10 – Trajectoire et rayon de courbure

L'accélération normale prend la forme $a_N(t) = v(t)^2/R(t) = a_c$ appelée « accélération centripète ». Ceci peut être compris géométriquement grâce à la figure 2.11 où l'on voit que :

$$\tan \Delta\phi = \frac{\Delta\ell}{R} = \frac{\|\Delta\vec{v}\|}{v_1} \xrightarrow{(\Delta t \rightarrow dt)} \tan d\phi = \frac{d\ell}{R} = \frac{\|d\vec{v}\|}{v}$$

$$\text{d'où } a_N = \lim_{\Delta t \rightarrow dt} \frac{\|\Delta \vec{v}\|}{\Delta t} = \frac{\|d\vec{v}\|}{dt} = \frac{v}{R} \frac{dl}{dt} = \boxed{\frac{v^2}{R} = a_c} \quad (2.17)$$

Nous redémontrons ce résultat algébriquement dans les sections 2.3.5 et 2.3.6.

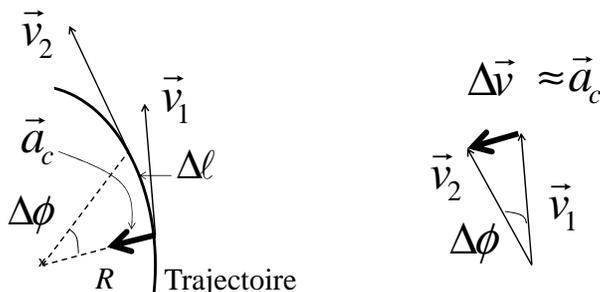


FIGURE 2.11 – Accélération centripète

Dans la suite nous allons nous concentrer sur des mouvements bidimensionnels où seules deux coordonnées seront nécessaires pour les étudier. Quelques rares exercices, dont ceux sur le mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique, auront besoin d'une description tridimensionnelle.

2.3.3 Balistique sans frottements

Avec l'ensemble des informations données précédemment, vous devez être à présent capable de résoudre de nombreux problèmes de balistique. À titre d'exemple, voici un exercice de cours très classique à maîtriser parfaitement.

• C2.3 – Projectile

Un projectile de masse m est lancé à $t = 0$ avec la vitesse \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'axe horizontal (que l'on nommera x , et on appellera y l'axe vertical). On suppose que seul le poids du projectile intervient, ainsi l'accélération est constante, d'intensité g , verticale et orientée vers le bas. L'objectif est de décrire complètement la trajectoire.

2) Justifier que le mouvement est plan. 2) Calculer les expressions des composantes de \vec{a} , \vec{v} et \vec{OM} où M est la position (du centre de masse) du projectile. On prendra l'origine des coordonnées à la position du projectile au moment du départ.

3) Donner l'équation de la trajectoire. Quel type de trajectoire est-ce ?

4) Soit P , le point d'impact (arrivée) du projectile au sol :

a) Quelle relation caractérise P ?

b) Calculer le temps t_P mis par le projectile pour arriver en P .

c) En déduire la portée x_P et la vitesse \vec{v}_P au point P . Comparer alors \vec{v}_P avec \vec{v}_0 , les représenter sur un dessin.

d) $v_0 (= \|\vec{v}_0\|)$ étant fixé, le point P peut être atteint par deux angles différents. Donner la relation entre ces deux angles. Représenter sommairement les deux types de trajectoires. Les temps mis pour atteindre P sont-ils égaux ?

- e) v_0 étant fixé, calculer α pour que le point P soit le plus loin possible de l'origine. Commenter ce résultat à la lumière de celui de la question précédente.
- 5) Soit S le sommet de la trajectoire.
- a) Quelle relation caractérise S ?
- b) Calculer le temps t_S pour arriver en S .
- c) En déduire la position et la vitesse \vec{v}_S du projectile en S .
- d) Comparer t_P avec t_S , et x_P avec x_S . Ce résultat était-il prévisible ?
- e) v_0 étant fixé, calculer α pour que le point S soit le plus haut possible. Ce résultat était-il prévisible ?
- 6) Caractériser le mouvement avant et après S (retardé/accélééré). Justifier votre réponse.
- 7) Que deviendraient les réponses à toutes ces questions pour un projectile de masse différente ?

Réponses

2.3.4 Notion de vitesse relative

Jusqu'à présent nous n'avons considéré qu'un seul observateur, situé en O le centre de notre repère, étudiant un objet physique représenté par un point matériel situé en M . Cependant, dans la vie de tous les jours on peut être confronté à des situations un peu plus complexes où l'on doit considérer deux observateurs en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Par exemple, lorsque vous êtes dans votre voiture (en mouvement par rapport au sol) et que vous croisez un autre véhicule, ou lors d'un dépassement, vous allez associer à ce véhicule une vitesse, dite « relative », qui n'est pas la vitesse de ce véhicule par rapport (à un observateur situé) au sol. Les notions de position, vitesse et accélération sont donc directement reliées à l'observateur qui effectue les mesures, ou en d'autres mots, au référentiel de l'observateur.

L'étude des propriétés relatives des quantités cinématiques (position, vitesse, accélération) rentre dans le cadre de ce qu'on appelle « les propriétés des changements de référentiels » qui sont traitées en toute généralité dans le chapitre 9. Ici, nous voulons seulement mentionner ce qui se passe pour les vitesses, ce qui est déjà fort utile pour de nombreuses applications. La notion de référentiel, et en particulier la définition des différents types de référentiels sera donnée lors du prochain chapitre lors de l'étude de la première loi de Newton appelée « principe d'inertie ». Le référentiel vu comme un repère plus une horloge, suffit pour nos propos actuels.

Soit \mathcal{G} le référentiel associé au premier observateur, appelé \mathcal{O} , immobile par rapport au sol et situé en O , origine du système de coordonnées choisi. Il mesure

le temps, noté t , et la position du point d'étude situé en M , notée $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. La vitesse de M est par définition $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

Soit \mathcal{G}' le référentiel associé au second observateur, appelé \mathcal{O}' , animé d'une vitesse \vec{V} par rapport au sol et situé en O' , origine du second système de coordonnées lié à \mathcal{G}' . Il mesure le temps, noté t' , et la position du point d'étude situé en M , notée $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$. La vitesse de M , dans ce référentiel, est par définition $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$.

L'observateur \mathcal{O} voit l'observateur \mathcal{O}' se déplacer à la vitesse \vec{V} , ce qui s'écrit en terme mathématique $\vec{V} = d\overrightarrow{OO'}/dt$.

Tant que les vitesses sont petites devant la vitesse de la lumière $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, on peut considérer que le temps est « absolu »⁸ c'est à dire que les deux observateurs \mathcal{O} et \mathcal{O}' ont des mesures du temps identiques : $t = t'$. Les positions \vec{r} et \vec{r}' sont reliées très simplement grâce aux propriétés des vecteurs :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'$$

Pour obtenir la relation entre les vitesses, il suffit de dériver la relation précédente par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'} \quad (2.21)$$

Cette relation s'appelle « **loi de composition des vitesses** », et elle nous montre que les vitesses s'ajoutent (vectoriellement)⁹.

Si la vitesse relative \vec{V} entre les deux référentiels \mathcal{G} et \mathcal{G}' est constante, on a la relation $\overrightarrow{OO'} = \vec{V}t$ définissant alors la « **transformation de Galilée** » :

$$\begin{cases} t = t' \\ \vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}' \end{cases} \quad (2.22)$$

2.3.5 Mouvement circulaire

Soit un point M animé d'un mouvement circulaire autour du centre O choisi comme origine des divers systèmes de coordonnées. Soit R le rayon de la trajectoire et ϕ l'angle entre \vec{u}_x et \overrightarrow{OM} . Le sens de la rotation est identique au sens positif choisi pour ϕ (sens trigonométrique). On considère les systèmes de coordonnées cartésiennes. L'axe z est perpendiculaire au plan de rotation.

• Définitions

La **vitesse angulaire**, ou « fréquence angulaire », est la quantité : $\omega = \dot{\phi}$
 $[\omega] = T^{-1}$, unité : $rad.s^{-1}$.

8. Le domaine de la physique s'intéressant aux phénomènes caractérisés par des vitesses proches de c est la « relativité restreinte », ou simplement « relativité » (« special relativity » en anglais), où l'on y découvre les propriétés étonnantes de l'espace et du temps...

9. Ceci ne sera plus vrai en relativité afin de respecter le fait que tous les objets connus ne se déplacent pas plus vite que c (ce qu'on nomme « principe d'Einstein » ou « principe d'universalité de c »).

Le **vecteur rotation** vaut $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. Son sens est donné par le sens de rotation selon « la règle du tire bouchon ».

L'**accélération angulaire** est $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$. $[\alpha] = T^{-2}$, unité : $rad.s^{-2}$.

Le **mouvement est dit circulaire et uniforme si** : $\dot{\omega} = \ddot{\phi} = 0$.

Si le mouvement est circulaire et uniforme on obtient la relation entre ϕ et ω :

$$\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \omega = cste \Rightarrow d\phi = \omega dt \Rightarrow \phi = \int \omega dt = \omega \int dt = \omega t + c_\omega$$

où c_ω est une constante d'intégration qui dépend du choix de l'origine du temps. En général on prend $\phi = 0$ à $t = 0$, donnant $c_\omega = 0$ ce qui donne la relation :

$$\boxed{\phi = \omega t} \quad (\text{si } \omega = cste) \quad (2.23)$$

On en déduit la période du mouvement T en réalisant que $\phi = 2\pi$ pour $t = T$:

$$2\pi = \omega T \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad (2.24)$$

• C2.4 – Mouvement circulaire et uniforme. Cas cartésien.

Avec le cadre donné ci-dessus, on se propose d'étudier le mouvement circulaire et uniforme du point M . On veut montrer que, pour un tel mouvement, la norme de la vitesse vaut $\boxed{v = \omega R}$ et $\vec{v} = v \vec{u}_T$, et que l'accélération est purement centripète et est telle que $\boxed{a_c = v^2/R = \omega^2 R}$ et $\boxed{\vec{a} = a_c \vec{u}_N}$.

- 1) Donner les relations entre R , x et y , et entre ϕ , ω et t .
- 2) Calculer les équations paramétriques du mouvement $x(t)$ et $y(t)$.
- 3) Calculer \vec{v} , v , \vec{a} et a . En déduire la relation entre \vec{a} et \vec{r} .
- 4) Calculer \vec{v} , v , \vec{a} et a par un raisonnement géométrique.

Réponses

2.3.6 Système de coordonnées polaires

Jusqu'à présent nous n'avons défini et utilisé que le système de coordonnées cartésiennes qui est parfaitement adapté pour l'étude des systèmes physiques animés d'un mouvement rectiligne (mouvement 1d) ou soumis à des forces de direction constante (balistique). Cependant, les mouvements les plus généraux ne sont pas aussi simples, les trajectoires sont souvent courbées par endroit du fait de contraintes extérieures ou sous l'action de forces dont les directions changent au cours du temps. L'utilisation des coordonnées cartésiennes pour décrire un mouvement quelconque peut être particulièrement complexe voire inextricable. Souvent il apparaît que le système de coordonnées polaires est plus adapté pour mener les calculs à leur terme. Dans cette section nous définissons ce système de coordonnées et nous l'appliquerons dans la section suivante à la trajectoire courbe la plus simple : le mouvement circulaire. Seules deux dimensions sont pertinentes pour ces études. Les coordonnées polaires peuvent être utilisées pour décrire tous les mouvements plans.

Un point M est repéré dans le système cartésien (2d) par des coordonnées homogènes à des longueurs : $[x] = [y] = L$. Dans le système polaire, la première coordonnée, notée ρ , est homogène à une longueur $[\rho] = L$, mais la seconde coordonnée est un angle, noté ϕ . Un angle est un nombre sans dimension, $[\phi] = 1$. Par convention, on attribue aux angles des unités comme les *radians* ou les *degrés* : $1 \text{ tour (tr)} = 2\pi \text{ radians (rad)} = 360 \text{ degrés } (^\circ)$. La définition géométrique de π comme rapport du périmètre (P) d'un cercle sur son diamètre (D), nous montre bien que c'est un nombre sans dimension : $\pi = P/D = 3,14159\dots$ Pour plus de détails, voir la section 1.3.2 du chapitre 1.

• Domaines de variations et relations entre coordonnées

Le premier objectif d'un système de coordonnées est de trouver un ensemble de nombres susceptible de décrire tous les points de l'espace. Nous nous limitons ici à un espace bidimensionnel « euclidien », ce qu'on appelle « le plan »¹⁰. Les domaines de variations des coordonnées s'obtiennent en faisant varier un point M dans tout l'espace. Avec des coordonnées cartésiennes cette condition est satisfaite si les coordonnées parcourent l'ensemble des réels : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

La figure 2.15 définit les coordonnées cartésiennes et polaires du point M , à partir d'une origine O commune. Par définition, les coordonnées polaires sont telles que la **coordonnée « radiale » ρ représente la distance à l'origine**, $\rho = \|\overrightarrow{OM}\| = \|\vec{r}\|$, et l'**angle polaire ϕ est un angle orienté ayant pour origine l'axe des x (par convention) et dont le sens positif est le sens « trigonométrique »**. Tous les points du plan peuvent être décrits si ρ est un réel positif, $\rho \in \mathbb{R}^+$, et si ϕ peut parcourir un tour, $\phi \in [0; 2\pi[$.

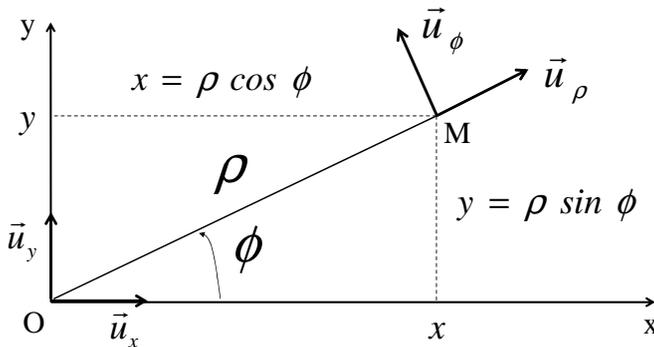


FIGURE 2.15 – Définitions des coordonnées polaires : $M = M(x, y) = M(\rho, \phi)$

À partir de ces définitions et à l'aide de la figure 2.15 on obtient les relations entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{x = \rho \cos \phi \text{ et } y = \rho \sin \phi \Leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \tan \phi = y/x} \quad (2.25)$$

10. Un exemple de surface 2d possédant une géométrie non-euclidienne est la surface de la sphère, où les propriétés usuelles de la géométrie sont modifiées : le théorème de Pythagore ne marche plus, la somme des angles d'un triangle ne vaut plus 180° , on peut même construire un triangle équilatéral avec trois angles droits... mais ceci est une autre histoire...

• Vecteurs unitaires et vecteur position

Les vecteurs unitaires de la base polaire ne sont pas fixes : ils dépendent de la position de M . On choisit \vec{u}_ρ de manière « radiale », c'est à dire qu'il nous indique la direction du point M par rapport à l'origine :

$$\vec{u}_\rho = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} \Leftrightarrow \boxed{\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho} \quad (2.26)$$

La définition de \vec{u}_ϕ est alors immédiate et découle de la volonté de construire une base orthonormée directe : $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi) = +\pi/2$. Ces deux vecteurs unitaires sont représentés sur la figure 2.15.

À partir de ces définitions et à l'aide de la figure 2.16 on obtient les relations entre les vecteurs unitaires des deux systèmes de coordonnées :

$$\boxed{\vec{u}_\rho = \cos \phi \vec{u}_x + \sin \phi \vec{u}_y} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{u}_\phi = -\sin \phi \vec{u}_x + \cos \phi \vec{u}_y} \quad (2.27)$$

et inversement : $\vec{u}_x = \cos \phi \vec{u}_\rho - \sin \phi \vec{u}_\phi$ et $\vec{u}_y = \sin \phi \vec{u}_\rho + \cos \phi \vec{u}_\phi$

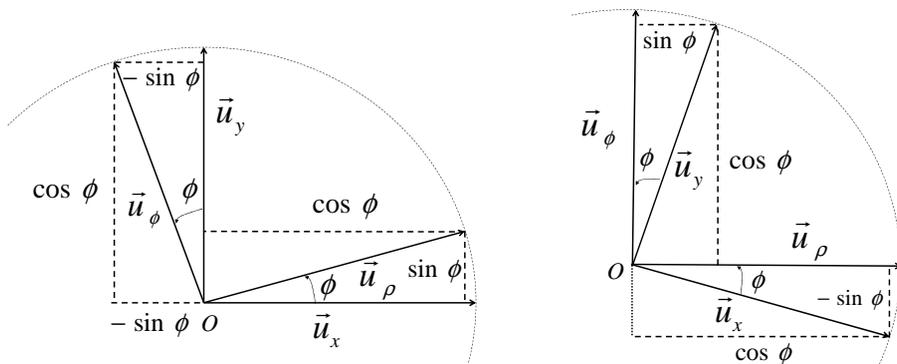


FIGURE 2.16 – Relations entre les vecteurs unitaires. Le cercle de rayon unité ($R = \rho = 1$) est représenté en pointillé. La seconde figure s'obtient de la première par une simple rotation d'angle $-\phi$. Les vecteurs unitaires \vec{u}_ρ et \vec{u}_ϕ positionnés en M sur la figure 2.15 sont à présents placés en O

• Vecteurs déplacement différentiel élémentaire

Le « vecteur déplacement différentiel élémentaire » $d\vec{r}$ représente une variation infinitésimale du vecteur position. Pour déterminer son expression dans un système de coordonnées particulier, il faut effectuer une variation infinitésimale de toutes les quantités qui interviennent dans sa définition, c'est à dire des coordonnées et des vecteurs unitaires du système choisi.

a) Cas des coordonnées cartésiennes : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$

* **Raisonnement géométrique** : On déplace le point M vers le point M' de

façon infinitésimale, en faisant varier chaque variable et en faisant attention au sens de déplacement du point M .

M a pour abscisse x , soit M_{dx} le point d'abscisse $x + dx$, si rien d'autre n'a varié, on voit sur la figure 2.17a que le déplacement s'est effectué dans la direction \vec{u}_x et a pour longueur dx . On a donc $d\vec{r} = dx \vec{u}_x$.

M a pour ordonnée y , soit M_{dy} le point d'ordonnée $y + dy$, si rien d'autre n'a varié, on voit sur la figure 2.17a que le déplacement s'est effectué dans la direction \vec{u}_y et a pour longueur dy . On a alors $d\vec{r} = dy \vec{u}_y$.

Si maintenant on fait varier simultanément les coordonnées x et y , le point M se déplace en M' et on a : $\overline{MM'} = d\overline{OM} = d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$. En toute rigueur il faudrait écrire : $\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \Delta\overline{OM}$

$$\Rightarrow \lim_{M' \rightarrow M} \overline{MM'} = d\overline{OM} = d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$$

* **Calcul direct** : On peut obtenir ce résultat par un calcul direct mais le raisonnement géométrique, une fois qu'on le maîtrise, est toujours beaucoup plus rapide surtout pour les autres systèmes de coordonnées :

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$$

mais les vecteurs unitaires du système cartésien sont fixes : $d\vec{u}_x = \vec{0}$ et $d\vec{u}_y = \vec{0}$, d'où :

$$\boxed{d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y} \quad (2.28)$$

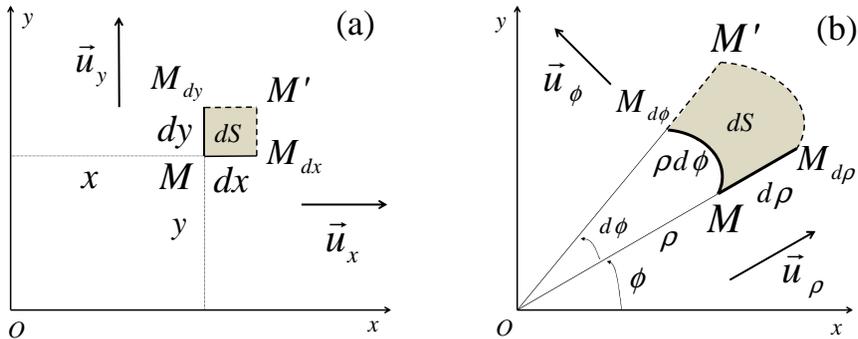


FIGURE 2.17 – Obtention géométrique des vecteurs déplacement différentiel : (a) cas cartésien ; (b) cas polaire

b) Cas des coordonnées polaires : $\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho$

* **Raisonnement géométrique** : Le point M est caractérisé par deux variables : ρ et ϕ . ρ intervient explicitement dans \vec{r} , et ϕ implicitement, il est caché dans \vec{u}_ρ .

Si seule la variable ρ est transformée en $\rho + d\rho$, le point M se déplace jusqu'au point $M_{d\rho}$, et comme on peut le voir sur la figure 2.17b, le déplacement s'est effectué dans la direction \vec{u}_ρ et a pour longueur $d\rho$. On a donc $d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho$.

Si seule la variable ϕ est transformée en $\phi + d\phi$, le point M se déplace jusqu'au point $M_{d\phi}$, et comme on peut le voir sur la figure 2.17b, le déplacement s'est effectué dans la direction \vec{u}_ϕ . Le déplacement correspond à un arc de cercle de longueur $d\ell = \rho d\phi$. On a donc $d\vec{r} = \rho d\phi \vec{u}_\phi$.

Si maintenant on fait varier simultanément les coordonnées ρ et ϕ , le point M se déplace en M' et on a :

$$\lim_{M' \rightarrow M} \overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi$$

* **Calcul direct :** $\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho \Rightarrow d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\vec{u}_\rho$

mais les vecteurs unitaires du système polaire ne sont pas fixes : $d\vec{u}_\rho \neq \vec{0}$ et $d\vec{u}_\phi \neq \vec{0}$, il faut les calculer. À cette fin on va utiliser leur expression donnée par l'éq.(2.27). Ainsi :

$$\begin{aligned} d\vec{u}_\rho &= d(\cos \phi) \vec{u}_x + \cos \phi d\vec{u}_x + d(\sin \phi) \vec{u}_y + \sin \phi d\vec{u}_y \\ &= d(\cos \phi) \vec{u}_x + d(\sin \phi) \vec{u}_y \quad (d\vec{u}_x = 0 = d\vec{u}_y) \\ &= -d\phi \sin \phi \vec{u}_x + d\phi \cos \phi \vec{u}_y \\ d\vec{u}_\phi &= d\phi \vec{u}_\phi \end{aligned}$$

D'où l'on tire que :
$$\boxed{d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi} \quad (2.29)$$

* **Remarques :**

- On constate que le raisonnement géométrique donne directement le même résultat sans aucun calcul. Il est donc bien plus rapide et nous vous conseillons fortement de le maîtriser. Bien-entendu, vous devez être capable de réaliser le calcul direct aussi.

- Le calcul de la différentielle de la fonction $\cos \phi$ (idem pour $\sin \phi$) se fait soit à partir de la formule connue $(\cos u)' = -u' \sin u$ en remplaçant les ' par l'opérateur différentiel d , soit en réalisant, par exemple, que $d \cos \phi / d\phi = -\sin \phi \Rightarrow d \cos \phi = -d\phi \sin \phi$

- Le calcul de $d\vec{u}_\rho$ peut se faire en passant par le calcul de la dérivée par rapport à ϕ de \vec{u}_ρ donné par l'éq.(2.27) :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\phi} = -\sin \phi \vec{u}_x + \cos \phi \vec{u}_y = \vec{u}_\phi \Rightarrow \boxed{d\vec{u}_\rho = d\phi \vec{u}_\phi} \quad (2.30)$$

- L'expression de $d\vec{u}_\phi$ est non nécessaire pour l'instant mais on en aura besoin lors du calcul de l'accélération en coordonnées polaires. Voici son calcul :

$$\begin{aligned} d\vec{u}_\phi &= d(-\sin \phi) \vec{u}_x - \sin \phi d\vec{u}_x + d(\cos \phi) \vec{u}_y + \cos \phi d\vec{u}_y \\ &= d(-\sin \phi) \vec{u}_x + d(\cos \phi) \vec{u}_y \\ &= -d\phi \cos \phi \vec{u}_x - d\phi \sin \phi \vec{u}_y \\ d\vec{u}_\phi &= -d\phi \vec{u}_\rho \end{aligned}$$

ou, en utilisant le calcul de la dérivée par rapport à ϕ de \vec{u}_ϕ donné par l'éq.(2.27) :

$$\frac{d\vec{u}_\phi}{d\phi} = -\cos \phi \vec{u}_x - \sin \phi \vec{u}_y = -\vec{u}_\rho \Rightarrow \boxed{d\vec{u}_\phi = -d\phi \vec{u}_\rho} \quad (2.31)$$

• Surface élémentaire

Lorsque l'on fait varier simultanément les deux coordonnées du système (cartésien ou polaire), on voit grâce à la figure 2.17, que l'on balaye une surface. Lorsque la variation des coordonnées est infinitésimale cela définit une surface élémentaire dS (ou élément de surface infinitésimal). Son expression mathématique est le simple produit des deux éléments de longueur infinitésimale obtenus par la variation des deux coordonnées. Ce qui donne :

$$\text{Pour le système cartésien : } dS = dx dy \quad (2.32)$$

$$\text{Pour le système polaire : } dS = d\rho \rho d\phi = \rho d\rho d\phi \quad (2.33)$$

• Résumé et exercice de cours

L'exercice de cours qui suit est une simple reformulation de ce qui a été vu précédemment sous forme de questions. Les outils développés dans cet exercice sont fondamentaux pour la suite de ce cours, il est donc indispensable que vous les maîtrisiez.

C2.5 – Systèmes de coordonnées 2d

Soit O un point fixe que l'on prendra comme origine des différents systèmes de coordonnées. Soit M notre point courant d'étude qui est quelconque. Calculer dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et polaires :

- 1) les domaines de variations de chaque coordonnée
- 2) l'expression de $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$
- 3) $\|\vec{r}\|$
- 4) les relations entre les différentes coordonnées
- 5) les relations entre les vecteurs unitaires des différents systèmes
- 6) le déplacement différentiel $d\vec{r}$ avec un raisonnement géométrique
- 7) le déplacement différentiel élémentaire $d\vec{r}$ par le calcul
- 8) l'élément de surface dS associé aux variations des 2 coordonnées

• C2.6 – Mouvement circulaire et uniforme. Cas polaire.

On reprend l'exercice C2.4 sur le mouvement circulaire et uniforme (voir figure ??a), mais à présent on veut démontrer que $v = \omega R$ et $a = \omega^2 R = v^2/R$ à l'aide d'un raisonnement avec les coordonnées polaires.

- 1) Donner les relations entre \vec{r} et R , et entre $\dot{\phi}$ et ω .
- 2) Calculer \vec{v} , v , \vec{a} et a .

Réponses

• C2.7 – Vitesse et accélération en coordonnées polaires

- 1) Déterminer les expressions des vecteurs $d\vec{u}_\rho/dt$ et $d\vec{u}_\phi/dt$.
- 2) En déduire l'expression générale de la vitesse en coordonnées polaires.
- 3) En déduire l'expression générale de l'accélération en coordonnées polaires.

Réponses**• Exercices mathématiques**

Démontrer les formules du périmètre du cercle et de la surface d'un disque à l'aide des coordonnées polaires et d'un raisonnement infinitésimal.

Un arc de cercle élémentaire est associé à l'élément de longueur (curviligne) $d\ell = \rho d\phi = R d\phi$ où $R = \rho = cste$ est le rayon du cercle \mathcal{C} . Le périmètre, P , du cercle \mathcal{C} s'obtient en faisant la somme de tous les éléments d'arc qui constituent

le cercle, ce qui en terme de la variable ϕ revient à la faire varier sur l'ensemble de son domaine de définition $[0; 2\pi[$:

$$P = \int_C dl = \int_0^{2\pi} R d\phi \stackrel{R=cste}{=} R \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R$$

Concernant la surface du disque, on a deux possibilités pour réaliser les calculs :
 - *Méthode « brutale » par double intégration* : On a vu que la surface élémentaire polaire est $dS = \rho d\rho d\phi$ (éq.(2.33)). Si on somme tout ces éléments de surface afin de constituer un disque (\mathcal{D}) de rayon R , on comprend qu'il faut faire varier ρ de 0 à R , et ϕ de 0 à 2π . Ce qui donne :

$$S_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\phi = \int_0^R \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R \cdot 2\pi = \pi R^2$$

- *Méthode astucieuse – simple intégration par anneaux concentriques* : On a démontré précédemment la formule du périmètre d'un cercle. Ainsi un cercle de rayon ρ a un périmètre $P = 2\pi\rho$. Choisissons comme surface élémentaire un anneau de périmètre $P = 2\pi\rho$ et de largeur $d\rho$. La surface élémentaire de cet anneau élémentaire vaut alors $dS = 2\pi\rho d\rho$. Si on somme tout ces éléments de surface afin de constituer un disque de rayon R , on comprend qu'il faut et qu'il suffit de faire varier ρ de 0 à R . (L'intégration sur ϕ est faite au niveau de la construction de l'élément dS). Ce qui donne :

$$S_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} dS = \int_0^R 2\pi\rho d\rho = \frac{2\pi\rho^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2 \quad (2.38)$$

2.3.7 Base de Frenet

La base de Frenet est un autre repère fréquemment utilisé en physique pour la description du mouvement. L'origine de cette base est le point courant d'étude ($O = M$). Les vecteurs unitaires sont mobiles, le premier est le vecteur « tangent » \vec{u}_T qui, comme son nom l'indique, est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement (il donne la direction de la vitesse); le second est le vecteur « normal » \vec{u}_N qui est perpendiculaire à \vec{u}_T et tel qu'il pointe vers l'intérieur de la trajectoire. Le troisième vecteur de la base \vec{u}_B , appelé « binormal », est tel que le trièdre $(\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{u}_B)$ soit direct. Ces vecteurs unitaires sont donnés sur la figure 2.18 pour une trajectoire quelconque.

Ce repère est utile pour comprendre que la variation de la norme de la vitesse est tangentielle alors que la variation de direction est selon la normale et proportionnelle à l'accélération centripète. En voici la démonstration :

$$\vec{v} = v \vec{u}_T \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\vec{u}_T}{dt} \quad (2.39)$$

$$\text{mais } \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dl} \frac{dl}{dt} \quad (2.40)$$

où ℓ est l'abscisse curviligne et $d\alpha$ la variation angulaire associée au passage du point $M(t)$ au point $M'(t + dt)$ pendant le temps dt (voir la figure 2.18).

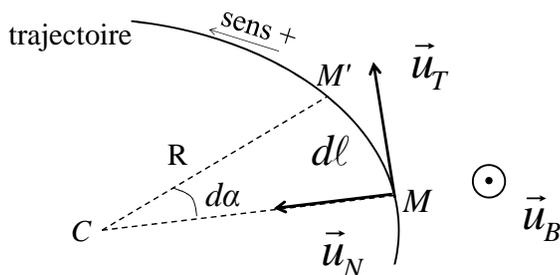


FIGURE 2.18 – Base de Frenet

L'équation (2.12) nous dit que $v = dl/dt$. À l'aide de la figure 2.18 on voit que $dl = R d\alpha$ où R est le rayon de courbure de la trajectoire au point M (voir section 2.3.2). Pour le dernier terme $d\vec{u}_T/d\alpha$, on veut montrer qu'il vaut \vec{u}_N . On peut déjà le comprendre grâce à l'éq.(2.14). Pour le montrer on peut faire le raisonnement suivant : lorsque le déplacement est infinitésimal ($MM' = dl$) on définit le « plan osculateur » comme le plan de la figure 2.18 soit le plan (C, M, M') ou (\vec{u}_T, \vec{u}_N) . Le déplacement de M à M' peut être décrit par un arc de cercle de centre C et de rayon R , le cercle complet est appelé « cercle osculateur » et R est le rayon de courbure. Utilisons des coordonnées polaires pour décrire le point M avec C comme origine du système polaire. On constate alors que $\vec{u}_\rho = -\vec{u}_N$ et que $\vec{u}_\phi = \vec{u}_T$ or on a montré précédemment (éq.(2.31)) que $d\vec{u}_\phi = -d\phi \vec{u}_\rho$ soit dans la base de Frenet (et en identifiant ϕ à α) que $d\vec{u}_T = d\alpha \vec{u}_N$.

En injectant ces résultats dans l'éq.(2.40), on en déduit que :

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{R} \vec{u}_N \quad (2.41)$$

qui avec l'éq.(2.39) donne pour l'accélération dans la base de Frenet :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N} \quad (2.42)$$

On vient de démontrer ce qu'on avait pressenti par un raisonnement géométrique à la fin de la section 2.3.2 : la variation de la norme de la vitesse est tangentielle alors que la variation de direction est selon la normale et est proportionnelle à l'accélération centripète.

Cependant, il est indispensable d'insister sur le fait que les égalités $\vec{u}_\rho = -\vec{u}_N$ et $\vec{u}_\phi = \vec{u}_T$, ne sont vraies que sur le cercle osculateur (ou pour un mouvement circulaire où $\dot{\rho} = 0$), dans le cas général elles sont fausses. Il n'y a pas de correspondance entre la base de Frenet et la base polaire. Si vous tenez à cette correspondance, il faut changer l'origine de la base polaire à chaque instant, en même temps que le point d'étude M ...

Nous utiliserons bien plus la base polaire que la base de Frenet dans la suite de ce cours.

2.3.8 Système de coordonnées cylindriques (3d)

L'extension tridimensionnelle la plus simple du système polaire est le système de coordonnées cylindriques, représenté sur la figure 2.19, qu'il est fortement conseillé d'utiliser dès que le système physique possède une symétrie du type cylindrique.

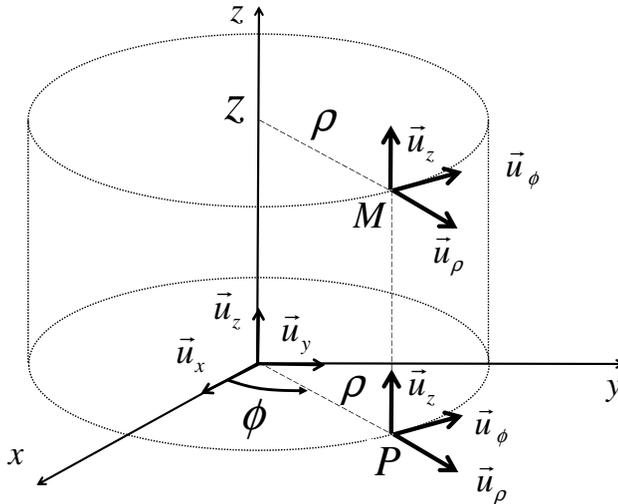


FIGURE 2.19 – Système de coordonnées cylindriques

On constate que la base circulaire est tout simplement décrite par des coordonnées polaires à laquelle on ajoute un axe vertical que l'on choisit comme axe z par convention. C'est donc un mélange des systèmes polaires et cartésiens, où les vecteurs unitaires sont tels que $\vec{u}_z = \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\phi$ (+ permutations circulaires). Sur les trois coordonnées nécessaires pour décrire tout point M de l'espace, deux sont des longueurs (ρ et z) et la dernière est associée à un angle (ϕ). P est le projeté de M dans le plan $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$, équivalent à (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , passant par O .

Un raisonnement géométrique permet de voir que le vecteur déplacement différentiel vaut :

$$\boxed{d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z} \quad (2.43)$$

La prise en compte d'une troisième dimension permet à présent de définir 3 surfaces élémentaires et un volume élémentaire (ou « élément de volume infinitésimal »), comme cela est représenté sur la figure 2.20.

À nouveau un raisonnement purement géométrique nous permet d'obtenir directement les expressions des surfaces élémentaires, qui correspondent aux produits deux à deux des composantes du vecteur déplacement différentiel $d\vec{r}$:

$$\text{variations de } \rho \text{ et } \phi : dS_1 = dS_{\rho\phi} = \rho d\rho d\phi \quad (2.44)$$

$$\text{variations de } \rho \text{ et } z : dS_2 = dS_{\rho z} = \rho d\rho dz \quad (2.45)$$

$$\text{variations de } z \text{ et } \phi : dS_3 = dS_{\phi z} = \rho d\phi dz \quad (2.46)$$

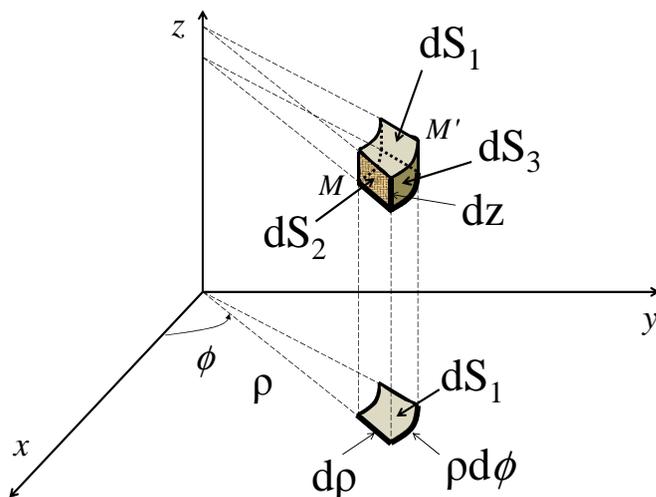


FIGURE 2.20 – Eléments de surface et de volume pour le système cylindrique

Le volume élémentaire s'obtient directement à partir de la figure 2.20 et correspond au produit des trois composantes de $d\vec{r}$:

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (2.47)$$

Tant que l'on manque de pratique on peut être surpris par ce raisonnement géométrique, et il est donc important de se convaincre de ces résultats par un calcul (algébrique) direct. À cette fin, nous vous conseillons de faire l'exercice de cours suivant :

C2.8 – Système de coordonnées cylindriques

Calculer dans le système de coordonnées cylindriques les quantités suivantes :

- 1) les domaines de variations de chaque coordonnée
- 2) l'expression de $\vec{r} = \vec{OM}$
- 3) $\|\vec{r}\|$
- 4) $d(M, Oz)$: la distance entre M et l'axe Oz
- 5) les relations entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes
- 6) les relations entre les différents vecteurs unitaires des systèmes de coordonnées cylindriques et cartésiennes
- 7) le déplacement différentiel $d\vec{r}$ avec un raisonnement géométrique
- 8) le déplacement différentiel élémentaire $d\vec{r}$ par le calcul
- 9) le volume élémentaire dV
- 10) les trois éléments de surface dS associés aux variations de deux des trois coordonnées.

Réponses

2.3.9 Système de coordonnées sphériques (3d)

Pour clore ce chapitre, nous mentionnons un dernier système de coordonnées tridimensionnel très souvent utilisé en physique. *Bien que nous l'utiliserons très peu dans ce cours, la connaissance du système sphérique est indispensable pour traiter les phénomènes gravitationnels ou électromagnétiques.*

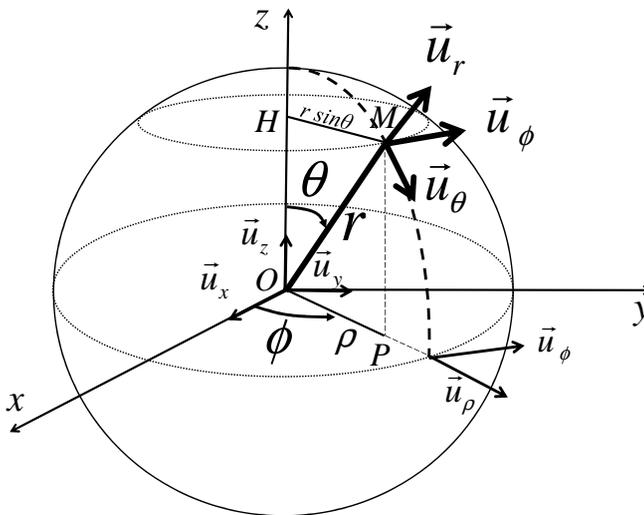


FIGURE 2.21 – Système de coordonnées sphériques

La figure 2.21 représente ce système de coordonnées, qu'il est fortement conseillé d'utiliser dès que le système physique possède une symétrie sphérique. Sur les trois coordonnées nécessaires pour décrire tout point M de l'espace, seul r est une longueur $r = \|\vec{r}\|$, les deux autres sont associées à des angles (θ et ϕ). On définit la coordonnée θ comme l'angle entre l'axe des z , pris comme origine des

angles θ , et le vecteur position \vec{r} : $\theta = (\vec{u}_z, \vec{u}_r)$

La troisième coordonnée ϕ est associée à P , le projeté de M dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_y) passant par O . Ce plan est équivalent au plan $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$ passant par O , où ρ et ϕ sont les coordonnées polaires usuelles qui sont ici associées aux coordonnées

polaires de P . Par définition $\phi = (\vec{u}_x, \vec{u}_\rho)$.

Le premier vecteur unitaire de la base sphérique est $\vec{u}_r = \vec{r}/r = \overrightarrow{OM}/\|\overrightarrow{OM}\|$. Le second vecteur unitaire de la base sphérique noté \vec{u}_θ est, par définition,

dans le plan (\mathcal{P}) contenant l'axe z et le point M . Ce plan contient \vec{r} , et est donc équivalent au plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ où $(\widehat{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta}) = \pi/2$ (ou si vous préférez $(\widehat{\vec{u}_z, \vec{u}_\theta}) = \theta + \pi/2$). On constate que le vecteur polaire \vec{u}_ρ appartient aussi à ce plan, et on a $(\widehat{\vec{u}_z, \vec{u}_\rho}) = \pi/2$, soit $(\widehat{\vec{u}_r, \vec{u}_\rho}) = \pi/2 - \theta$ ou $(\widehat{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta}) = \theta$. Pour mieux comprendre ces propriétés il est intéressant de voir la définition de \vec{u}_θ dans le plan \mathcal{P} représenté sur la figure 2.22a plus claire¹¹ que la perspective donnée par la figure 2.21. On notera que $\mathcal{P} = (OM, Oz) = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = (\vec{u}_z, \vec{u}_\rho)$.

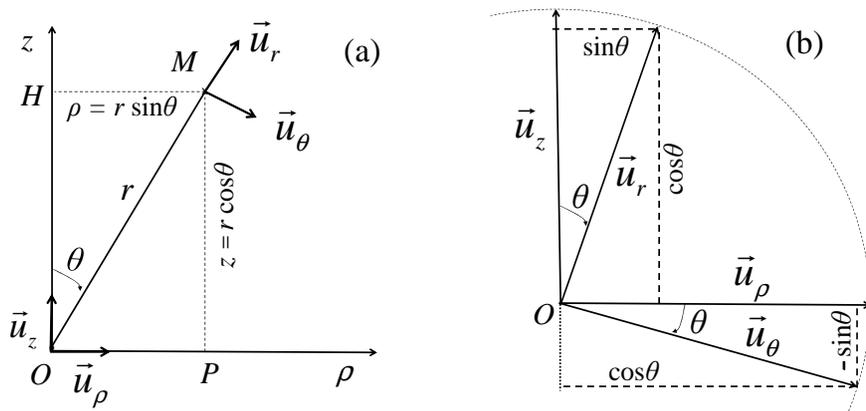


FIGURE 2.22 – Coupe dans le plan \mathcal{P} : (a) points $OMPH$; (b) vecteurs unitaires

Afin d'avoir une base orthonormée directe le troisième vecteur unitaire \vec{u}_ϕ est fixé : il est tel que $\vec{u}_\phi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ (+ permutations circulaires). Notre définition judicieuse de \vec{u}_θ permet d'identifier \vec{u}_ϕ avec le vecteur unitaire de la base polaire usuelle. On peut voir ceci comme une autre façon de définir \vec{u}_θ ...

C2.9 – Système de coordonnées sphériques

Calculer dans le système de coordonnées sphériques les quantités suivantes :

- 1) les domaines de variations de chaque coordonnée
- 2) l'expression de $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$
- 3) $\|\vec{r}\|$
- 4) $d(M, Oz)$: la distance entre M et l'axe Oz
- 5) les relations entre les différentes coordonnées
- 6) les relations entre vecteurs unitaires des différents systèmes de coordonnées
- 7) le déplacement différentiel $d\vec{r}$ avec un raisonnement géométrique
- 8) le déplacement différentiel élémentaire $d\vec{r}$ par le calcul
- 9) le volume élémentaire dV
- 10) les trois éléments de surface dS associés aux variations de deux des trois coordonnées
- 11) application mathématique : calculer la surface d'une sphère de rayon R

11. Dès que vous êtes confronté à une représentation 3d, et que vous avez du mal à voir le problème à cause de la perspective : faites des coupes (2d)!

Réponses

2.4 Principe de Fermat et lois de Descartes

En 1657 Pierre de Fermat énonce le principe qui porte son nom : « **La nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples** ».

Ce principe est à la base de l'optique géométrique et permet de démontrer les lois de Snell-Descartes. Formulé ainsi il n'est pas assez précis pour comprendre si la lumière prend le chemin le plus court en distance ou le plus rapide en temps. Nous montrerons dans l'exercice de cours ci-dessous, présentant une analogie mécanique, que **c'est le temps qui est minimisé**.

Le principe de Fermat a été généralisé à la mécanique par Maupertuis en 1744. Il prend sa forme définitive, connue sous le nom de « principe de moindre action », en 1756 avec Joseph Louis Lagrange qui en a fourni la formulation mathématique. Ce principe permet de démontrer les lois du mouvement de la mécanique, comme la seconde loi de Newton qui sera étudiée lors du chapitre 3 à l'aide du concept de force, ou comme l'équation d'Euler-Lagrange qui sera abordée succinctement lors du chapitre 4 à l'aide du concept d'énergie. L'action est cette quantité physique que nous avons entraperçu lors du premier chapitre qui est homogène à une énergie fois un temps ou à une masse fois une vitesse fois une distance ($[A] = ET = ML^2T^{-1}$). Nous n'étudierons pas l'action dans ce livre mais gardez en mémoire que ce concept est à la base de la plupart des théories de la physique moderne (mécanique quantique, relativité générale...).

• C2.10 – Réflexion, maître nageur et pingouin

Partie A : Loi de la réflexion

Soit deux points A et B situés à la distance x d'un miroir plan et séparés par une distance verticale L . Un rayon lumineux passant par A est réfléchi en un point M du miroir et passe ensuite par B . Soit v la vitesse de la lumière dans le milieu (quel qu'il soit). On appellera y la distance verticale séparant les

ordonnées de A et de M , i l'angle d'incidence du rayon lumineux, r l'angle de réflexion, ℓ_A la longueur parcourue par la lumière entre A et M , t_A le temps mis par la lumière pour parcourir ℓ_A , ℓ_B la longueur parcourue par la lumière entre M et B , t_B le temps mis par la lumière pour parcourir ℓ_B , ℓ la longueur totale parcourue entre A et B , et t le temps associé.

A1) Faire un dessin de la situation en indiquant toutes les données de l'énoncé. Exprimer ℓ , ℓ_A , ℓ_B , t , t_A , t_B , $\sin i$ et $\sin r$ en fonction de x , y , L et v .

A2) Démontrer que la minimisation de la distance parcourue entre A et B implique la loi de la réflexion.

A3) Démontrer que la minimisation du temps de parcours entre A et B implique aussi la loi de la réflexion. Conclure.

Partie B : Loi de la réfraction

Un maître nageur-sauveteur, noté A , est situé sur une plage à la distance x perpendiculairement au bord de l'eau. Sa vitesse de course sur le sable vaut v_s , et sa vitesse de nage dans l'eau vaut v_e . Bien-entendu $v_s > v_e$. Un baigneur, noté B , est situé dans l'eau à la distance x' perpendiculairement au bord de l'eau. Soit L la distance mesurée le long du bord de l'eau, que l'on suppose être rectiligne, entre les projections orthogonales sur le bord de l'eau du maître nageur (notée H) et du baigneur (notée H'). Le baigneur est en train de se noyer. Le maître nageur part à toutes jambes le sauver. Il rentre dans l'eau en un point M situé à la distance y du projeté orthogonal initial H . On considère que le baigneur en train de se noyer est immobile.

B1) Le maître nageur doit-il minimiser la distance parcourue et/ou le temps de parcours, s'il veut maximiser ses chances de sauver le baigneur ? Quelle forme géométrique doivent avoir les longueurs de parcours sur le sable (notée ℓ_s) et dans l'eau (notée ℓ_e) ? Que peut-on dire des temps de parcours du maître nageur sur le sable (noté t_s) et dans l'eau (noté t_e) ?

B2) Faire un dessin de la situation en faisant figurer toutes les données de l'énoncé et en faisant apparaître, d'une part, l'angle « d'incidence » i entre la trajectoire du maître nageur sur le sable et la normale du bord de l'eau, et d'autre part, l'angle « de réfraction » r entre la trajectoire du maître nageur dans l'eau et la normale du bord de l'eau.

B3) Exprimer ℓ_s , t_s et $\sin i$ en fonction de x , y , L et v_s . Exprimer ℓ_e , t_e et $\sin r$ en fonction de x , y , L et v_e . En déduire les expressions de la longueur totale parcourue ℓ et du temps de parcours total t .

B4) Si on minimise la longueur totale parcourue quelle est la forme de la trajectoire ? Démontrer le.

B5) Si on minimise le temps de parcours total quelle est la forme de la trajectoire et quelle est la loi de l'optique associée ? Démontrer le. Conclure sur la définition des indices optiques.

B6) Quelle trajectoire suivra naturellement un pingouin sur la banquise se précipitant dans l'eau pour aller pêcher un beau poisson ? Dessiner la situation.

Réponses de la partie A

2.5 Exercices

2.5.1 Cinématique 1d

E2.1 – Vitesses moyennes

Une particule se déplace sur l'axe des x de telle façon que sa position à chaque instant est donnée par $x(t) = 5t^2 + 1$, où x est en mètre et t en seconde.

- 1) Calculer la vitesse moyenne durant l'intervalle de temps 2 s et 3 s.
- 2) Calculer la vitesse moyenne durant l'intervalle de temps 2 s et 2,1 s.
- 3) Calculer la vitesse moyenne durant l'intervalle de temps 2 s et 2,001 s.
- 4) Calculer la vitesse moyenne durant l'intervalle de temps 2 s et 2,00001 s.
- 5) Calculer la vitesse instantanée à l'instant $t = 2s$ et comparer avec les vitesses moyennes obtenues précédemment.

E2.2 – Écho

Une oreille humaine distingue en moyenne deux sons s'ils sont séparés d'au moins 0.1 s. Vous êtes munis d'une corne de brume et voulez entendre son écho sur un mur. Calculer la distance minimale entre vous et le mur afin d'entendre l'écho, sachant que $c_s^{air} = 340 m.s^{-1}$.

E2.3 – Vitesses du son

Une conduite en Cuivre est remplie d'eau. On la frappe violemment puis on enregistre deux sons à $d = 100 m$ séparés par $\Delta t = 4,67 \cdot 10^{-2} s$. Calculer la vitesse du son dans le Cuivre sachant que $c_s^{eau} = 1500 m.s^{-1}$ et que la vitesse du son est en général plus rapide dans les solides que dans les liquides.

E2.4 – Accélération

La voiture de l'année du dernier salon automobile est capable à partir d'un départ arrêté, d'une part, d'atteindre les 100 km.h^{-1} en 6 s , et d'autre part, d'atteindre 1000 m en 25 s . Si on suppose l'accélération constante, calculer les accélérations associées aux deux cas de figures précédents. En comparant ces deux valeurs qu'en concluez-vous ?

E2.5 – Orage

Si on mesure le temps écoulé entre un éclair et le tonnerre, on obtient la distance en kilomètres nous séparant de l'orage en divisant par trois le nombre de secondes. Pourquoi ? A.N. : $c_s^{air} = 340 \text{ m.s}^{-1}$, $c = 3.10^5 \text{ km.s}^{-1}$

E2.6 – Équation horaire du mouvement I

Le vecteur position d'un point M est caractérisé par les équations paramétriques suivantes : $x(t) = 5t + 10$, $y(t) = 0$.

- 1) Donner les dimensions des constantes « 5 », « 10 » et « 0 », sachant que t est le temps et x , y sont des distances, exprimés dans le système international.
- 2) Caractériser la trajectoire.
- 3) Calculer \vec{v} , v , \vec{a} et a .
- 4) Quelle est la position de M à l'origine des temps ?
- 5) À quel instant M passe-t-il à la distance $x = 50 \text{ m}$?

E2.7 – Équation horaire du mouvement II

Une particule se déplace le long de l'axe des x avec l'équation horaire :

$$x(t) = t^2 - 4t + 3.$$

- 1) Préciser les intervalles de temps où la particule se déplace dans la direction des x positifs et celui où elle se déplace dans la direction des x négatifs. (Lisez bien la question posée ! Rationnez sur la vitesse).
- 2) Déterminer les intervalles où la particule est accélérée.

E2.8 – Équation horaire du mouvement III

Une particule se déplace le long de l'axe des x avec l'équation horaire :

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5.$$

- 1) Préciser les intervalles de temps où la particule se déplace dans la direction des x positifs et celui où elle se déplace dans la direction des x négatifs. (Lisez bien la question posée ! Rationnez sur la vitesse).
- 2) Déterminer les intervalles où la particule est accélérée.

E2.9 – Diagramme espace - temps

La figure 2.27 donne l'évolution temporelle des positions d'un objet.

Données : $t_1 = 1\text{h}30\text{min}$, $t_2 = 2\text{h}$, $t_3 = 2\text{h}40\text{min}$, $t_4 = 3\text{h}40\text{min}$, $t_5 = 4\text{h}35\text{min}$, $x_1 = 5,4 \text{ km} = x_2$ et $x_3 = 6,6 \text{ km} = x_4$.

- 1) À partir de la figure, représenter graphiquement l'évolution temporelle des vitesses de l'objet. À partir des valeurs numériques obtenues, à quoi peut correspondre cet objet ?
- 2) Déterminer les équations horaires des positions.
- 3) En déduire les équations horaires des vitesses. Vérifier vos résultats à l'aide de la question 1.

4) Que se passe-t-il au niveau des accélérations?

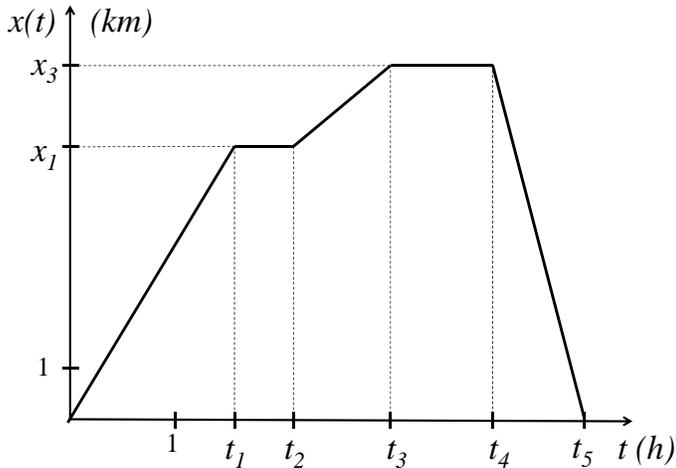


FIGURE 2.27 – Exercice E2.9

E2.10 – Chute verticale

On lâche une pierre du haut d'une falaise de hauteur h ($h = 30\text{ m}$). On suppose que seul le poids de la pierre intervient, ainsi l'accélération est constante, d'intensité g , verticale et orientée vers le bas. Pour l'ensemble des questions posées on donnera d'abord l'expression littérale, on vérifiera l'homogénéité (dimension) de la solution proposée puis on réalisera l'application numérique.

- 1) Calculer les équations horaires pour $a(t)$, $v(t)$ et $z(t)$.
- 2) Calculer la durée de la chute ainsi que la vitesse juste avant impact.
- 3) Mêmes questions en tenant compte de la hauteur de la personne lançant la pierre ($l = 1,80\text{ m}$).
- 4) Mêmes questions en sachant que la pierre est lancée vers le bas avec une vitesse $v_0 = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- 5) Mêmes questions en sachant que la pierre est lancée vers le haut avec une vitesse $v_0 = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- 6) Comparer ces divers résultats et en déduire le rôle des conditions initiales de vitesse et de hauteur sur la vitesse d'impact et la durée de chute.

E2.11 – Avion et vitesses moyennes

- 1) Un avion relie les villes A et B à vitesse v_1 pendant la moitié de la durée totale du voyage et à vitesse v_2 pendant l'autre moitié du voyage. Quelle est sa vitesse moyenne?
- 2) Un avion relie les villes A et B à vitesse v_1 sur la moitié de la distance totale du voyage et à vitesse v_2 sur l'autre moitié du voyage. Quelle est sa vitesse moyenne?

E2.12 – Profondeur d'un puits

Pour mesurer la profondeur d'un puits (h), on lâche une pierre, on chronomètre le temps qui s'écoule jusqu'au moment où on entend l'impact de la pierre au fond du puits (t). On supposera qu'on a lâché la pierre au même niveau que

notre oreille, et que seul le poids de la pierre intervient, ainsi l'accélération est constante, d'intensité g , verticale et orientée vers le bas.

- 1) Trouver la relation entre h , t , g et c_s la vitesse du son.
- 2) Sachant que $t = 2,06$ s (avec $g = 10$ m.s⁻² et $c_s = 340$ m.s⁻¹) calculer approximativement la profondeur du puits.

E2.13 – Équation horaire du mouvement IV

Le mouvement d'une particule est décrite par l'équation horaire :

$x(t) = x_0 \cos \omega t$. On choisit de prendre $x_0 > 0$ et $\omega > 0$.

- 1) Quelles sont les dimensions de x_0 et de ω ?
- 2) Calculer les équations horaires pour $a(t)$ et $v(t)$.
- 3) Déterminer les régions de l'espace et du temps où le mouvement est accéléré, et celles où il est retardé.
- 4) Trouver la relation reliant l'accélération à la position.

E2.14 – Course poursuite I

Une voiture V est arrêtée à un feu. Lorsqu'il passe au vert, elle accélère uniformément ($a_V = 3$ m.s⁻²) pendant 4 s puis conserve sa vitesse. Un cyclomoteur roule à vitesse constante ($v_C = 9$ m.s⁻¹) et dépasse la voiture au moment où le feu passe au vert, moment que l'on prendra comme origine des temps.

- 1) Pour $t < 4$ s, calculer les équations horaires des véhicules. En déduire si la voiture rattrape le cyclo.
- 2) Idem pour $t > 4$ s. Déterminer l'instant où la voiture dépasse le cyclo.
- 3) Reprendre l'exercice avec la condition initiale suivante :
 - a) Le cyclo passe le feu 4/3 s après le démarrage de la voiture.
 - b) Le cyclo grille le feu 1 s avant qu'il passe au vert.

E2.15 – Course poursuite II

Un cycliste roulant à vitesse constante $v > 0$ sur une route en ligne droite observe, à un instant donné, une voiture distante de d qui démarre devant lui avec une accélération constante $a > 0$.

- 1) Dans un référentiel \mathcal{R} lié à la route pour lequel le choix de l'origine des temps et de l'espace aura été précisée, écrire l'équation horaire du cycliste et de la voiture. Donner la nature de chacun des mouvements.
- 2) Si a et v sont fixées, pour quelles valeurs de d le cycliste rattrapera-t-il la voiture ?
- 3) Déterminer le temps t de la course poursuite en fonction de a , v et d .
- 4) Tracer les courbes $x(t)$ en fonction de t du cycliste et de la voiture. Discuter graphiquement les divers scénarios de la course poursuite dans le référentiel \mathcal{R} lié à la route, puis dans un référentiel \mathcal{R}^* lié au cycliste.
- 5) Application numérique. Calculer les dates de croisement pour $d = 10$ m, $a = 2$ m.s⁻² et $v = 36$ km.h⁻¹.

2.5.2 Cinématique 2d et 3d

E2.16 – Vitesses et accélérations le long d'une trajectoire

Les schémas de la figure 2.28 représentent des portions de trajectoires planes (T) d'un point matériel M , sur lesquelles on a porté les vecteurs vitesse \vec{V}

et accélération \vec{a} . Le sens positif choisi sur les trajectoires est indiqué par une flèche. Porter sur chaque schéma les vecteurs tangentiel \vec{u}_T et normal \vec{u}_N . Indiquer pour chaque schéma s'il correspond à une situation possible ou non; si non, justifier pourquoi; si oui, indiquer dans quel sens M se déplace, et la nature de son mouvement (accéléré ou décéléré).

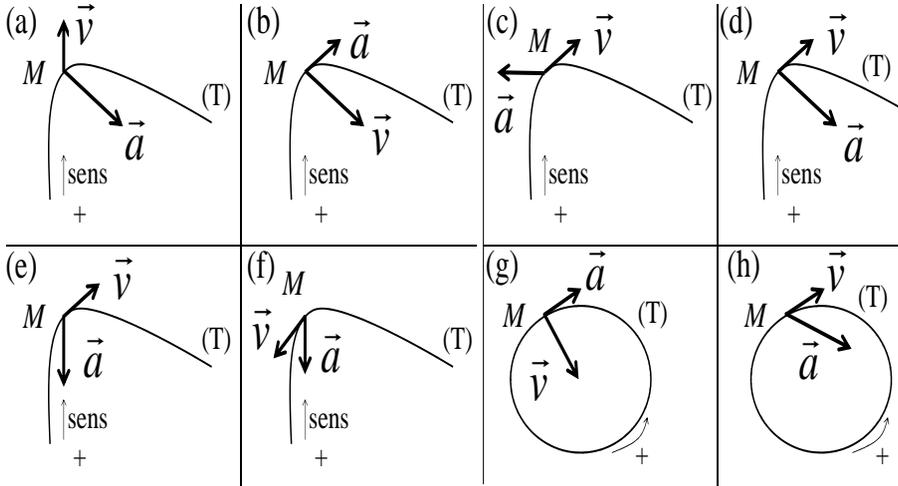


FIGURE 2.28 – Caractéristique du mouvement

E2.17 – Rappels d'analyse vectorielle

1) Soient le 3-vecteur $\vec{V} = (3, -4, 0)$ et \vec{W} le 3-vecteur de longueur $\|\vec{W}\| = 2$ dans le plan (x, y) et tel que l'angle (orienté) $(\vec{W}, Oy) = 30^\circ$.

a) Écrire le vecteur \vec{W} sous la forme $\vec{W} = (W_x, W_y, W_z)$.

b) Calculer $\|\vec{V}\|$.

c) Déterminer les vecteurs $\vec{S} = \vec{V} + \vec{W}$ et $\vec{D} = \vec{V} - \vec{W}$.

e) Le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{W}$.

f) L'angle entre \vec{V} et \vec{W} en degrés.

g) Calculer de deux manières $\|\vec{S}\|$ et $\|\vec{D}\|$.

h) Calculer l'angle entre \vec{S} et \vec{D} en degrés.

i) Calculer de deux manières différentes, le produit vectoriel $\vec{V} \wedge \vec{W}$ et sa norme.

j) Calculer l'angle entre \vec{V} et $\vec{V} \wedge \vec{W}$.

2) Soit \vec{V} un vecteur de longueur 4 cm, faisant un angle 60° avec l'axe des y .

a) Déterminer les composantes du vecteur \vec{V} .

b) Quelle angle fait ce vecteur avec le demi-axe des x négatifs?

c) Quelle angle fait ce vecteur avec le demi-axe des y négatifs?

d) Calculer les composantes des deux vecteurs perpendiculaires à \vec{V} , de même norme que \vec{V} et passant par l'origine du repère.

3) On considère deux vecteurs $\vec{A} = 1\vec{u}_x + \sqrt{3}\vec{u}_y$ et $\vec{B} = \sqrt{3}\vec{u}_x + \vec{u}_y$.

a) Quel est l'angle entre \vec{A} et \vec{B} ?

- b) Quels sont les angles entre l'axe des x (origine des angles) et les vecteurs \vec{A} et \vec{B} ? En déduire l'angle entre \vec{A} et \vec{B} .
- c) Quel est l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs \vec{A} et \vec{B} ?

E2.18 – Équation horaire du mouvement V

Le vecteur position d'un point M est caractérisé par les équations paramétriques suivantes : $x(t) = 2t$, $y(t) = 6t + 4$.

- 1) Donner les dimensions des constantes « 2 », « 6 » et « 4 », sachant que t est le temps et x , y sont des distances, exprimés dans le système international.
- 2) Caractériser (et dessiner) la trajectoire.
- 3) Calculer \vec{v} , v , \vec{a} et a . En déduire l'angle entre la vitesse et la direction horizontale. Cet angle change-t-il avec le temps?
- 4) Quelle est la position de M à l'origine des temps?
- 5) À quel instant M passe-t-il à la distance $x = 50\text{ m}$? Passe-t-il aux points A(6;20) et B(14;46)? Si oui, à quel(s) instant(s)?

E2.19 – Tir à l'arc

Un archer veut atteindre le centre d'une cible avec son arc capable de lancer des flèches à la vitesse $v_0 = 44,29\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Il décide de faire un angle de $\alpha = 15^\circ$ entre l'horizontale et la flèche. La cible est située à la distance $L = 100\text{ m}$. On suppose que le centre de la cible et le départ de la flèche sont à la même altitude. On suppose aussi que seul le poids de la flèche intervient, ainsi l'accélération est constante, d'intensité $g = 9,81\text{ m/s}^2$, verticale et orientée vers le bas. La flèche ira-t-elle droit au but? Démontrer votre réponse.

E2.20 – Équation horaire du mouvement VI

Le vecteur position d'un point M est caractérisé par les équations paramétriques suivantes : $x(t) = 2t - 1$, $y(t) = 4t^2 - 2t + 1/4$.

- 1) Donner les dimensions des constantes « 4 », « 2 » et « 1/4 » intervenant dans $y(t)$, sachant que t est le temps et y une distance, exprimés dans le système international.
- 2) Donner l'équation de la trajectoire et la dessiner.
- 3) Calculer \vec{v} , v , \vec{a} et a .
- 4) Quelle est la position de M à l'origine des temps?
- 5) À quel instant M passe-t-il à la distance $x = 50\text{ m}$? Passe-t-il aux points A(5;30) et B(-0.5;0)? Si oui, à quel(s) instant(s)?
- 6) Calculer la position, la vitesse et l'accélération au creux de la trajectoire.

E2.21 – Cascade à moto

Un cascadeur veut sauter en moto une gorge séparée par deux falaises. L'arrivée est située à une hauteur h ($h = 10\text{ m}$) au dessus du sommet du tremplin situé sur la falaise de départ. La distance entre les falaises vaut d ($d = 20\text{ m}$). On suppose que seul le poids du système « cascadeur + moto » intervient, ainsi l'accélération est constante, d'intensité g , verticale et orientée vers le bas. Enfin pour ne pas se planter, le cascadeur souhaite arriver avec une vitesse horizontale de l'autre coté. Calculer la vitesse initiale et l'angle du tremplin par rapport à l'horizontale pour que la cascade se déroule correctement. En déduire la vitesse d'arrivée.

E2.22 – Disque compact

Un disque compact de rayon 10 cm tourne à une vitesse de 1000 tr.min^{-1} dans son lecteur. Calculer la vitesse angulaire, la période et la fréquence de rotation. Donner les vitesses et les accélérations (normale, tangentielle et totale) d'un point du disque situé au bord, à la moitié du rayon et au centre. (*Répondre aux questions sans démontrer les formules*).

E2.23 – Équation horaire du mouvement VII

Le vecteur position d'un point M est caractérisé par les équations paramétriques suivantes : $x(t) = 2 \cos 5t$, $y(t) = 2 \sin 5t$.

- 1) Donner les dimensions des constantes « 2 » et « 5 », sachant que t est le temps et x, y sont des distances, exprimés dans le système international.
- 2) Donner les coordonnées polaires du point M .
- 3) Caractériser la trajectoire. Dessiner la trajectoire en indiquant le sens du mouvement.
- 4) Calculer \vec{v} , v , \vec{a} et a . Représenter \vec{v} et \vec{a} pour un point M quelconque.
- 5) Quelle est la position de M à l'origine des temps ?
- 6) Passe-t-il aux points $A(x = 3; y = 1)$ et $B(x = \sqrt{2}; y = \sqrt{2})$? Si oui, à quel(s) instant(s) ?
- 7) À partir des résultats précédents, calculer la période du mouvement.
- 8) Calculer la vitesse angulaire en rad.s^{-1} et en tr.min^{-1} . En déduire la période du mouvement.
- 9) Déterminer la relation entre position et accélération.
- 10) Donner l'expression du vecteur rotation associé à ce mouvement.

E2.24 – Trajectoire et coordonnées polaires

Un objet ponctuel M décrit dans le plan une courbe d'équations paramétriques : $\rho(t) = a \exp(-t/\tau)$ et $\phi = \omega t$ où (ρ, ϕ) sont ses coordonnées polaires, et a, τ et ω sont des constantes positives. On utilisera les coordonnées polaires dans cet exercice.

- 1) Quelles sont les dimensions des constantes a, τ et ω ?
- 2) Exprimez le vecteur position \vec{r} du point M .
- 3) Calculez l'expression de la vitesse \vec{v} du point M .
- 4) Montrez que l'angle entre \vec{v} et \vec{r} est constant au cours du temps.
- 5) Décrire la courbe décrite par le point M pour les données suivantes :
 - a) $\tau = 1\text{ s}$; $a = 5 \cdot 10^{-2}\text{ m}$; $\omega = 50\text{ rad/s}$.
 - b) $\tau = 1\text{ s}$; $a = 5 \cdot 10^{-2}\text{ m}$; $\omega = 5\text{ rad/s}$.
- 6) Question complémentaire : convertissez ω en tours par minute.

E2.25 – Parabole de sûreté

Un chasseur tire avec son fusil des balles sortant à la vitesse $v_0 = 100\text{ m.s}^{-1}$. On cherche à connaître la région de l'espace où les oiseaux ne craignent rien. On négligera les frottements, ainsi seul le poids du projectile intervient, l'accélération est alors constante, d'intensité g , verticale et orientée vers le bas. De plus, on supposera le système « chasseur + fusil » comme ponctuel et on définira le plan (x, z) comme le plan contenant la trajectoire. On fera l'approximation grossière que l'oiseau ne bouge pas pendant toute la durée du mouvement de la balle. Soit $M(x, z)$ la position d'un oiseau à l'instant t .

- 1) Le chasseur tire verticalement. Calculer la hauteur maximale atteinte. Quelle condition doit satisfaire M pour être sur une trajectoire possible ?
- 2) Soit α l'angle entre le canon du fusil et l'horizontale. Quelle condition doit satisfaire M pour être sur une trajectoire possible ?
- 3) Lorsque M est fixé, α est la seule variable du problème. Pourquoi ? Exprimer alors l'équation précédente en fonction de $\tan \alpha$.
- 4) En déduire, dans quelle zone du ciel, l'oiseau ne peut pas être touché par la balle. Généraliser à tout l'espace.

E2.26 – Trajectoire et coordonnées cylindriques

Un point M décrit une hélice circulaire d'axe Oz . Ses équations horaires sont $x = R \cos \phi(t)$, $y = R \sin \phi(t)$ et $z = h\phi(t)$. R est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et ϕ est l'angle que fait avec Ox la projection $\overrightarrow{OM'}$ de \overrightarrow{OM} sur Oxy .

- 1) Donner en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération.
- 2) Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan Oxy un angle constant.
- 3) Si le mouvement de rotation est uniforme, montrer que le vecteur accélération est dirigé selon l'axe du cylindre et est parallèle au plan Oxy .

E2.27 – Rotation de la Terre

Calculer la vitesse v et l'accélération a d'un point à la surface de la Terre à la latitude α , en fonction du rayon de la Terre R_T ($R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$) et de sa période T :

- 1) Dans le repère géocentrique (centre du repère = centre de la Terre).
- 2) Dans le repère terrestre (centre du repère = un point à la surface de la Terre).
- 3) Applications numériques pour un point de l'équateur, aux pôles et à Marseille ($\alpha = 43^\circ$). On comparera ces nombres aux valeurs de v et a auxquelles nous sommes confrontés tous les jours en tant que personne.

E2.28 – Équation horaire du mouvement VIII

Une particule se déplace avec une accélération donnée par

$\vec{a}(t) = e^{-t}\vec{u}_x + 5 \sin(t)\vec{u}_y - 3 \cos(t)\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes. À $t = 0$, la particule est située en $(1, 0, 3)$, sa vitesse est alors $(1, 2, -1)$. Déterminer la vitesse et la position de la particule quel que soit t .

E2.29 – Équation horaire du mouvement IX

Une particule est animée d'un mouvement d'accélération

$$\vec{a}(t) = a(\omega t \vec{u}_x + \cos \omega t \vec{u}_y + e^{-\omega t} \vec{u}_z).$$

- 1) Précisez les dimensions physiques de a et ω .
- 2) Si au temps $t = 0$ la particule est située en $\vec{r}_0 = \vec{0}$ et sa vitesse est $\vec{v}_0 = -\frac{a}{\omega}(-2\vec{u}_x + \vec{u}_y + 2\vec{u}_z)$, trouver la vitesse $\vec{v}(t)$ et la position $\vec{r}(t)$ de la particule à chaque instant.

Chapitre 3

Dynamique

Forces et lois de Newton

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

- Description et propriétés générales des forces :
 - * forces à distance : interactions fondamentales, poids, Coulomb, Lorentz ;
 - * forces de contact : réaction, tension, élastique (ressort), frottements solide-solide, frottements visqueux, poussée d'Archimède.

- Lois de Newton : principe de l'inertie, principe fondamental de la dynamique classique, principe de l'action - réaction.

- Référentiels d'inertie (galiléen), terrestre (laboratoire), géocentrique, héliocentrique.

- Comprendre le rôle joué par une équation différentielle dans l'étude de l'évolution temporelle d'un système physique.

• Compétences

- Savoir appliquer le principe fondamentale de la dynamique classique à des problèmes simples (exercices de cours C3.1 à C3.4).

- Maîtrise des outils mathématiques :
 - * projection de vecteurs,
 - * résolution d'une équation différentielle du premier ordre,
 - * développements limités des fonctions usuelles au premier et second ordre,
 - * équation de la tangente en un point d'une courbe quelconque.

• Lecture conseillée

Notions de physique	Young et Freedman	Hecht
Dynamique/Lois de Newton	ch.4 p104-133	ch.4 p115-152
Applications des lois de Newton	ch.5 p134-175	ch.5 p153-192

Introduction

La cinématique s'intéresse à la description du mouvement. À présent, nous allons étudier la cause des mouvements. En mécanique classique, la dynamique d'un système physique est directement reliée à la notion de « force ». Si le système est soumis à une influence extérieure, on dit qu'une force agit sur lui. La quantité physique cruciale lors d'une description classique d'un phénomène est la somme totale des forces s'appliquant sur notre objet d'étude, peu importe ce qu'il se passe autour de l'objet.

En fait chaque force a une cause. Une description plus complète des phénomènes (indispensable dans un cadre quantique et/ou relativiste) doit prendre en compte le système dans sa globalité, et il est plus commode alors de remplacer la notion de force par celle d'« interaction ». Cet aspect des choses sera abordé succinctement lors de l'étude de la troisième loi de Newton, mais ces nuances ne vous seront pas utiles dans ce cours.

Les forces sont reliées aux variables cinématiques et, en particulier, à l'accélération du système étudié à travers une relation « simple » faisant intervenir un paramètre fondamental : la masse (« inertielle »). Cette relation s'appelle « principe fondamental de la dynamique classique » (d'acronyme PFDC) et correspond à la seconde loi de Newton.

Dans ce chapitre nous allons étudier les différentes forces existantes dans la nature (section 3.1) et les lois de Newton (section 3.2), et nous verrons que cela nous permet de décrire une multitude de phénomènes.

3.1 Forces

Nous allons introduire un grand nombre de forces qui semblent en apparence très différentes les unes des autres. En fait, la physique moderne arrive à interpréter la quasi-totalité des phénomènes physiques par l'introduction de seulement quatre interactions fondamentales (gravitation, électromagnétisme, nucléaire forte, nucléaire faible). Cependant, la plupart des forces macroscopiques que nous allons définir résultent des interactions électromagnétiques entre un très grand nombre d'atomes. C'est la complexité macroscopique qui nous pousse à introduire de nombreuses forces de formes différentes. Ces forces macroscopiques sont approximatives, ce sont des relations phénoménologiques.

On classe les forces en fonction de leur mode d'action. Certaines agissent à distance (interactions fondamentales et leurs forces dérivées comme le poids et les forces électriques et magnétiques) alors que d'autres nécessitent un contact direct. Ces dernières se divisent en deux grandes catégories : les forces de contact « normales » qui représentent une réaction de la matière à une action physique de l'objet d'étude, et les forces de contact « tangentielles » qui sont associées aux frottements dus au déplacement du système physique dans son milieu (qui n'est pas vide).

Les forces sont représentées par des vecteurs car elles possèdent une information directionnelle. Elles sont directement proportionnelles à l'accélération qui est un vecteur.

Les forces obéissent au « principe de superposition » stipulant que l'on ne

peut pas distinguer l'action de multiples forces (\vec{F}_i) de l'action d'une unique force égale à la somme vectorielle de toutes ces forces ($\vec{F}_T = \sum_i \vec{F}_i$).

L'unité d'une force est le « newton » de symbole N et la dimension d'une force est $[F] = MLT^{-2}$ (ne pas l'apprendre par cœur, il faut être capable de la retrouver à partir de la seconde loi de Newton donnée par l'éq.(3.14)).

3.1.1 Interactions fondamentales et forces à distance

• Gravitation et Poids

Tout objet possède une masse car il est constitué d'atomes en possédant une. On constate que les masses s'attirent. On associe alors une force à cette attraction mutuelle, appelée « force gravitationnelle ». Soit m la masse de notre particule test (système physique étudié) soumise à une force gravitationnelle \vec{F}_G causée par la présence d'une masse m' située à la distance r . La situation est représentée sur la figure 3.1. La force gravitationnelle a alors pour expression :

$$\boxed{\vec{F}_G = -\frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}_r \quad (\vec{u}_r = \vec{r}/\|\vec{r}\|)} \quad (3.1)$$

G est la « constante gravitationnelle » de Newton, constante fondamentale caractérisant l'intensité de la force de gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$. Par convention, l'origine du repère (notée O) est prise sur la masse m' et le point d'étude est associé au point M de masse m .

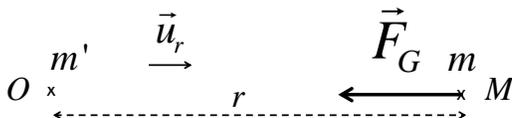


FIGURE 3.1 – Force gravitationnelle sur la masse m due à la masse m' .

La force gravitationnelle est à **longue portée** (elle peut agir sur de très grandes distances), **centrale** c-à-d de la forme $\boxed{\vec{F} = F(r)\vec{u}_r}$, et **conservative** (propriété liée à la conservation de l'énergie étudiée lors du prochain chapitre).

L'interaction gravitationnelle est responsable du phénomène de pesanteur sur Terre (« le poids », voir détails ci-dessous) mais aussi du mouvement des astres cosmiques (de la lune autour de la terre, de la terre autour du soleil, du soleil au sein de la voie lactée, de notre galaxie au sein de l'amas local, des galaxies au sein des filaments cosmiques). Son action est dite « universelle » et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux masses.

Cependant, lorsqu'une des masses est beaucoup plus importante que l'autre ($m' \gg m$) et que la taille de cette masse (R) est bien plus grande que la taille caractéristique (h) du mouvement du système physique étudié ($h \ll R \Rightarrow r = R + h \simeq R$), on peut réaliser une approximation fort pratique : supposer que l'attraction gravitationnelle est constante. On parle alors de « force de pesanteur » ou de « poids ». La situation est représentée sur la figure 3.2.

Le poids a pour expression :
$$\boxed{\vec{P} = m \vec{g}}$$
 (3.2)

\vec{g} est l'accélération de la pesanteur, vecteur constant caractéristique de l'astre sur lequel on se trouve, toujours orientée vers le bas ou plus précisément vers le centre de l'astre.

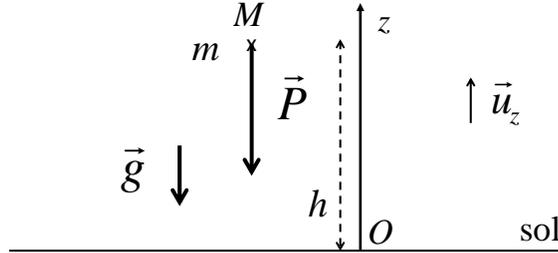


FIGURE 3.2 – Poids à la surface d'un astre d'un objet de masse m situé en M

Sur Terre, \vec{g} est orienté vers le centre de la Terre et son intensité vaut $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ (à l'équateur). L'approximation est valable à moins de 1% près tant que l'altitude de l'objet d'étude est inférieure à 32 km. On comprend donc que cette approximation est parfaitement valable pour l'ensemble des phénomènes de la vie de tous les jours. Il nous faudra rejeter cette hypothèse uniquement lorsque nous étudierons la mise en orbite de satellites ou le mouvement des astres (chapitre 8).

Nous verrons aussi lors du chapitre 9 que la rotation de la Terre sur elle-même implique que l'accélération de la pesanteur \vec{g} n'est pas exactement orientée vers le centre de la Terre (sauf aux pôles), cependant cette correction est de quelques ‰ seulement.

• C3.1 – Gravitation et Poids

- 1) Calculer la dimension de la constante gravitationnelle G .
 - 2) À partir des définitions de la force de gravitation et du poids, calculer l'expression de l'accélération de la pesanteur g à la surface de la Terre.
 - 3) Le poids est supposé être indépendant de l'altitude. Pour quelle altitude commet-on une erreur relative de 1% sur g ?
- Données : $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et $R_T = 6378 \text{ km}$ (à l'équateur).

Réponses

- **Électromagnétisme et forces électriques et magnétiques**

La plupart des particules élémentaires, et en particulier celles qui constituent les atomes, possèdent une charge électrique. La dynamique des charges électriques est décrite par la branche de la physique qu'on appelle « électromagnétisme » (au sens large), et englobe plusieurs classes de phénomènes en apparence très différents. De manière très naïve on peut dire que les phénomènes électriques sont liés aux propriétés des charges électriques elles-mêmes, les phénomènes magnétiques sont liés aux déplacements des charges électriques, et que les ondes électromagnétiques comme les phénomènes lumineux sont liés à l'échange d'énergie, à l'échange d'informations, entre particules électriques.

Selon la nature des phénomènes étudiés, microscopique ou macroscopique, au repos ou en mouvement, ondulatoire ou corpusculaire, les physiciens ont créé des domaines distincts de la physique : électrostatique, magnétostatique, électrocinétique, électronique, électrotechnique, électromagnétisme, électrodynamique quantique, optique géométrique, optique physique. Vous apprendrez les nuances entre tout ces domaines au fur et à mesure de vos études supérieures. Ici nous nous concentrons sur les phénomènes les plus simples qui peuvent être décrits à l'aide de forces.

Au niveau microscopique, la manifestation la plus simple de l'influence mutuelle des charges électriques est la force électrique (ou plus précisément « électrostatique ») de Coulomb stipulant que des charges de même signe se repoussent et que des charges de signes opposés s'attirent. Soit q la charge électrique de la particule test que l'on étudie. Soit q' la charge d'une autre particule, dite particule source, qui est à l'origine de la force s'exerçant sur q . Par simplicité, choisissons $q' > 0$. La force électrique s'appliquant sur la charge q est représentée sur la figure 3.3a, et est donnée par **la loi de Coulomb** :

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.4)$$

ϵ_0 est la permittivité du vide¹, et on peut voir le terme $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ comme la constante caractérisant l'intensité de la force électrique : $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{C}^{-2}$. Vu la complexité de cette unité on écrit le plus souvent $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$ avec *SI* signifiant « Système International ». Cette constante est pour l'interaction électromagnétique l'équivalent de G pour l'interaction gravitationnelle.

Par convention, l'origine du repère (notée O) est prise sur la charge q' et le point d'étude est associé au point M de charge q . Comme la force gravitationnelle, cette force électrique est à longue portée, centrale et conservative.

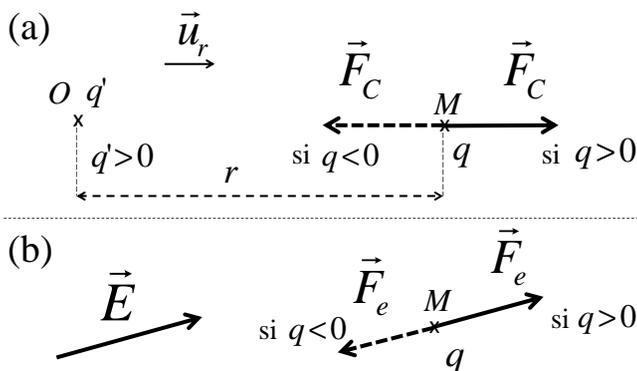


FIGURE 3.3 – (a) Force électrique sur la charge q créée par la source q' ; (b) Force électrique sur la charge q créée par un champ électrique \vec{E}

1. Dans un milieu constitué d'atomes cette constante change.

À présent, si q est soumise à l'influence non-plus d'une unique charge source q' mais d'un ensemble de charges sources, q est soumise à la force totale résultant de cet ensemble de charges. Cette force totale est la somme des forces exercées par chacune des charges individuelles. Cette propriété, nommée « principe de superposition », résulte de la forme vectorielle de la seconde loi de Newton que nous verrons dans la section suivante.

On introduit la notion de « champ électrique » qui peut être vu comme la capacité à interagir de la charge q' ou de l'ensemble de charges sources. Par convention, on note \vec{E} le champ électrique, qui est défini dans tout l'espace à chaque instant². La charge source q' , ou l'ensemble de charges sources (q'_i) créent donc les champs électriques suivants :

$$q' : \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2(t)} \vec{u}_r(t) \quad \text{ou} \quad q'_i : \vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_i}{r_i^2(t)} \vec{u}_{r_i}(t)$$

Ces formules ne nous seront pas utiles cette année, mais vous en aurez besoin dès l'an prochain. Ce qu'il faut retenir ici, c'est la **notion de champ électrique**, et ainsi le fait que l'on peut donner une forme plus simple à la loi de Coulomb, qui reste vraie au niveau microscopique et qui nous permet de passer sous silence l'origine du champ électrique (c'est à dire de la distribution des sources) : **la force électrique** qui s'applique sur une charge électrique q soumise à un champ électrique \vec{E} (et quelle que soit son origine...) est de la forme (voir figure 3.3b) :

$$\boxed{\vec{F}_e = q \vec{E}} \quad (3.5)$$

Une autre grandeur fondamentale de l'électromagnétisme est le champ magnétique \vec{B} qui peut être créé soit par un aimant soit par le mouvement d'une charge électrique (q' animée d'une vitesse \vec{v}'). Si la particule test de charge q possède une vitesse \vec{v} et baigne dans un champ magnétique, alors une nouvelle force va se manifester : **la force magnétique**, dont l'effet primaire va être de faire tourner la charge q autour de la direction du champ magnétique (comme illustré sur la figure 3.4, et dont l'expression mathématique est la suivante :

$$\boxed{\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}} \quad (3.6)$$

La force de Lorentz est la somme des deux forces $\boxed{\vec{F}_{em} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}}$

Un courant électrique (noté I) représente le déplacement (le long d'un fil) d'un ensemble de charge électrique. On peut associer à ce mouvement un vecteur déplacement que l'on note $\vec{\ell}$. Si ce courant électrique baigne dans un champ magnétique, on assiste alors à la manifestation macroscopique de la force magnétique de Lorentz vue précédemment, que l'on appelle force magnétique macroscopique ou **force de Laplace** et qui a l'expression suivante :

$$\boxed{\vec{F}_L = I \vec{\ell} \wedge \vec{B}} \quad (3.7)$$

². C'est la véritable définition d'un « champ » : $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$ est un champ scalaire, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ est un champ vectoriel.

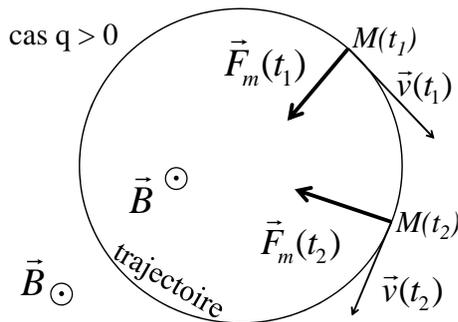


FIGURE 3.4 – Forces magnétiques sur la charge q créée par un champ magnétique \vec{B} aux instants t_1 et t_2 .

Cette force est à la base du phénomène d'induction électromagnétique qui sert à transformer tout type d'énergie en énergie électrique (générateur), ou inversement (moteur). Vous l'étudierez dans un cours d'électromagnétisme.

• Interaction nucléaire forte

Le noyau des atomes est constitué de protons et de neutrons, mais les seules forces gravitationnelles et électromagnétiques ne nous permettent pas de comprendre la cohésion d'un tel noyau. En effet, les seules charges électriques du noyau sont positives, donc du même signe, ce qui correspond à des forces répulsives. La gravitation est attractive, mais on a vu lors du chapitre 1 qu'elle est complètement négligeable dans le monde microscopique ($F_C/F_G \simeq 10^{36}$ dans les noyaux), elle ne peut donc pas vaincre la répulsion coulombienne (répulsion électrique). On est donc obligé d'introduire l'existence d'une nouvelle force, dite « nucléaire forte », pour comprendre la cohésion des noyaux des atomes.

Cette force est à courte portée, c'est à dire totalement négligeable à « grande » distance. Plus précisément, l'interaction forte est dominante au niveau du noyau des atomes ($10^{-15}m$) mais négligeable au niveau des atomes ($10^{-10}m$, ce qui n'est pas si « grand » que ça!).

La description de cette force, restreinte au monde microscopique, est par nature quantique où le concept de force perd son sens. Si on tient absolument à avoir une expression pour la force nucléaire forte, il faut ajouter à la forme usuelle (en \vec{u}_r/r^2) un terme de suppression dit « de Yukawa » tel que :

$$\vec{F}_{IF} \approx \frac{\alpha_S}{r^2} e^{-m_\pi r c/h} \vec{u}_r \quad (3.8)$$

où α_S est une constante qui caractérise l'intensité de l'interaction forte, m_π est la masse d'une particule élémentaire appelée « pion » ($m_\pi \approx 140 \text{ MeV}/c^2$), c la vitesse limite relativiste et h la constante de Planck caractéristique des phénomènes quantiques. Cependant peu d'applications utilisent l'expression de cette force. Afin d'étudier les phénomènes nucléaires il faut utiliser des concepts basés sur la notion d'énergie qui sera le sujet du chapitre suivant, ainsi que sur les propriétés relativistes (équivalence masse - énergie) et quantiques (effet tunnel) de la matière.

• Interaction nucléaire faible

La dernière interaction fondamentale est l'interaction nucléaire faible, introduite afin d'expliquer les phénomènes des désintégrations radioactives. Il apparaît que la plupart des particules mutent spontanément en d'autres particules de masses plus faibles. Par exemple, le neutron libre se transforme en un proton plus un électron plus un anti-neutrino électronique³ avec une durée de vie caractéristique de 15 minutes.

Une description en terme de force utilise une expression similaire à l'éq.(3.8) en remplaçant la masse du pion par la masse d'une particule appelée « boson W » ($m_W \approx 80 \text{ GeV}/c^2$). De nouveau une telle description est limitée car la mécanique classique ne peut pas rendre compte de tels phénomènes.

3.1.2 Forces de contact normales

• Force de réaction des corps solides

Lorsqu'on pose un objet sur la surface d'un corps solide (table, sol), en général, cet objet ne s'y enfonce pas. Cette propriété des corps solides est liée à la structure solide de la matière (des matériaux). Au niveau microscopique cette résistance vient des liaisons entre les atomes du corps solide. Au niveau macroscopique, ce qui nous intéresse ici, on modélise cette propriété par une force de « réaction » (notée \vec{N}) qui se trouve être toujours normale (perpendiculaire) à la surface de contact comme cela est représenté sur les figures 3.5a et 3.5b. L'intensité de la force de réaction est liée au poids de l'objet.

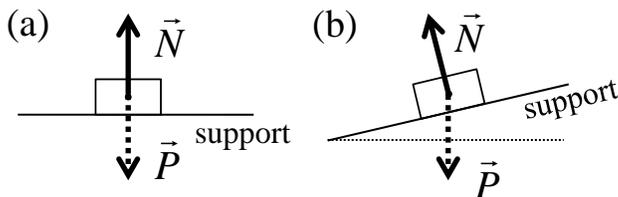


FIGURE 3.5 – Forces de contact – Réaction normale : (a) support horizontal ; (b) support incliné

• Force de tension

Lorsqu'un objet est suspendu à un fil (ou un câble), il est soumis à son propre poids et à une force exercée par le fil qu'on appelle « tension du fil », notée \vec{T} (voir la figure 3.6) et qui est toujours dans la direction du fil. Lorsque l'objet est au repos, poids et tension s'équilibrent : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$. L'intensité de la force de tension est, en général, liée au poids de l'objet.

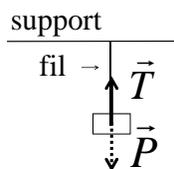


FIGURE 3.6 - Tension d'un fil

3. Les neutrinos, et leurs anti-particules les anti-neutrinos, sont des particules extrêmement légères, sans charge électrique, que l'on détecte grâce à leurs interactions faibles. Leur seule manifestation macroscopique spectaculaire intervient dans les explosions d'étoiles : les supernovas !

• Force de rappel élastique

Les forces élastiques sont modélisées par des ressorts, mais on retrouve de telles propriétés dans de nombreux matériaux (dits élastiques), et au niveau microscopique, dans les liaisons entre atomes et molécules. Lorsqu'on comprime ou lorsqu'on allonge un ressort nous constatons la présence d'une « force de rappel » qui tend à vouloir ramener le ressort dans sa position d'équilibre.

Choisissons un axe x ayant pour origine le point d'accroche du ressort. Soit L_0 la longueur à vide du ressort⁴ et soit x la position d'un objet accroché au bout du ressort. Les figures 3.6a,b,c illustrent les différentes situations.

L'intensité de la force de rappel est modélisée au premier ordre par l'expression suivante : $\|\vec{F}\| = k |x - L_0| = k |\Delta x|$ où k est appelée « constante de raideur du ressort », et $|\Delta x|$ est l'élongation. Vectoriellement, on a :

$$\boxed{\vec{F} = -k(x - L_0) \vec{u}_x = -k \Delta x \vec{u}_x = -k x' \vec{u}_{x'}} \quad (3.9)$$

Souvent, pour simplifier cette expression mathématique et les calculs qui en découlent, on choisit l'origine de l'axe des x sur la position de la longueur à vide (axe x' sur la figure 3.6c). La force prend alors la forme remarquable $\vec{F} = -k \vec{r}'$.

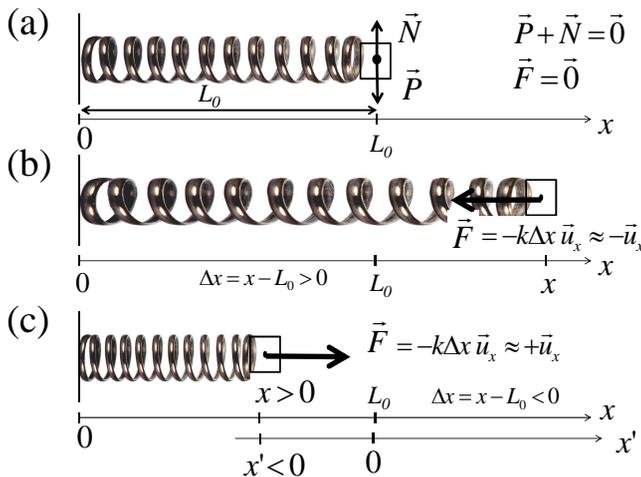


FIGURE 3.6 – Forces de rappel élastique : (a) ressort à vide ; (b) force de rappel en extension ; (c) force de rappel en compression

3.1.3 Forces de contact tangentielles

• Frottements solide - solide

Lorsqu'on tire un objet en contact avec le sol, il faut exercer une certaine force de traction \vec{F} afin de réussir à le mettre en mouvement. En effet, il

4. La nuance entre longueur à vide et position d'équilibre sera vue dans le chapitre 5.

faut lutter contre une force \vec{f} appelée « frottements solide - solide » (ou plus simplement frottements solides), qui trouve son origine dans la rugosité du sol (ou du support). Ainsi, dans une telle situation, la réaction du support notée \vec{R} possède deux composantes : une composante normale \vec{N} et une composante associée aux frottements solides \vec{f} . Ceci est représenté sur la figure 3.7a.

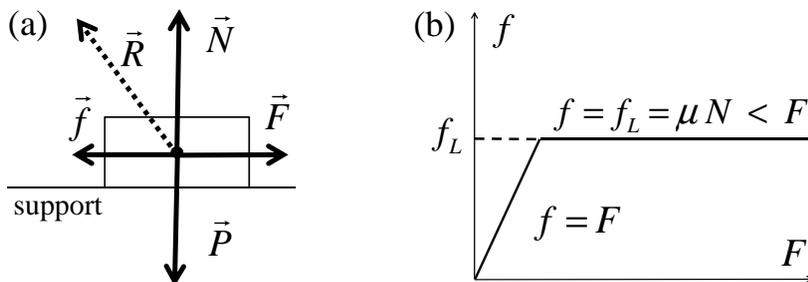


FIGURE 3.7 – Frottements solides : (a) bilan des forces ; (b) variation de l'intensité de la force

Tout comme la réaction normale \vec{N} , la force de frottement solide \vec{f} dépend des autres forces qui s'appliquent sur l'objet. Néanmoins, contrairement à la réaction normale, l'intensité de la force de frottement solide $f = \|\vec{f}\|$ ne peut varier que dans une certaine gamme allant de 0 à une force limite f_L . Cette force limite est proportionnelle à l'intensité de la force normale $N = \|\vec{N}\|$ (il est plus facile de pousser un carton vide qu'un carton rempli) avec un « **coefficient de friction** », noté μ (en général, $0 < \mu < 1$), qui dépend du contact entre les objets (il est plus facile de pousser un carton sur un parquet ciré que sur du béton). On a ainsi :

$$\mu = \frac{f_L}{N} \quad \text{et} \quad f \leq f_L \quad (3.10)$$

Cette force de frottement solide est assez subtile et on va décomposer le mouvement en plusieurs phases pour bien la comprendre. Imaginons que l'on veuille déplacer un gros paquet posé sur le sol (horizontal) :

→ Avant d'exercer une quelconque force de traction ($\vec{F} = \vec{0}$), le paquet est au repos, la réaction normale compense le poids ($\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$). Il n'y a pas de frottement solide ($\vec{f} = \vec{0}$).

→ On commence à exercer une force de traction, assez faible, et comme le paquet est lourd il ne bouge pas : F n'est pas assez puissante pour vaincre les frottements solides. Le paquet est donc toujours au repos comme illustré sur la figure 3.7a, poids et réaction normale se compensent sur l'axe vertical, traction et frottements se compensent sur l'axe horizontal. Cependant on ne peut pas dire que $f > F$ sinon le paquet devrait se déplacer dans le sens de \vec{f} , ce qui est absurde. En fait, la force de frottement solide s'ajuste pour compenser exactement la traction : $f = F$.

→ Si on augmente la force de traction, il arrive un moment où le paquet se met en mouvement, la traction vient de vaincre les frottements et on a alors $F > f_L = \mu N$. Afin de visualiser ce phénomène, la figure 3.7b donne la variation de f en fonction de F pour la situation que l'on vient de décrire.

Remarques :

- Dans l'exemple précédent on constate que $\|\vec{N}\| = \|\vec{P}\|$, mais il faut réaliser que c'est un cas particulier valable uniquement sur un support horizontal. Sur un plan incliné la situation change et il faut prendre en compte la pente du support.

- La réalité est un peu plus complexe : il existe deux coefficients de frottements solide-solide. Le coefficient de frottement statique (μ_S) est celui que l'on vient de décrire, il intervient avant que l'objet ne se mette en mouvement. Mais dès que l'objet se déplace, le contact entre les deux surfaces change et il faut introduire un nouveau coefficient de frottements, dit « dynamique » (μ_D), qui est plus faible que le précédent ($\mu_D < \mu_S$). Cela vous est peut-être déjà arrivé lors du déplacement d'un objet très lourd qu'il vous emporte légèrement juste après l'avoir mis en mouvement...

• Frottements dans un fluide (frottements visqueux)

Lorsqu'un objet se déplace avec une vitesse \vec{v} dans un fluide (un liquide ou un gaz supposé être au repos), il va subir des forces de frottements. **Si la vitesse est faible**, la force de frottements est proportionnelle à la vitesse mais de sens opposé :

$$\boxed{\vec{f} = -\eta \vec{v} = -\eta v \vec{u}_T} \quad (3.11)$$

où $\eta > 0$ est le coefficient de frottement, proportionnel à la viscosité du fluide et à la taille caractéristique de l'objet.

Si la vitesse est importante, la loi change. La force de frottements est opposée à la vitesse mais proportionnelle au carré de sa norme :

$$\boxed{\vec{f} = -b v^2 \vec{u}_T \quad (\vec{u}_T = \vec{v}/\|\vec{v}\| = \vec{u}_v)} \quad (3.12)$$

où le coefficient de frottement $b > 0$, est proportionnel à la surface caractéristique de l'objet perpendiculaire au sens de déplacement et indépendant de la viscosité du fluide.

• Poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide (au repos), subit une force verticale, dirigée vers le haut et opposée au poids du volume de fluide déplacé. La poussée d'Archimède a pour expression :

$$\boxed{\vec{F}_A = -m_f \vec{g} = -\rho_f V_{corps} \vec{g}} \quad (3.13)$$

où m_f est la masse de fluide déplacée qui est égale à la densité du fluide ρ_f fois le volume du corps V_{corps} (pour les corps de densité uniforme). En général, la poussée d'Archimède est négligeable dans les gaz (*sinon les parachutistes seraient bien tristes !*) mais capitale dans les liquides (*et nous aussi quand nous allons prendre un bain !*).

Insistons sur le fait que toutes ces expressions des forces macroscopiques de contact ne sont que des lois phénoménologiques approximatives : la résistance des matériaux peut être vaincue, un poids trop lourd sur une table la casse, idem pour un fil, un ressort trop allongé ne revient plus à sa position d'équilibre, les coefficients de frottements doivent être mesurés au cas par cas et les valeurs obtenues ne sont valables que dans un domaine de conditions très limitées...

3.2 Lois de Newton

3.2.1 Les lois de Newton

• Première loi de Newton : *principe d'inertie*

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.

En termes plus modernes, on introduit la notion de système isolé :

Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune force extérieure.

Le principe d'inertie peut alors être formulé simplement en disant que :

Si un système est isolé alors il possède un mouvement rectiligne et uniforme.

Cet énoncé est vrai si le système physique se réduit à un point. Pour les systèmes (réels) fait de plusieurs points, ce principe s'applique au centre de masse du système, notion qui sera introduite lors du chapitre 6.

Notons que l'état de repos est un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme où la vitesse est nulle. Par ailleurs, il est normal d'être choqué par ce principe car la plupart des phénomènes du quotidien semblent en contradiction avec lui : à pieds, si on ne force pas avec nos jambes on tombe par terre ! En voiture, si on n'accélère pas continuellement, ou en vélo, si on ne pédale pas, on finit par s'arrêter... Cependant, si vous lancez une balle sur le sol elle parcourt une certaine distance, mais si vous la lancez sur de la glace bien lisse, la distance parcourue sera beaucoup plus grande. Il a fallu ce genre d'expériences pour que les savants du XVII^e siècle, et en particulier Galilée, comprennent que notre intuition était faussée par notre environnement. En effet, sur Terre,

nous sommes en permanence dans son champ de pesanteur et il faut beaucoup d'ingéniosité pour limiter les forces de frottements de toute nature!

Les tables expérimentales avec des palets sur coussins d'air permettent de rendre les frottements très faibles, et le mouvement des palets, une fois lâchés, semble vérifier le principe d'inertie. Notons que le palet n'est pas totalement isolé : il est soumis à son poids et à une force de réaction normale qui se compensent exactement, permettant au palet d'être libre de toute influence comme un système isolé. Aujourd'hui, c'est aussi avec les sondes spatiales qui poursuivent leur chemin bien après que leurs moteurs aient été éteints, que nous pouvons avoir confiance en ce principe...

• **Seconde loi de Newton – PFDC :**

principe fondamental de la dynamique classique

La somme des forces s'appliquant sur un système est égale au produit de sa masse et de son accélération.

Ce principe s'écrit mathématiquement de la façon suivante :

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (3.14)$$

On peut aussi voir cette équation comme une définition de la notion de force, ou alternativement comme la définition de la masse... Ici, nous supposons ces concepts bien définis et utiliserons cette relation pour étudier le mouvement. Cependant, cette relation n'est vraie qu'à la condition que la masse soit constante.

La formulation la plus générale de cette relation fait intervenir la quantité de mouvement, ou impulsion en langage moderne, du système physique. **L'impulsion** est définie comme le produit de la masse par la vitesse :

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (3.15)$$

Le principe fondamental de la dynamique classique (PFDC) devient alors :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.16)$$

Quand la masse m est constante, les deux équations (3.14) et (3.16) sont absolument équivalentes. Cependant, si on étudie des systèmes physiques plus complexes, on peut être confronté à des situations où la masse change au cours du temps (fusée, camion benne sous la pluie...). Dans ce cas, c'est la relation (3.16) qui est la plus pertinente. L'énoncé rigoureux du PFDC est donc

La somme des forces s'appliquant sur un système est égale à la dérivée temporelle de l'impulsion totale du système.

En fait, nous verrons lors du chapitre 6 que l'impulsion est une quantité physique fondamentale car elle est reliée aux propriétés de l'espace (à l'homogénéité

de l'espace). L'impulsion se conserve pour les systèmes isolés, mais pour comprendre cette conservation il faut introduire plusieurs points d'étude et la notion de centre de masse... Cela nous permettra de mieux comprendre ce que signifie « l'impulsion totale du système ». Pour le moment, nous nous concentrons sur un seul point d'étude possédant une masse constante. Dans ce cadre, la relation 3.14 est parfaitement valable et est plus simple d'utilisation. Enfin, remarquons que l'éq.3.16, et non l'éq.3.14, a l'avantage d'être toujours valable en relativité.

On peut remarquer que le PFDC semble inclure le principe d'inertie : en effet, si le système physique est isolé on a $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cste} \Rightarrow$ la vitesse est rectiligne et uniforme. Cependant, on a passé sous silence un problème important : la définition des quantités cinématiques nécessite de définir un référentiel. C'est dans ces définitions que se cache le principe d'inertie. Nous verrons dans la prochaine section que ceci n'est pas si simple, mais avant finissons en avec les lois de Newton.

• Troisième loi de Newton : *principe de l'action - réaction*

Le concept de force est bien pratique car il peut nous faire oublier la cause de la force. Tout objet massif est soumis à son poids, mais il a fallu des millénaires pour comprendre que c'était dû à l'attraction de la masse de la Terre. Intrinsèquement, une force résulte de l'interaction entre deux objets. Cette interaction obéit à la troisième loi de Newton, le principe d'action - réaction :

Si deux objets ponctuels interagissent l'un sur l'autre, alors les forces qu'ils exercent (action) sont égales et opposées aux forces qu'ils subissent (réaction) : $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$

C'est avec ce principe que l'on peut comprendre pourquoi cela ne sert à rien de pousser une voiture de l'intérieur pour la faire avancer, ou de souffler sur la voile d'un bateau si on est dedans... (L'action globale sur le système « personne + véhicule » est nulle!) Notons que ce principe parfaitement naturel en apparence, se révèle ne plus être valable en relativité lorsque la vitesse finie des interactions est prise en compte...

• Condition d'équilibre

Pour qu'un objet soit à l'équilibre, il doit être au repos dans le référentiel de l'observateur qui effectue les mesures (référentiel du laboratoire). Le repos est caractérisé par une vitesse nulle tout le temps, et par conséquent l'accélération doit aussi être nulle. Selon la seconde loi de Newton cela implique que la somme des forces est nulle :

$$\boxed{\text{équilibre} \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{1}^{\text{ère}} \text{ condition})} \quad (3.17)$$

Ceci est vrai en mécanique du point. Cependant dès qu'on étudie un ensemble de points on peut vite être confronté à une situation où la somme des forces est nulle et pourtant le système n'est pas à l'équilibre. Il faudra alors rajouter une

seconde condition qui fait intervenir une nouvelle quantité physique appelée « moment de la force » qui caractérise la capacité à tourner du système et que nous commencerons à étudier au chapitre 7. En fait, les équations 3.14 et 3.16 ne sont vraies que pour le centre de masse du système...

3.2.2 Référentiels

Lorsque vous prenez le train et que vous vous déplacez dans les travées, en général tout se passe bien, mais si le train ralentit fortement à l'approche d'une gare vous êtes projeté vers l'avant ou s'il accélère violemment vous êtes projeté vers l'arrière, et enfin, s'il prend un virage vous êtes poussé vers l'extérieur alors qu'aucune force ne s'applique sur vous dans ces trois cas. Ce constat évident prouve que les deux premières lois de Newton sont fausses dans ces conditions ! En revanche si le train avance en ligne droite avec une vitesse constante, alors pas de problème, Newton est dans le vrai...

En fait, les lois de Newton sont vraies uniquement dans ce qu'on appelle un « référentiel d'inertie » ou un « référentiel galiléen ». La définition d'un tel référentiel est la suivante :

Un référentiel d'inertie est tel qu'un objet isolé possède un mouvement rectiligne et uniforme dans ce référentiel

En d'autres termes, **un référentiel d'inertie est tel que les lois de Newton soient vraies !** Cela nous arrange bien, mais existe-t-il des référentiels d'inertie ? S'il en existe un alors on peut en imaginer beaucoup d'autres, car tout référentiel en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est aussi un référentiel d'inertie. Ainsi, un référentiel n'est pas inertielle si son mouvement par rapport à un référentiel d'inertie est :

- rectiligne mais non uniforme, c'est-à-dire subit des accélérations ou des décélérations (dans la direction de la vitesse relative) ;
- non rectiligne, c'est-à-dire s'il y a un mouvement de rotation (uniforme ou non, de rayon de courbure fixe ou non).

Peut-être commencez-vous à voir le problème fondamental des lois de Newton... Essayons de construire différents types de référentiel et voyons si ce sont de bons référentiels d'inertie :

→ **Le référentiel terrestre ou référentiel du laboratoire** est le référentiel que nous avons utilisé jusqu'à présent sans le nommer : le centre de notre repère est un point situé à la surface de la Terre, à partir duquel on fait partir trois axes afin de construire un système de coordonnées (par exemple cartésiennes, mais peu importe ce choix), et auquel on adjoint une horloge (mais le temps n'est pas un problème dans notre discussion actuelle, alors nous ne le mentionnerons plus). Est-ce un bon référentiel d'inertie ? Oui, tant que l'on peut négliger la rotation de la Terre sur elle-même. Cela sera le cas pour la plupart des phénomènes que l'on va étudier par la suite, mais si on étudie le mouvement d'un avion de ligne, d'un satellite, des étoiles ou même simplement du pendule de Foucault, cela n'est plus vrai, la rotation de la Terre est un phénomène important dont il faut tenir compte !

→ **Le référentiel géocentrique** est tel que l'origine du repère est prise au centre de la Terre avec trois axes pointant vers des étoiles lointaines. C'est un bon référentiel d'inertie tant que l'on peut négliger la rotation annuelle de la Terre autour du Soleil. Les astronomes ne l'aiment pas pour définir les coordonnées des étoiles et des galaxies, au contraire, ils utilisent le mouvement apparent des étoiles à cause de cette rotation pour en déterminer la distance (méthode de la parallaxe).

→ **Le référentiel héliocentrique** prend pour origine le centre du Soleil, ses axes sont dirigés vers trois étoiles distantes. Ce référentiel est très correct tant que le mouvement du Soleil au sein de la Voie Lactée est négligeable. Étant donné qu'il fait un tour en plus de 200 millions d'années, on peut considérer que c'est un référentiel d'inertie à l'échelle humaine !

Ouf ! On en a trouvé un ! Mais on comprend qu'il n'est pas « absolu », on peut seulement négliger les effets non-inertiel de ce référentiel dans nos mesures usuelles. En fait, on vient de mettre le doigt sur une des bases fondamentales de la physique moderne : il n'y a rien d'absolu (même pas le temps !), tout est relatif... La seule chose que l'on veuille conserver ce sont les lois de Newton dans les référentiels d'inertie, alors pour cela on a inventé un nouveau principe, appelé *principe de relativité* et qui postule que :

Les lois de la physique sont identiques dans tout référentiel d'inertie

Remarquons que ce postulat n'implique pas que deux observateurs dans deux référentiels d'inertie différents, auront une description identique d'un même phénomène : la vigie en haut du mât d'un bateau (avançant en ligne droite et à vitesse constante) lâchant une pierre, voit la pierre tomber verticalement, alors que le matelot resté à quai voit la pierre décrire un arc de parabole. Cette correspondance entre les descriptions de deux observateurs différents fait partie des propriétés des changements de référentiels⁵.

Si le référentiel est non inertiel, on est amené à introduire des notions particulières comme celle des « forces fictives » ou « forces d'inertie », comme la force centrifuge ou la force de Coriolis. L'existence des forces d'inertie dépend « de la nature de l'observateur », pour l'un elles existent, pour l'autre non. Elles sont la manifestation du principe d'inertie. Cette affirmation est choquante car nous sentons « réellement » la force centrifuge dans notre vie de tous les jours, il faut vraiment introduire cette force dans le bilan des forces quand on est dans un référentiel qui n'est pas d'inertie, mais la description du même phénomène dans un référentiel d'inertie ne fait pas intervenir la force centrifuge...

Pour mieux comprendre prenons un exemple de la vie de tous les jours. Quand on prend un virage serré en voiture à haute vitesse, on est propulsé vers l'extérieur et on invoque la force centrifuge... En fait, la voiture qui tourne n'est pas un référentiel d'inertie, notre corps aurait préféré continuer tout droit, mais comme on est dans la voiture, qui tourne grâce aux frottements des pneus sur la route, on s'écrase contre la portière ! La force de réaction de la portière (ou plutôt du siège) est la cause de notre changement de direction, on reste

5. Étude indispensable pour toute personne voulant comprendre la relativité.

solidaire de la voiture. Si vous oubliez un objet sur le toit de votre voiture, quel mouvement aura-t-il au premier virage ?

L'objectif du chapitre 9 est d'éclaircir l'ensemble de ces subtilités non triviales. Avant ce chapitre là, nous ne travaillerons que dans des référentiels d'inertie (ou supposés tels) où les lois de Newton s'appliquent sans défaut. Nous nous concentrons sur l'étude de la seconde loi, essentielle pour étudier la dynamique d'un système physique. Cependant, cette loi est vectorielle et différentielle, ce qui est loin d'être simple du point de vue mathématique. Dans la section suivante nous allons étudier quelques applications et commencer à apprendre à résoudre des problèmes de physique avec ces lois. Dans le chapitre suivant nous verrons un moyen de simplifier les calculs et d'arriver plus vite à certains résultats à l'aide d'une autre méthode, la loi de conservation de l'énergie.

3.2.3 Applications des lois de Newton – Exercices de cours

• Méthode générale

→ Afin de résoudre un problème de mécanique il faut introduire des vecteurs $(\vec{F}_i, \vec{a}, \vec{v}, \vec{r})$, choisir un référentiel puis définir un système de coordonnées. Le choix du référentiel n'est pas anodin, votre esprit critique doit être en éveil, vous êtes en train de faire vos premières approximations, vous commencez à modéliser le problème, les hypothèses de l'étude apparaissent. Le choix du système de coordonnées est crucial, il conditionne souvent la difficulté des calculs mathématiques. C'est la première étape à suivre pour résoudre un problème, le raisonnement physique est primordial.

→ La seconde étape, souvent négligée, est essentielle pour visualiser le problème : il faut faire un schéma de la situation. On fait apparaître l'ensemble des données du problème, fournies en général par l'énoncé, et on effectue avec soin un bilan complet des forces en présence. C'est le moment où on explique l'ensemble des notations utilisées. On analyse les différentes quantités physiques en essayant de distinguer clairement les paramètres des variables.

→ L'étape suivante est immédiate : on pose la seconde loi de Newton. Le problème physique devient un problème mathématique. Les difficultés apparaissent alors pour résoudre cette équation.

→ La quatrième étape est purement technique : il faut gérer le problème vectoriel. C'est le moment de projeter les vecteurs sur des axes. Afin que les expressions mathématiques soient le plus simples possibles, le choix des axes du système de coordonnées doit être particulièrement judicieux. Un mauvais choix amène, en général, à un problème inextricable. Si cette réflexion a été correctement menée lors de la première étape et bien expliquée lors de la seconde, la projection du PFDC est alors une formalité.

→ Débarrassé des vecteurs, il ne reste plus que l'aspect différentiel de la seconde loi de Newton. À ce niveau, il n'y a pas de miracle, il faut apprendre à résoudre des équations différentielles et pour cela il faut s'entraîner et

encore s'entraîner... L'annexe B sur les équations différentielles vous donne les principes de résolution et plusieurs exemples, c'est le moment de la lire et de commencer à comprendre.

→ La sixième et dernière étape concerne l'évaluation de la solution obtenue. Votre raisonnement physique et votre esprit critique doivent revenir au galop. D'une solution mathématique vous voulez obtenir un résultat physique. Le raisonnement dimensionnel, l'estimation des ordres de grandeur et deux doigts de logique, devraient vous y aider.

• C3.2 – Traction d'une masse

Un bloc de masse m est traîné sur un plancher horizontal à l'aide d'une corde qui exerce une force constante de module F faisant un angle θ avec l'horizontale. Pour les questions 1 à 4, on suppose qu'il n'y a pas de frottements entre le bloc et le plancher. Pour les questions 5 à 8, on ne distinguera pas les frottements solide - solide statiques et dynamiques.

1) *Le bloc est immobile et la force de traction est nulle. Faire le bilan des forces. En déduire l'expression de la réaction normale exercée par le sol sur le bloc.*

2) *On exerce une force de traction que l'on suppose être constante. Quelle est l'expression du vecteur accélération \vec{a} du bloc ? Quelle est l'expression de l'intensité de la force de réaction normale, tant que le bloc reste au sol ?*

3) *Le bloc reste au sol mais avance. Quelle est la norme de l'accélération du bloc ? En déduire les équations horaires de la vitesse et de la position. Tracer sommairement les fonctions $a(t)$, $v(t)$ et $x(t)$.*

4) *Le module de la force F augmente lentement. Quelle est son expression et sa valeur juste avant que le bloc ne soit entièrement soulevé du plancher ? Quelle est l'accélération du bloc à ce moment là ?*

5) *On considère maintenant qu'il existe une force de frottements solide-solide entre le bloc et le plancher. Faire le bilan des forces. En déduire l'expression de l'accélération quand le bloc reste au sol.*

6) *Calculer la force de traction minimale à exercer pour que le bloc se mette en mouvement. En déduire les équations horaires de la vitesse et de la position.*

7) *Reprendre la question 4 dans ces nouvelles conditions.*

8) *Peut-on tirer le bloc avec une vitesse constante ? Conclusion.*

9) *Reprendre la question précédente en distinguant les frottements statiques de coefficient μ_s des frottements dynamiques de coefficients μ_d .*

Application numérique : $m = 5 \text{ kg}$, $\theta = \pi/6$, on prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$, $F = 50 \text{ N}$ et le coefficient de frottements solide-solide $\mu = 0,25$. Pour la question 9 : $\mu_s = 0,25$ et $\mu_d = 0,20$.

Réponses

• C3.3 – Chauffeur malchanceux

Un chauffeur est tombé en panne au-dessus d'un fleuve sur un pont-levis. Un bateau arrive et le pont commence à se lever. Le chauffeur pris de panique s'enfuit en courant. La voiture a une masse $m = 1\text{ t}$, le coefficient de frottements solide-solide entre les pneus et le pont vaut $\mu = 0,9$ et on néglige la résistance de l'air. À partir de quel angle, par rapport à l'horizontale, la voiture se met-elle à glisser ?

Réponses

Conclusion : Cet exercice montre qu'avec un bon raisonnement physique on peut simplifier considérablement la résolution du problème, et qu'il faut toujours choisir judicieusement les axes du système de coordonnées !

• C3.4 – Chute dans un fluide visqueux : goutte de pluie

Une goutte d'eau de rayon R , soumise au champ de pesanteur \vec{g} , tombe dans l'air verticalement avec une vitesse suffisamment faible pour que la résistance de l'air soit, en bonne approximation, donnée par une force de frottement visqueux, $\vec{f} = -\eta\vec{v}$, où η est une constante positive qui dépend du milieu et de la taille de la goutte.

- 1) Calculer la dimension du paramètre η , en déduire son unité.
 - 2) Établir l'équation différentielle qui gouverne la vitesse de la goutte en considérant qu'il n'y a que le poids et la force de frottement visqueux qui s'exercent sur la goutte.
 - 3) Calculer les solutions de l'équation différentielle.
 - 4) Montrer que la goutte d'eau atteint une vitesse limite qu'on déterminera, et ce, indépendamment de la vitesse initiale.
 - 5) Représenter graphiquement l'évolution temporelle de la norme de la vitesse, si on suppose que la goutte d'eau est tombée d'une hauteur h avec une vitesse initiale nulle ($v_0 = 0$). Calculer les rapports entre la vitesse et la vitesse limite aux temps $t = \tau = m/\eta$ et $t = 5\tau$.
 - 6) En déduire l'équation horaire de l'accélération et représenter graphiquement sa valeur absolue. Que vaut l'accélération à $t = 0$, ce résultat est-il logique ?
 - 7) Calculer l'équation horaire de la position. Tracer approximativement sa représentation graphique.
 - 8) Quelle force a été « oubliée » dans le raisonnement précédent ? Trouver l'expression de la vitesse limite si cette force est maintenant prise en compte. Donner l'erreur relative commise par cette approximation.
 - 9) Calculer les équations des tangentes à l'origine des équations horaires de la vitesse, de la position et de l'accélération. Les représenter graphiquement.
- A.N. : $R = 0,5 \text{ mm}$, $\eta = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ SI}$, $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $h = 1 \text{ m}$, la densité de l'eau $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et celle de l'air $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Réponses

3.3 Exercices

3.3.1 Bilan des forces, PFDC avec forces constantes

E3.1 – Décollage d'une fusée

- 1) Quelle est la valeur minimale de la poussée d'une fusée de 100 tonnes au décollage ?
- 2) Si cette poussée est constante, le mouvement est-il uniformément accéléré ?

E3.2 – Tir dans un arbre

Une balle de masse m tirée horizontalement frappe un arbre avec une vitesse de v . Elle pénètre d'une longueur L dans l'arbre, sous l'action d'une force de freinage constante. Après combien de temps la balle s'arrête-t-elle ? Quelle force exerce l'arbre sur la balle ? (A.N. $m = 1,8\text{ g}$, $v = 350\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $L = 13\text{ cm}$)

E3.3 – Équilibre

Une bille métallique de masse m est suspendue à un fil et est attirée par un aimant (force horizontale). On mesure un angle θ par rapport à la verticale. À partir de la seconde loi de Newton, calculer l'intensité de la force magnétique exercée par l'aimant sur la bille par les trois méthodes suivantes :

- 1) Raisonnement bidimensionnel : utiliser un système de coordonnées cartésiennes avec un axe horizontal et un axe vertical.
- 2) Raisonnement unidimensionnel : projeter le PFDC sur l'axe du mouvement.
- 3) Raisonnement géométrique : utiliser les relations trigonométriques dans le triangle constitué par les forces s'appliquant sur la bille (absence de projection).

E3.4 – Pendule dans une voiture

On place un pendule de masse m dans une voiture. La voiture possède une accélération A et le pendule fait un angle α par rapport à la verticale. Faire un schéma de la situation et expliquer pourquoi le pendule ne peut pas être en position verticale. Calculer les expressions de la tension du fil et de l'angle α en fonction de m , g et A .

E3.5 – Sieste dans un hamac

Vous voulez vous reposer dans un hamac dont les cordelettes d'attache sont usées. Si vous ne voulez pas risquer qu'elles cassent pendant votre sieste, vaut-il mieux attacher le hamac de façon à ce qu'il soit presque horizontal, ou le laisser pendre largement ? Justifier votre réponse.

E3.6 – Voilier

Comment un bateau à voile, mû par le vent seul, peut-il avancer contre le vent ? *Indications : La voile renvoie une partie du vent, on calculera alors la résultante finale de la force du vent sur la voile. Ensuite, réaliser le bilan des forces au niveau de la quille.*

E3.7 – Câble électrique

Un câble électrique est suspendu entre deux pylônes. Il pend sous l'effet de son poids. On néglige l'élasticité du câble.

- 1) La tension du câble est-elle plus forte au milieu ou au niveau des extrémités ?

- 2) La tension du câble à une extrémité est-elle supérieure, égale ou inférieure au demi-poids ?
- 3) Comment choisir la longueur du câble si l'on veut minimiser l'effort vertical supporté par les pylônes ?
- 4) Comment choisir la longueur du câble si l'on veut minimiser la tension maximale qu'il doit supporter ?

E3.8 – Descente en voiture

Une automobile de masse 1000 kg descend, sans utiliser son moteur, une rue dont l'inclinaison est de 20° .

- 1) Donner les équations horaires de la vitesse et de la position en l'absence de frottements.
- 2) Déterminer la force, supposée constante, produite par les freins si l'automobile se déplace avec :
 - a) un mouvement uniforme,
 - b) une accélération constante de $a = 0,2 \text{ m.s}^{-2}$.
- c) Trouver dans chacun des cas la force exercée sur l'automobile par la rue.

E3.9 – Glissades en montagne

Deux alpinistes arrivent en haut d'une montagne. De chaque côté du sommet il y a un glacier, celui de droite de pente assez faible α_1 et celui de gauche de pente plus importante α_2 . Après avoir admiré la vue, ils décident de descendre de manière peu commune, en se laissant glisser chacun d'un côté de la montagne. Leur but est d'arriver en bas des deux glaciers en même temps. Ils synchronisent leurs montres et ils partent en même temps. La hauteur des deux glaciers est notée h .

- 1) Le premier alpiniste, de masse m_1 , se laisse glisser du côté de faible pente (α_1). En négligeant les frottements, décrire son mouvement (donnez les équations horaires de l'accélération, de la vitesse et de la position). Calculer le temps nécessaire pour qu'il arrive en bas du glacier.
- 2) Le deuxième alpiniste, de masse m_2 , se laisse glisser de l'autre côté de la montagne (α_2). La pente étant plus grande de son côté il pense arriver en premier s'il se laisse glisser tout simplement. A-t-il raison ?
- 3) Pour arriver en bas en même temps que son ami, il décide alors de freiner son mouvement à l'aide de son piolet. En supposant cette force de frottement constante, calculer son accélération et les équations horaires de la vitesse et de la position.
- 4) Déterminer la force de frottement qu'il doit exercer pour qu'il arrive en bas du glacier en même temps que l'autre alpiniste.

A.N. $m_1 = 80 \text{ kg}$, $m_2 = 70 \text{ kg}$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $h = 1000 \text{ m}$.

E3.10 – Ascenseur

Trois personnes pesant 60 kg chacune montent dans une cabine d'ascenseur de masse à vide de 140 kg . Le mouvement de l'ascenseur, pour une montée comme pour une descente, est tel que :

- Phase 1 : mouvement uniformément accéléré pendant 3 s ,
- Phase 2 : mouvement uniforme à $v_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$,
- Phase 3 : mouvement uniformément décéléré pendant 3 s .

On négligera les frottements dans la suite de l'exercice.

1) Calculer la tension du fil lors des trois phases, en cas de montée puis de descente. On représentera par un dessin les directions de \vec{a} et \vec{v} dans les six cas de figures.

2) Calculer la durée nécessaire pour une montée d'une hauteur de 15 m. Même question pour une descente.

E3.11 – Vol en avion

Les forces s'appliquant sur un avion (monomoteur) en vol horizontal et à vitesse constante peuvent être décrites par les quatre forces suivantes : le poids, la force motrice, la traînée due à la résistance de l'air (sens opposé à la force motrice) et la portance (réaction de l'air, perpendiculaire au plan des ailes et à la force motrice).

1) L'avion est en vol rectiligne et uniforme. Exprimer la portance et donner la relation entre la traînée et la force motrice.

2) L'avion vire en gardant un mouvement horizontal que l'on supposera circulaire et uniforme. Soit α l'angle entre le plan des ailes et l'horizontale (seule la portance change par rapport au cas précédent), r le rayon du cercle de la trajectoire, v la norme de la vitesse de l'avion et m sa masse. Donner la relation entre la traînée et la force motrice. Calculer la portance et α en fonction de m , g , v et r . En déduire « le facteur de charge » (« nombre de g » ou « poids apparent ») rapport entre la portance et le poids.

A.N. $m = 700 \text{ kg}$, $v = 180 \text{ km.h}^{-1}$ et $r = 600 \text{ m}$.

E3.12 – Freinage ou évitement ?

Vous roulez en voiture avec une vitesse v_0 constante. D'un coup, un camion surgit et s'arrête devant vous. Une distance L vous sépare. Vous voulez éviter le camion sans faire dérapier la voiture. Vous sera-t-il plus facile de freiner en ligne droite avec une décélération constante, ou d'effectuer un virage circulaire de rayon R avec une vitesse uniforme ? Décrire les forces que vous ressentez dans la voiture. Discuter les limites de cette description.

E3.13 – Rotation et tension d'un fil

Une masse m , située en M , est accrochée au bout d'un fil et tourne avec une vitesse angulaire uniforme ω autour du point d'attache O , centre de rotation du mouvement de M . Le mouvement a lieu sur un plan horizontal. On néglige les frottements. On utilisera les systèmes de coordonnées cartésiennes et polaires.

1) Donner les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération dans chaque système de coordonnées.

2) Faire le bilan des forces et appliquer la seconde loi de Newton afin de déterminer l'expression de la force de tension du fil.

3) Que se passe-t-il si le fil casse ? Déterminer alors les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération dans chaque système de coordonnées.

E3.14 – Glissade sur une sphère pour un mouvement uniforme

Un point M de masse m est placé à l'instant initial sur le sommet S d'une demi-sphère sur laquelle il glisse de façon uniforme. Il possède une vitesse initiale horizontale v_0 . Soit O le centre de la demi-sphère et R son rayon. Soit

(Ox) l'axe horizontal, (Oy) l'axe vertical et ϕ l'angle (\vec{u}_y, \vec{r}') comme indiqué sur la figure 3.14. L'objectif de l'exercice est de calculer l'angle de décrochage ϕ_D associé à la position D où la masse m quitte la sphère.

- 1) En utilisant le PFDC, déterminer l'intensité de la réaction normale N de la sphère sur la masse m en fonction de m, g, R, v et ϕ .
- 2) Calculer l'angle de décrochage ϕ_D en fonction de g, R et v_0 .
- 3) Décrire la situation si $v_0^2 > Rg$.
- 4) Pour quelle vitesse initiale n'y-a-t-il pas de décrochage ?
- 5) Selon les données de l'exercice, peut-on négliger les frottements ? Si oui, pourquoi ? Si non, sont-ils constants ?
- 6) Cet exemple vous semble-t-il réaliste ?

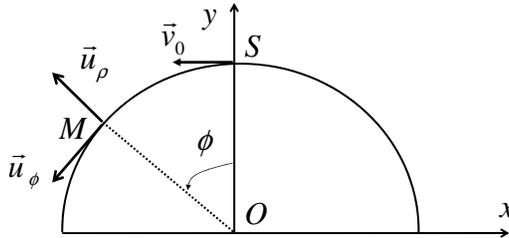


FIGURE 3.14 – Glissade sur une sphère

3.3.2 Forces variables et équations différentielles

E3.15 – Distance d'arrêt

Un bloc de masse m est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ d'une position que l'on choisira comme origine de notre repère. Le bloc, soumis à des frottements, s'arrête au bout d'une distance L .

- 1) Les frottements ont une intensité f constante.
 - a) Calculer les équations horaires des vitesses puis du mouvement. Représenter graphiquement ces deux fonctions.

Exprimer la distance d'arrêt du bloc en fonction de m, v_0 et f .

- b) En déduire l'expression du coefficient de friction μ .
- 2) Les frottements visqueux sont du type $\vec{f} = -b\vec{v}$.
 - a) Établir l'équation différentielle contrôlant l'évolution de la position. En déduire celle contrôlant l'évolution de la vitesse.
 - b) Calculer les équations horaires des vitesses puis du mouvement. Représenter graphiquement ces deux fonctions.

Exprimer la distance d'arrêt du bloc en fonction de m, v_0 et b . En déduire l'expression de b .

E3.16 – Course à pieds

Lors d'une compétition sportive, la vitesse $v(t)$ d'un coureur à pieds sur des distances inférieures à 200 m satisfait à l'équation suivante : $a(t) = A - Bv(t)$, où A et B sont des constantes positives données.

- 1) Quelles sont les dimensions physiques de A et de B ?
- 2) Trouver la solution générale de l'équation différentielle précédente.

- 3) Sachant que le signal du départ est donné au temps $t = 0$, trouver la vitesse $v(t)$ du sprinter à chaque instant $t \geq 0$. Montrer qu'il existe une vitesse limite v_L que l'on exprimera en fonction de A et de B .
- 4) Trouver l'accélération $a(t)$ au temps t . Exprimer A en fonction de l'accélération initiale $a_0 = a(0)$.
- 5) Déterminer la position $x(t)$ du coureur au temps t si $x(0) = 0$, en fonction de a_0 et v_L .
- 6) Dédire de la question précédente la durée t_1 du sprint en fonction de la vitesse v_1 du coureur sur la ligne d'arrivée, de la longueur x_1 de la piste, et des données a_0 et v_L .

E3.17 – Projectile avec frottements

Reprendre l'exercice de cours C2.3 en supposant que le projectile subit une force de frottement dans l'air $\vec{f} = -\gamma \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse du projectile et γ est positif.

E3.18 – Panne d'essence

Une voiture de masse m roule pendant une heure puis tombe en panne d'essence. On traitera le cas sans frottements puis le cas où la voiture est soumise à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -b\vec{v}$.

1) Mouvement pendant la panne d'essence.

La voiture possède une vitesse initiale $\vec{v}_P = v_P \hat{x}$ d'une position que l'on choisira comme origine de notre repère ($x_P = 0$).

a) Si on néglige les frottements, calculer les équations horaires des vitesses et des positions. Représenter graphiquement les deux fonctions. Décrire le mouvement. b) Mêmes questions avec frottements.

2) Mouvement initial.

La voiture réalise un départ arrêté que l'on choisira comme origine des temps et des distances. Le moteur exerce une force motrice constante F_0 .

a) Si on néglige les frottements, calculer les équations horaires des vitesses et des positions. Représenter graphiquement les deux fonctions et décrire le mouvement jusqu'au temps t_P instant de la panne.

E3.19 – Décroissance radioactive

Dans la nature de nombreuses particules et de noyaux d'atomes sont instables. Si on suppose que ces objets n'ont pas de mémoire (« principe d'indiscernabilité »), on impose à la probabilité de désintégration par unité de temps d'être une constante, notons la $1/\tau$. Si à l'instant t on a $N(t)$ particules radioactives, alors pendant l'intervalle de temps dt suivant, le nombre de particules qui se sont désintégrées vaut $N(t)dt/\tau$. On en déduit que la variation du nombre de particules radioactives vaut : $dN = N(t+dt) - N(t) = -Ndt/\tau$. Si à l'instant initial on avait $N(0)$ particules, en déduire l'expression du nombre de particules $N(t)$ en fonction de $N(0)$, τ et t .

E3.20 – Distance de sécurité

Deux automobiles se déplacent sur une portion droite d'autoroute. À un instant pris comme origine des temps, le conducteur de la première voiture, notée A , veut freiner pour ne pas heurter celle devant lui (voiture B) et évoluant à

une vitesse constante v_B , lorsqu'il constate que ses freins ne fonctionnent plus. La seule décélération de la voiture provient alors des frottements supposé être proportionnels au carré de la vitesse suivant une loi du type : $\vec{f} = -bv^2\vec{u}_x$ où b est un coefficient constant. Soit m la masse de la voiture. On utilisera la paramètre $\lambda = m/b$ dans tout l'exercice. À l'instant $t = 0$, la première voiture a une vitesse v_A^0 et est située en $x_A^0 = 0$ à une distance L de la seconde voiture.

- 1) Donner les dimensions du coefficient b et du paramètre λ .
- 2) Établir, pour la première voiture, l'expression de la vitesse $v_A(t)$.
- 3) En déduire l'expression de la distance parcourue en fonction du temps $x_A(t)$.
- 4) Déterminer la relation entre $v_A(t)$ et $x_A(t)$.
- 5) Établir, pour la deuxième voiture, l'expression de $x_B(t)$.
- 6) Calculer le temps t_m pour lequel la distance entre les deux voitures $X(t) = x_B(t) - x_A(t)$ est minimale.
- 7) En déduire la distance minimale X_m entre les deux voitures. (*Indice : utiliser la relation trouvée en 4 pour simplifier les calculs*).
- 8) La distance minimale de sécurité est la distance L que le conducteur de la première voiture doit respecter pour éviter la collision. Montrer que L est de la forme $L = \lambda f(r)$ où $r = v_A^0/v_B$ et $f(r) = -1 + \ln r + 1/r$.
- 9) Montrer que $f(r)$ est une fonction positive et discuter les valeurs de r pertinentes pour le problème étudié.
- 10) Comment varie cette distance de sécurité avec la masse de la voiture? Que devient cette distance pour une voiture vide de masse m_v et pour une voiture chargée de masse m_c ?

A.N. $v_A = 160 \text{ km/h}$, $v_B = 90 \text{ km/h}$, $m_v = 1300 \text{ kg}$, $m_c = 1850 \text{ kg}$ et $b = 3,9 \text{ kg/m}$.

E3.21 – Champ électrique

Une particule de charge électrique q (supposée négative) et de masse m pénètre dans une région où règne un champ électrique \vec{E} , à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$ et au point O (choisi comme origine du repère). La particule est alors soumise à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. Données numériques : $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 10^{-30} \text{ kg}$, $E = 1 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$, $Y = 10 \text{ cm}$, $v_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- 1) Champ électrique uniforme :

Le champ électrique est tel que $\vec{E} = E\vec{u}_y$ avec E constant et positif, mais n'est appliqué qu'entre deux plans d'équations $y = -Y/2$ et $y = Y/2$.

- a) Montrer que le poids de la particule est négligeable devant la force électrique.
- b) À partir du principe de la dynamique, calculer la vitesse de la particule ainsi que les équations horaires de la trajectoire $x(t)$ et $y(t)$. Dans quelle direction se déplace la particule?
- c) Quel est le temps mis par la particule pour franchir l'espace où \vec{E} existe? Décrire la trajectoire de la particule dans la zone où \vec{E} existe, puis une fois qu'elle en sort.

- 2) Champ électrique non-stationnaire :

Le champ électrique est tel que $\vec{E} = E \sin \omega t \vec{u}_y$ avec E constant et positif, mais n'est appliqué qu'entre deux plans d'équations $y = -Y/2$ et $y = Y/2$.

- a) Donner la dimension de ω . Rappeler la relation entre ω et la période

d'oscillation du champ.

b) Calculez la vitesse de la particule. Sa composante selon \vec{u}_y peut-elle être positive? Commenter votre résultat.

c) Calculer l'équation horaire de la trajectoire $y(t)$. Représenter graphiquement $y(t)$ en fonction de t .

d) Quelle doit être la valeur de ω pour que la particule sorte de la zone où le champ est présent au bout d'une période d'oscillation exactement? Quelle est la vitesse de sortie de la particule? Représenter la vitesse de sortie sur votre schéma et vérifier si celui-ci est juste.

E3.22 – Champ magnétique

Une particule de charge électrique q (supposée positive) et de masse m pénètre, à l'instant $t = 0$ avec la vitesse \vec{v}_0 et au point O (choisi comme origine du repère) dans une région où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} . Le champ magnétique est tel que $\vec{B} = B\vec{u}_z$ avec B constant et positif. On suppose que la vitesse initiale de la particule est telle $\vec{v} = v_0\hat{x}$. On posera $\omega = qB/m$.

1) Calculer la dimension de ω (on pourra utiliser l'expression donnée en 2).

2) À partir de la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et du principe de la dynamique, calculer les composantes de la vitesse de la particule à l'instant t .

3) Calculer les équations horaires de la trajectoire. Décrire la trajectoire et donner le vecteur rotation associé. Dans quelle direction se déplace la particule? Que se passe-t-il si $q < 0$?

E3.23 – Champs électrique et magnétique

Une particule de charge électrique q (supposée positive) et de masse m pénètre, à l'instant $t = 0$ avec la vitesse \vec{v}_0 et au point O (choisi comme origine du repère) dans une région où règnent des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} parallèles et uniformes, dirigés selon l'axe Oz (sens positif) d'un repère cartésien. La vitesse \vec{v}_0 est dans le plan (xOz) et fait l'angle α avec les champs \vec{E} et \vec{B} . On raisonnera dans le cadre de la mécanique Newtonienne où la force de Lorentz (ou force électromagnétique) est donnée par $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$. On posera $\omega = qB/m$.

1) Calculer la dimension de ω .

2) Déterminer les composantes de la vitesse \vec{v} de la particule à l'instant t .

3) En déduire les équations du mouvement, puis décrire la trajectoire.

4) On supprime le champ électrostatique \vec{E} . Décrire la nouvelle trajectoire.

Chapitre 4

Énergie

et

loi de conservation 1

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

- Définitions du travail d'une force et de la puissance mécanique.
- Définition de l'énergie cinétique. Théorème de l'énergie cinétique.
- Définitions de l'énergie potentielle et des forces conservatives.
- Conservation de l'énergie mécanique.
- Diagrammes d'énergies. Critères d'équilibre et de stabilité.
- Forces non conservatives. Théorème de l'énergie mécanique.

• Compétences

- Calculs de travaux (C4.1) et d'énergies potentielles (pesanteur, ressort, gravitation, C4.2).
- Savoir faire un bilan énergétique pour calculer des quantités physiques simples (C4.3 et C4.4).
- Outils mathématiques (annexe A et exercice C4.5 en annexe C) :
 - * manipulation des différentielles,
 - * notions sur les intégrales curvilignes (circulations),
 - * notion sur les dérivées partielles,
 - * notion sur les opérateurs différentiels (gradient, rotationnel, divergence).

• Lecture conseillée

Notions de physique	YF (2013)	Hecht (1999)
Travail et énergie cinétique	ch.6 p176-206	ch.9 p311-356
Énergie potentielle et conservation de l'énergie	ch.7 p207-240	ch.9 p311-356

4.1 Introduction

Le terme « énergie » est passé dans le langage commun : énergie renouvelable, énergie solaire, énergie fossile, énergie nucléaire, énergie électrique, énergie thermique... On la décline à toutes les sauces, mais sait-on de quoi on parle réellement ? Notre objectif dans ce chapitre est de définir l'énergie de façon précise, et en effet, nous verrons qu'elle revêt de nombreuses formes différentes.

Quel est l'intérêt d'introduire cette nouvelle notion ? C'est un concept abstrait, riche et diversifié, qui trouve du sens dans la vie de tous les jours et auquel les physiciens vont associer un nombre. En observant la nature, les grecs anciens avaient déjà l'intuition que (Anaxagore vers -450) : « Rien ne naît ni ne périt, mais des choses déjà existantes se combinent, puis se séparent de nouveau » (a priori, il pensait aux atomes en disant cela). Intuition reprise et transformée par Lavoisier en 1777 : « Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme » (qui pensait à la masse). En fait la propriété la plus remarquable de l'énergie c'est qu'elle se conserve au cours du temps !

Jusqu'au début du XX^e siècle, la conservation de l'énergie était une intuition vérifiée expérimentalement et dont l'étude des diverses transformations est à la base de multiples domaines de la physique (et de la chimie), comme la thermodynamique, qui, à l'origine, concerne la compréhension du concept de chaleur. C'est en 1917, qu'Emmy Noether, mathématicienne allemande, comprit le rôle fondamental du temps dans la conservation de l'énergie. D'après un célèbre théorème qui porte son nom, on peut relier les symétries d'un système physique (ou plutôt des équations qui le décrivent) à des quantités qui se conservent (et aussi à d'autres quantités qui sont « non-observables »).

La conservation de l'énergie vient de « l'homogénéité du temps », propriété que l'on peut traduire en mots de cette façon : une expérience physique qui donnait un certain résultat hier, doit donner le même résultat aujourd'hui, et devra donner le même résultat demain. En termes plus techniques on dit que « les équations de la dynamique sont invariantes par translation dans le temps ». Si on regarde la seconde loi de Newton et qu'on applique au temps la transformation $t \rightarrow t' = t + c_t$ où c_t est une constante, on constate que la RFDC reste inchangée¹. La conséquence est la conservation de l'énergie ! (Et qu'il n'y a pas d'origine absolue au temps, « l'origine du temps est non-observable »).

On comprend que la conservation de l'énergie est un concept très profond, bien plus que celui de force. Les théories modernes de la physique, comme la mécanique quantique ou la relativité, sont basées sur la notion d'énergie et non plus sur celle de force, mais ceci est une autre histoire. Nous allons découvrir dans ce chapitre que la conservation de l'énergie est très pratique pour se construire une vision des phénomènes physiques et aussi pour simplifier les calculs !

Lors des chapitres 6 et 7 nous étudierons deux autres lois de conservation : la conservation de l'impulsion (due à l'homogénéité de l'espace) et celle du moment cinétique (due à l'isotropie de l'espace). Vous en avez déjà vu une en chimie : la conservation de la charge électrique (due à « l'invariance de

1. car $dt' = dt$ et si \vec{F} ne dépend pas explicitement du temps.

jauge » mais il faudra avoir étudié l'électromagnétisme pour commencer à comprendre ce que cela veut dire...). Il y en a d'autres. Par exemple, en physique nucléaire vous découvrirez que le nombre d'atomes et même la masse, ne sont pas des quantités qui se conservent, dommage pour Anaxagore et Lavoisier ! C'est le nombre de « baryons » (de nucléons pour simplifier) qui se conserve.

Derrière ces lois de conservation se cache la notion de « symétrie » qui est essentielle dans notre compréhension actuelle du monde physique. De nombreuses symétries de nature différentes existent. Les plus simples à appréhender sont celles qui s'attaquent à la forme géométrique du système physique. Une symétrie est une « transformation » du système qui ne le change pas, on dit aussi « qui le laisse invariant ». Un carré, un rectangle, un cube, un cylindre ou une sphère ont tous des plans, des axes ou un centre dits « de symétrie », différents dans chaque cas, qui laissent le système invariant. Par exemple, un cylindre possède une *symétrie axiale* c-à-d que tous les plans contenant l'axe du cylindre sont des plans de symétries. Une sphère possède une *symétrie centrale* c-à-d que tous les plans contenant le centre de la sphère sont des plans de symétries.

Les lois de conservation mentionnées précédemment ne sont pas associées aux symétries de la forme des systèmes physiques, mais aux propriétés d'invariance des équations de la dynamique qui décrivent leurs comportements ! Cette idée et cette nuance sont particulièrement subtiles. Cependant les mathématiques qui se cachent derrière les symétries (théorie des groupes, topologie...) sont relativement abstraites et demandent des études poussées avant d'être abordées, nous n'irons donc pas plus loin dans notre discussion. Retenez pour le moment que les propriétés des *symétries dynamiques* révèlent la nature profonde des systèmes physiques. Dans la suite de ce chapitre, nous allons voir que l'étude de l'énergie et de sa conservation, sans en connaître l'origine profonde, est déjà fort intéressante et utile !

4.2 Travail et énergie cinétique

4.2.1 Travail

• Définition basique

Le travail est la forme d'énergie associée au mouvement. On l'interprète souvent comme la quantité qui opère le passage d'une forme d'énergie à une autre. Lorsqu'une force agit sur le système physique et provoque un déplacement élémentaire $d\vec{r}$, on définit le **travail élémentaire** comme :

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}} \quad (4.1)$$

Dans l'exemple de la figure 4.1 il prend la forme : $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \theta dx$. Le travail pour aller du point A au point B , pour une force constante en norme et en direction, vaut :

$$W = W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_{x_A}^{x_B} F \cos \theta dx = F \cos \theta \int_{x_A}^{x_B} dx = FL \cos \theta$$

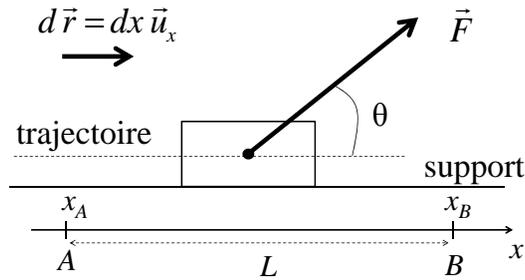


FIGURE 4.1 – Exemple de travail

• Propriétés

- Si $W > 0$ on dit que le travail est **moteur**,
- si $W < 0$ le travail est **résistant**,
- si $\vec{F} \perp d\vec{r}$ alors $W = 0$ ($\theta = \pm\pi/2$), la force ne produit aucun travail même en cas de mouvement,
- la dimension du travail est celle d'une énergie : $[W] = [E] = [F]L = ML^2T^{-2}$,
- l'unité du travail est le joule de symbole J telle que $1 J = 1 kg m^2 s^{-2}$.

• C4.1 – Exemples de calculs du travail d'une force

Calculer les travaux suivants en précisant s'ils sont moteurs, résistants ou nuls :

- 1) Travail du poids lors de la chute d'une masse m de 10 kg sur une hauteur h de 10 m .
- 2) Travail de la force de tension utilisée pour allonger de $L = 1 \text{ cm}$ un ressort de raideur $k = 100 \text{ Nm}^{-1}$ par rapport à sa position au repos.
- 3) Travail de la force de tension appliquée par un câble pour tirer sur $L = 10 \text{ m}$ une masse m de 10 kg . L'intensité de cette force est de $T = 10 \text{ N}$ et fait un angle $\theta = 60^\circ$ avec l'horizontale.
- 4) Travail des frottements d'intensité 10 N exercés sur une distance de 1 m dans un sens (aller) puis dans l'autre (retour).
- 5) Travail de la force de tension d'un fil de longueur $L = 10 \text{ cm}$, au bout duquel est accroché une masse $m = 100 \text{ g}$ qui oscille de $\phi = 45^\circ$ par rapport à sa position d'équilibre (pendule).

Réponses

• **Définition générale du travail d'une force**

Dans le cas général, et en particulier dans un espace à plusieurs dimensions, on peut toujours relier deux points différents de l'espace par plusieurs chemins. Par exemple, pour venir ce matin de chez vous à la faculté vous avez pris un chemin mais ça n'est certainement pas le seul possible : si vous étiez pressé vous avez pris le plus rapide en temps, si vous êtes économe (ou écolo) vous avez pris le plus court en distance, et si vous êtes étourdi avec un piètre sens de l'orientation, votre chemin a peut être été très compliqué !

Le travail d'une force peut dépendre du chemin suivi. En toute rigueur, il faut préciser ce chemin lorsqu'on calcule un travail. La définition rigoureuse du travail de la force \vec{F} entre les points A et B sur le chemin Γ est donc :

$$W_{A \rightarrow B}^{\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.2)$$

où ℓ est l'abscisse curviligne le long du chemin Γ et $d\vec{\ell}$ le déplacement élémentaire curviligne ($d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_T$, voir section 2.2.5). On dit aussi que $W_{A \rightarrow B}^{\Gamma}$ est

la *circulation*² de la force \vec{F} sur le chemin Γ . Des exemples de calculs de travaux de forces non conservatives (c-à-d des calculs de circulations), nécessitant le calcul d'intégrales curvilignes, sont donnés dans l'annexe en fin de chapitre.

• Forces conservatives et non conservatives

Si le travail est indépendant du chemin suivi on dit alors que la force est conservative.

Cette définition est importante car nous verrons dans la section suivante que l'énergie, dite « mécanique », se conserve pour les systèmes physiques soumis à des forces conservatives.

Le travail élémentaire est une quantité infinitésimale mais peut ne plus être une différentielle exacte (au sens mathématique) si la force est non conservative. Pour cette raison on introduit le symbole « δ » au lieu du symbole « d » réservé pour les différentielles. Pour une force non conservative, le travail élémentaire donné par l'éq.(4.1) sera noté $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r}$. Nous utiliserons peu ce symbole par la suite excepté lorsque cela s'avérera indispensable. L'étude rigoureuse de la nuance entre différentielle et quantité infinitésimale fait appel à des notions mathématiques difficiles qui peuvent être étudiées dans des cours d'analyse et de géométrie différentielle. On est confronté à ce problème en thermodynamique.

4.2.2 Énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique

À partir de la définition élémentaire du travail (eq.(4.1)), on peut trouver une relation entre travail et vitesse :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (4.3)$$

La première application de cette relation entre travail, force et vitesse est la définition de la puissance :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.4)$$

La puissance, définie comme la variation d'énergie par unité de temps, est égale au produit scalaire de la force par la vitesse.

La seconde application de l'éq.(4.3) est la définition de l'énergie cinétique et l'obtention du théorème de l'énergie cinétique par simple injection du PFDC ($\vec{F} = m d\vec{v}/dt$) :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = m d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = dE_c \quad (4.5)$$

2. La « circulation » d'un vecteur \vec{A} sur un chemin Γ est définie comme $C_A = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$. Si \vec{A} est une force, alors la circulation est un travail.

L'énergie cinétique d'une particule de masse m animée d'une vitesse \vec{v} vaut :

$$T(v) = E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.6)$$

Souvent, on utilise le label E_c quand l'énergie cinétique est un nombre et on utilise le symbole T lorsque l'on voit l'énergie cinétique comme une fonction de la vitesse ($T = T(v)$)³. Dans la suite nous utiliserons exclusivement le symbole T , que ce soit pour une fonction ou un nombre.

L'équation (4.5) fournit la **version différentielle du théorème de l'énergie cinétique** :

$$dW = dT \quad (4.7)$$

Lorsque qu'on étudie le mouvement d'un système physique, qui passe d'un état initial i à un état final f , c'est la **version intégrale du théorème de l'énergie cinétique** qui est utile et qui a un sens physique clair :

le travail des forces est égal à la variation d'énergie cinétique

$$W_{i \rightarrow f} = \Delta T \quad (4.8)$$

Cette écriture simplifiée est trompeuse car il faut bien comprendre le sens des symboles $W_{i \rightarrow f}$ et ΔT . Nous vous conseillons de retenir plutôt le cheminement suivant issu de l'intégration de l'équation (4.7) :

$$dW = dT \Rightarrow W_{i \rightarrow f} = \int_{Etat\ i}^{Etat\ f} dW = \int_{Etat\ i}^{Etat\ f} dT = T_f - T_i = \Delta T$$

Le théorème de l'énergie cinétique est équivalent à la seconde loi de Newton (le PFDC). Il est même plus avantageux car l'aspect vectoriel est caché dans le travail et que la dynamique est associée à une équation différentielle du premier ordre. Nous reviendrons sur ce point en fin de chapitre.

4.3 Énergie potentielle, forces conservatives et conservation de l'énergie

4.3.1 Définition de l'énergie potentielle

Lorsque la **force** que l'on étudie est **conservative**, on peut introduire une nouvelle notion, une nouvelle forme d'énergie appelée : **énergie potentielle**. On peut la voir comme l'**énergie emmagasinée par le système physique et susceptible d'être libérée si le système est laissé libre**.

Le plus simple pour comprendre cette forme d'énergie est d'introduire une autre notion, celle de « manipulateur ». Le manipulateur, c'est vous, l'expérimentateur qui s'oppose aux forces naturelles ! Par exemple, quand vous soulevez une

3. Dans certains livres elle est parfois notée K .

Pierre du sol et que vous l'amenez à une hauteur h , vous dépensez de l'énergie, vous effectuez un certain travail, *vous avez donné à la pierre une énergie potentielle*. Cette énergie potentielle est égale au travail que vous avez effectué pour l'amener à la hauteur h , cela correspond au travail du manipulateur. Si vous lâchez la pierre, elle tombe, elle libère son énergie potentielle sous forme d'énergie cinétique car la pierre acquiert une vitesse. Ensuite cette énergie devient chaleur lors du choc avec le sol. Vous étudierez les chocs lors du chapitre 6 et les propriétés macroscopiques de la chaleur dans un cours de thermodynamique.

Techniquement, voici ce que cela donne. Si \vec{F} est une force naturelle (on considérera dans la suite, le poids, la force de rappel élastique et la force de gravitation), la force du manipulateur est son opposée : $\vec{F}_{man} = -\vec{F}$. La variation d'énergie potentielle est égale au travail du manipulateur et est donc l'opposé du travail de la force naturelle :

$$\boxed{\Delta U = W_{i \rightarrow f}^{man} = -W_{i \rightarrow f}^F \quad (\Delta U = U_f - U_i = \Delta E_p)} \quad (4.9)$$

De nouveau, on va arrêter de noter l'énergie potentielle E_p (représentant plutôt un nombre au lycée) au profit du symbole U représentant à présent une fonction (en général de la position r : $U = U(r)$).

On peut obtenir une définition différentielle de l'énergie potentielle élémentaire grâce à la définition du travail élémentaire (éq.4.1) :

$$\boxed{dU = dW^{man} = -dW^F = -\vec{F} \cdot d\vec{r}} \quad (4.10)$$

L'équation (4.9) nous montre que ce qui a un sens physique c'est une différence d'énergie potentielle ΔU . Cela entraîne que la fonction énergie potentielle $U(r)$ est définie à une constante près. En général, on choisit cette constante à la position d'équilibre ou lorsque la force naturelle n'a aucune influence. Exemples : pour le poids l'origine des énergies potentielles est prise au niveau du sol ($U(h=0) = 0$), pour un ressort on prend la position d'équilibre à vide ($U(x_{eq}) = 0$), pour les forces gravitationnelles et électriques l'origine est prise à l'infini ($U(r \rightarrow +\infty) = 0$).

Pour réaliser le calcul de la fonction énergie potentielle, deux choix s'offrent à nous : soit on calcule une intégrale définie entre l'état initial correspondant à la position d'énergie potentielle nulle, et l'état final correspondant à la position du point M , soit on calcule une primitive et on fixe la constante a posteriori en disant que l'énergie potentielle est nulle à telle position.

• Remarques

- L'énergie potentielle n'est définie qu'avec des forces conservatives, le travail du manipulateur est indépendant du chemin suivi, il n'y a pas à s'inquiéter du chemin pris pour réaliser l'intégrale.
- A contrario de l'énergie potentielle, le théorème de l'énergie cinétique (éq.(4.8)) est vrai quel que soit la nature, conservative ou non, des forces impliquées.
- La présentation de l'énergie potentielle qui vient d'être faite se veut être pédagogique et intuitive. En fait, il vaudrait mieux se dispenser de la notion de

manipulateur qui dans certains cas peut être contre-intuitive voire trompeuse. On pourrait penser que l'énergie potentielle est non nulle à la condition qu'un manipulateur ait fourni un travail, ait donné de l'énergie au système physique. C'est vrai pour les cailloux situés à la surface de notre planète, mais ça ne l'est pas pour ceux qui proviennent de l'espace ! Les objets, les systèmes physiques, possèdent tous de l'énergie potentielle sous diverses formes. On peut tous les considérer comme des « sources » d'énergie. Les forces de la nature poussent les systèmes physiques à aller vers l'état de moindre énergie potentielle, elles effectuent spontanément un travail qui tend à épuiser la source. Ce constat, vrai pour tous les phénomènes, est associé au principe de moindre action. Une meilleure définition de l'énergie potentielle que celle donnée en début de section pourrait ainsi être : « **potentialité d'effectuer un certain travail en vertu de la position** », mais il est plus difficile de comprendre la profondeur de cette définition...

4.3.2 Exemples d'énergies potentielles

L'énergie potentielle est un concept clé pour comprendre la conservation de l'énergie, mais avant cela voyons quelques exemples afin de clarifier nos idées. Ces exemples sont fondamentaux pour la suite de ce cours. Il est indispensable que vous maîtrisiez les calculs présentés.

• C4.2 – Calculs d'énergies potentielles

Calculer l'énergie potentielle du système physique de masse m dans les situations suivantes :

- 1) *Une pierre située à l'altitude h par rapport au sol.*
- 2) *Un bloc accroché à un ressort horizontal de raideur k écarté d'une longueur L par rapport à la position d'équilibre x_{eq} qui est aussi la position à vide.*
- 3) *Un satellite située à l'altitude h par rapport au sol terrestre.*

Réponses

• Remarques

- L'énergie potentielle gravitationnelle pour $r < R_T$ a une expression différente. Ce point sera étudié lors du chapitre 8.

- Dans vos cours sur la gravitation et sur l'électricité, on vous introduira la notion de potentiel. Ces potentiels sont équivalents aux énergies potentielles à une constante près. Le potentiel gravitationnel $\Phi(r)$ est tel que $U_G(r) = m\Phi(r)$. Le potentiel électrique $V_e(r)$ est tel que $U_e(r) = qV_e(r)$. Nous n'avons pas cherché ici à vous donner un exemple de potentiel électrique car ceci sera fait dans un cours spécifique aux phénomènes électrostatiques. La tension électrique est la différence de potentiel entre deux points : $\Delta V_e = \Delta U_e/q$. Il faut faire attention à ne pas confondre la tension électrique ΔV_e souvent notée « U » avec l'énergie potentielle, il y a une division par q et une variation (Δ) à prendre en compte.

4.3.3 Forces conservatives

L'équation (4.10) définit une énergie potentielle à partir d'une force (conservative). Inversement, on peut obtenir une nouvelle définition de la force si on considère l'énergie potentielle comme un concept plus important, ou de façon plus pratique, si c'est l'énergie potentielle qui est donnée. À cette fin, il faut introduire le concept de « gradient ». Le gradient est un « opérateur différentiel » qui s'applique sur une fonction scalaire dont la définition est reliée à la différentielle de la fonction :

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}}(U) \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}(U) \cdot d\vec{r}$$

Cette définition entraîne que le gradient d'une fonction est un vecteur dont les coordonnées dépendent du système choisi. On peut écrire le gradient sous la forme $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{dU}{d\vec{r}}$ mais cette notation est abusive et non rigoureuse du point de vue mathématique. On a aussi introduit le symbole $\vec{\nabla}$, nommé « nabla », qui représente l'opération mathématique $\frac{d}{d\vec{r}}$ et qui peut être associé à d'autres opérateurs mathématiques définis ci-dessous. Pour plus de détails voir la fin de l'annexe A.

Force et gradient de l'énergie potentielle sont reliées par la différentielle de l'énergie potentielle :

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}(U) \cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U) = -\vec{\nabla}(U)} \quad (4.14)$$

La force est l'opposé du gradient de l'énergie potentielle. Pour comprendre le sens de cette relation, il est important d'essayer de comprendre la notion de gradient, opérateur que l'on retrouve souvent en physique. Par exemple, vous avez sans doute déjà entendu parlé du « gradient de température ». Imaginez une salle de classe en plein hiver. Les frileux vont se mettre près des radiateurs, ou d'autres près des fenêtres s'il y a du soleil mais ils prendront garde à ne pas les toucher car les fenêtres sont des « ponts thermiques », c'est-à-dire des surfaces favorisant les échanges thermiques avec l'extérieur (ce

qui se traduit par le fait que les fenêtres sont froides en plein hiver). Tout ça pour vous dire que la température de la pièce n'est pas homogène : il y a des zones plus chaudes que d'autres. On peut associer à chaque point de la pièce une température et ceci à chaque instant : on définit le champ de température $T(\vec{r}, t)$. De ce champ on peut construire le gradient de température $\vec{\nabla} T(\vec{r}, t) = \text{grad}(T)$ qui correspond à un vecteur en chaque point de l'espace à un instant donné. ($\vec{\nabla}$ est un « champ de vecteurs » ou « champ vectoriel ») indiquant la direction vers laquelle la température croît le plus et la norme du vecteur nous renseigne sur l'importance de cette croissance.

On a exactement le même lien entre une force (vue comme un champ vectoriel) et l'énergie potentielle (vue comme un champ scalaire). Si on veut visualiser ce lien, il est utile de définir des surfaces équipotentielles (en 3d) ou des lignes équipotentielles (en 2d). Par définition, ces équipotentielles sont l'ensemble de points qui sont au même potentiel (c-à-d possèdent la même énergie potentielle). **Le gradient est perpendiculaire aux équipotentielles et va dans le sens croissant.**

Prenons un autre exemple : les lignes de niveaux sur une carte topographique sont les lignes à altitude fixe. On peut donc les voir comme des lignes équipotentielles du champ de pesanteur, le gradient est perpendiculaire et vous indique le sens de montée. Plus les lignes de niveaux sont resserrées plus la pente sera raide et le gradient d'intensité forte. (Attention le gradient n'est pas le poids dans cet exemple car il y a une projection et un signe entre les deux...).

On peut à présent avoir une interprétation géométrique de ce lien entre force et énergie potentielle mais il faut remarquer la présence du signe « - » dans la relation $\vec{F} = -\text{grad}(U)$, qui implique que :

la force est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et va dans le sens des potentiels décroissants.

Il va vous falloir du temps pour réaliser l'importance de cette propriété que l'on retrouve dans toutes les branches de la physique. Par exemple, en électricité on vous affirme que le sens du courant électrique I va dans le sens des potentiels décroissants. La relation entre force et énergie potentielle via l'opérateur gradient qu'on vient de voir vous l'explique.

L'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ est plus général que le gradient car il est associé à deux autres types d'opérateurs différentiels appelés « divergence », noté *div*, et « rotationnel », noté *rot*. Le gradient s'applique à une fonction scalaire et donne un vecteur, alors que la divergence s'applique à un vecteur et donne une fonction scalaire, et le rotationnel s'applique à un vecteur pour donner un autre vecteur. En terme mathématique on a :

$$\vec{\nabla} = \frac{d}{d\vec{r}} \quad (4.15)$$

$$\text{grad}(U) = \vec{\nabla}(U) = -\vec{F} \quad \left(= \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \right) \quad (4.16)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \quad \left(= \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \right] \right) \quad (4.17)$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{nbre} \quad \left(= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \quad (4.18)$$

où par exemple $\partial F_x / \partial x$ représente la dérivée « partielle » de la composante F_x par rapport à la variable x . Les dérivées partielles sont définies dans l'annexe A. Dans cette annexe, un exemple de calcul de rotationnel est donné où l'on montre que lors d'un mouvement circulaire le rotationnel du « champ des vitesses » est le vecteur rotation : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(\vec{r})) = 2\vec{\omega}$. On y détermine aussi les expressions de ces opérateurs différentiels dans les divers systèmes de coordonnées. Dans l'annexe F sur les effets gravitationnels d'une sphère homogène, on montre une équation fondamentale de la physique appelée équation de Poisson faisant intervenir la divergence du potentiel gravitationnel : $\text{div}(\Phi) = \text{div}(U/m) = 4\pi G\rho$ où ρ est la masse volumique du milieu considéré.

Ces définitions vous seront peu utiles dans ce livre mais elles deviendront indispensables lors de votre étude de l'électromagnétisme et de la gravitation. Pourquoi vous parler de tout ça ? Parce que si on veut savoir si une force est conservative, et donc savoir si l'énergie se conserve, on a besoin de ce genre d'outils ! En effet, il existe trois méthodes (fortement reliées) pour savoir si une force est conservative ou non. **Une force est conservative si :**

- Le travail de la force est indépendant du chemin suivi.
- Il existe une fonction énergie potentielle U telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U)$
- Le rotationnel de \vec{F} est nul : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{0}$

En général, il suffit qu'une de ces conditions soient vérifiées pour que les autres le soient automatiquement. On choisit donc la méthode la plus simple. L'annexe C présente des exemples de calculs où l'on compare ces trois méthodes. Notons que l'équivalence entre ces trois propositions repose sur certaines hypothèses que nous n'aborderons pas car nous n'avons pas développé les outils mathématiques nécessaires pour cette étude.

4.3.4 Conservation de l'énergie mécanique

• Définition

Supposons que notre système physique ne soit soumis qu'à une seule force, ou que les autres forces soient négligeables, et que cette force soit conservative. Alors, le théorème de l'énergie cinétique et la définition de l'énergie potentielle montrent qu'une certaine quantité, appelée « énergie mécanique », se conserve au cours du temps :

$$dT = dW = -dU \quad \Rightarrow \quad dU + dT = d(T + U) = dE_m = 0$$

Si on intègre cette relation élémentaire (infinitésimale) entre l'état initial et l'état final, on obtient :

$$W_{i \rightarrow f} = \Delta T = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta U + \Delta T = \Delta(T + U) = \Delta E_m = 0$$

On voit que l'énergie mécanique est simplement la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique :

$$E_m = E_c + E_p = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U \quad (4.19)$$

et que sa variation est nulle au cours du temps :

$$\text{si } \vec{F} \text{ est conservative : } dE_m = 0 \Rightarrow \Delta E_m = 0 \Rightarrow E_m^i = E_m^f \quad (4.20)$$

• C4.3 – Conservation de l'énergie et pesanteur

On lâche une pierre d'une hauteur h . Calculer la vitesse de la pierre juste avant son impact au sol en raisonnant avec les énergies.

Réponse

• Diagramme des énergies

Il est intéressant d'avoir une représentation graphique de la variation des énergies (mécanique, cinétique et potentielle) en fonction de la position. La figure 4.6a donne ce diagramme dans le cas de la pesanteur pour la chute verticale d'un objet de masse m et la figure 4.6b dans le cas d'une force de rappel élastique associée à un objet de masse m accroché à un ressort.

Sur ces diagrammes l'axe des abscisses représente la position. L'axe des ordonnées correspond à l'énergie potentielle. La ligne horizontale en pointillée correspond à la valeur de l'énergie mécanique. Cette ligne est horizontale car l'énergie mécanique est constante quelle que soit la position. Les points A et B représentent le système physique (par exemple la pierre de l'exercice C4.3) à ces positions. Les doubles flèches pointillées représentent la part de l'énergie potentielle et la part de l'énergie cinétique à ces positions. Les flèches épaisses sur les courbes des énergies potentielles indiquent le sens d'évolution du système lorsque le temps s'écoule. En A , l'énergie cinétique domine l'énergie potentielle, en B c'est l'inverse.

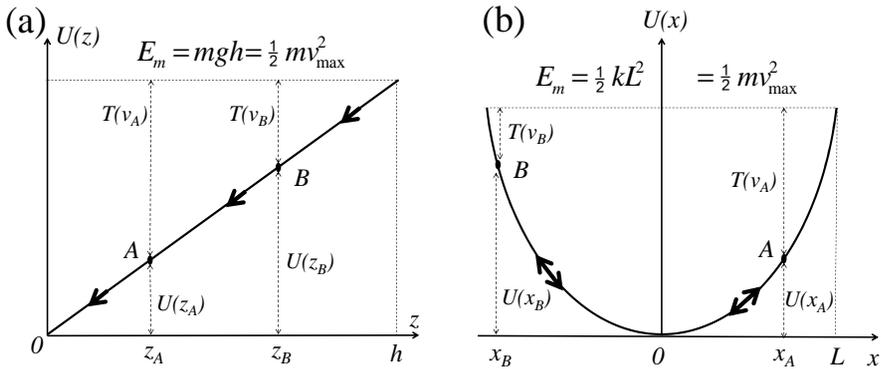


FIGURE 4.6 – Diagramme des énergies : (a) pesanteur (chute verticale), (b) force de rappel (ressort)

Dans le cas du poids, on part d'une énergie potentielle maximum ($U(z = h) = E_m$) avec une énergie cinétique nulle. On termine (juste avant le choc) avec une énergie potentielle nulle et une énergie cinétique maximale ($T = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = E_m$).

Pour le ressort le mouvement est oscillant, c'est la signification des doubles flèches épaisses sur la courbe représentative $U(x)$ de la figure 4.6b. Lorsque les frottements sont négligés, on assiste en permanence à des transferts d'énergie entre les énergies potentielle et cinétique. Aux points de compression maximum et d'élongation maximum, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie potentielle est maximale. À la position d'équilibre (à vide) $x_{eq} = 0$, l'énergie potentielle est nulle et l'énergie cinétique est maximale.

4.3.5 Critères d'équilibre et de stabilité

Pour renforcer le caractère puissant du raisonnement énergétique, remarquons que les dérivées de l'énergie potentielle permettent de définir l'équilibre (dérivée première) et la stabilité (dérivée seconde). En effet, il apparaît que la condition d'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$ est équivalente à la condition d'extremum (minimum ou maximum) de la fonction énergie potentielle :

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0} \iff \frac{dU}{dr} = 0 \quad (\text{équilibre} \leftrightarrow U \text{ extremum})} \quad (4.21)$$

On comprend aisément le lien grâce à la relation (4.14) Si ce lien ne vous paraît pas évident, imaginez qu'il n'y a qu'une seule force unidimensionnelle. Les équations (4.14) ou (4.10) deviennent simplement $F = -dU/dr$: la force est la dérivée par rapport à la position de l'énergie potentielle (à un signe près) ! En présence de plusieurs forces, U est l'énergie potentielle totale, somme des différentes énergies potentielles. Si le problème est multidimensionnel il faut utiliser les notions de vecteurs et de gradient.

Raisonnement avec des forces nous oblige à utiliser des vecteurs. Raisonnement avec des énergies nous permet d'éliminer le problème vectoriel, on manipule des fonctions scalaires. C'est plus simple techniquement mais ces fonctions énergies sont malheureusement moins intuitives que des forces. On va faire une petite discussion sur ces aspects là en fin de chapitre.

Si $U(r)$ est linéaire, la courbe représentative est une droite, la dérivée première n'est jamais nulle (et la dérivée seconde est toujours nulle). A priori il n'y a pas d'équilibre. Cela semble en contradiction avec la chute des corps. La figure 4.6a montre que l'énergie potentielle de la pesanteur est linéaire, en suivant le raisonnement précédent l'objet en chute devrait tomber indéfiniment. Bien-entendu la chute s'arrête quand l'objet arrive au niveau du sol où le bilan des forces se modifie avec l'apparition d'une nouvelle force, la réaction normale de résistance du sol. Ce point correspond au minimum du potentiel même si la dérivée (à droite) est non nulle...

L'étude des propriétés de courbure de la fonction énergie potentielle aux positions d'équilibre, c-à-d aux extremums de U , permet de définir des critères de stabilité de l'équilibre. Une dérivée première informe sur la pente de la tangente, la nullité de cette pente permet de trouver les extremums. Une dérivée seconde fournit des informations sur la courbure. Cette propriété est visible en cinématique où nous avons vu que l'accélération, la dérivée seconde de la position, est liée à la courbure de la trajectoire (\vec{a} est orientée vers l'intérieur de la trajectoire, voir le chapitre 2 section 2.3.2 et la figure 2.8). **Le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle indique si l'équilibre est stable ou instable :**

$$\frac{d^2U}{dr^2}(x_{eq}) > 0 \longleftrightarrow \text{équilibre stable} \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2U}{dr^2}(x_{eq}) < 0 \longleftrightarrow \text{équilibre instable} \quad (4.23)$$

Si $d^2U(x_{eq})/dr^2 = 0$ cela demande une étude plus approfondie. Si $d^2U(x_{eq})/dr^2 > 0$ cela peut correspondre aussi à un équilibre qualifié de « métastable », c-à-d stable sous certaines conditions. Plus précisément, l'énergie potentielle peut avoir une dérivée seconde positive localement c-à-d sur un intervalle de position donné. Une perturbation peut alors rendre l'équilibre instable (par exemple, un objet posé sur une table : en général il ne bougera pas, l'équilibre semble stable, mais si on fait trembler la table il peut finir par tomber pour atteindre une position au sol encore plus stable).

On peut comprendre l'origine du critère de stabilité à l'aide du raisonnement suivant. Toute fonction peut être localement approchée par un polynôme comme nous le montre l'existence des développements limités de Taylor (voir annexe mathématique). Les critères d'équilibre et de stabilité n'ont de sens qu'à la condition que $U(r)$ soit au moins quadratique ($U(r) \sim r^2$). On comprend facilement les critères de stabilité si $U(r)$ est quadratique :

- Si $U(r) \sim +r^2$, $U'' > 0$ et la condition $U' = 0$ correspond à un minimum. Comme la force est dirigée dans le sens des potentiels décroissants, la force ramène spontanément le système vers le minimum de l'énergie potentielle. L'équilibre est stable.

- Si $U(r) \sim -r^2$, $U'' < 0$ et la condition $U'(r) = 0$ correspond à un maximum. Comme la force est dirigée dans le sens des potentiels décroissants, la force éloigne spontanément le système de cette position que l'on qualifie donc d'instable.

Avec ce résultat, on commence à pressentir un autre très grand principe de la physique, le principe de moindre action, qui implique, entre autres, que la nature va toujours vers l'état de moindre énergie (potentielle). En langage fleuri, on pourrait dire que la nature est paresseuse ! Ce principe se retrouve dans tous les domaines de la physique, il est universel. Il est à la base des lois de l'optique géométrique que l'on a déjà évoqué à la fin du chapitre 2 (voir section 2.4) avec le principe de Fermat.

4.4 Forces non-conservatives

Les forces non conservatives typiques sont les forces de frottements. Quel que soit le chemin, elles exercent un travail résistant (négatif). Imaginons une force de frottements \vec{f} d'intensité constante, plus le chemin sera long plus le travail pour stopper le mouvement augmentera. Le travail des forces de frottements W^f dépend du chemin suivi, l'énergie mécanique ne se conserve plus.

On a vu avec le théorème de l'énergie cinétique que la variation d'énergie cinétique est égale au travail des forces. Les forces étant des vecteurs, on peut décomposer le travail des forces en la somme des travaux de chaque force. Notons \vec{F} la (ou les) force(s) conservative(s), et \vec{f} la (ou les) force(s) de frottements. Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$dT = dW = dW^F + dW^f$$

Or, par définition, on a $dE_m = dT + dU$ et $dU = -dW^F$, d'où :

$$dE_m = dT + dU = dW^F + dW^f - dW^F = dW^f$$

La variation d'énergie mécanique est exactement égale au travail des forces non-conservatives. Comme les frottements exercent un travail résistant $dW^f < 0$, on en déduit que la variation d'énergie mécanique est négative et on obtient le théorème de l'énergie mécanique⁴ :

$$\boxed{dE_M = dW^f < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_m = W_{i \rightarrow f}^f < 0} \quad (4.24)$$

En début de cours, nous vous avons affirmé que la conservation de l'énergie était un principe profond lié à la propriété d'homogénéité du temps, mais nous

4. En toute rigueur le travail élémentaire des forces de frottements devrait s'écrire δW^f et non dW^f , voir la discussion en fin de section 4.2.1.

venons de voir qu'en présence de frottements l'énergie mécanique ne se conserve plus, a-t-on atteint une contradiction ? Non, précédemment nous avons seulement introduit les versions d'énergies (gravitationnelle, élastique) qui peuvent se transformer de façon « réversible » en énergie cinétique (c-à-d des énergies potentielles). Cependant, les frottements font partie des forces qui ont un travail qui n'est pas réversible avec l'énergie cinétique. Le travail exercé par les forces de frottements transforme de l'énergie cinétique sous forme de chaleur. La chaleur est une forme de stockage anarchique de l'énergie (agitation désordonnée des atomes) qui n'est pas mobilisable de manière efficace (concept d'entropie que vous pouvez étudier dans un cours de thermodynamique). La chaleur se répartit aussi bien dans l'objet étudié que dans l'environnement. Dès lors, si l'on considère comme système d'étude notre objet *avec* son environnement alors l'énergie totale (potentielle, cinétique *et* chaleur) est conservée.

• C4.4 – Distance d'arrêt

Un bloc de masse m est lancé sur une table horizontale avec une vitesse initiale \vec{v}_0 . Soit μ le coefficient de friction entre la table et le bloc. On se propose de calculer la distance totale parcourue (L) par le bloc à l'aide de deux méthodes différentes.

1) Méthode des équations horaires

- a) Calculer l'expression de la force de frottement \vec{f} .
- b) Établir l'équation différentielle contrôlant l'évolution de la vitesse.
- c) Calculer l'équation horaire de la vitesse.
- d) En déduire le temps nécessaire au bloc pour s'arrêter.
- e) Calculer l'équation horaire du mouvement.
- f) En déduire la distance totale parcourue par le bloc avant arrêt.

2) Méthode des énergies

- a) Calculer l'expression de la force de frottement \vec{f} .
- b) Calculer la variation d'énergie cinétique entre l'instant initial où le bloc est lâché et l'instant final où il s'arrête.
- c) Calculer le travail de la force de frottements entre ces deux mêmes instants.
- d) À partir du théorème de l'énergie cinétique calculer la distance totale parcourue par le bloc.

Réponses

4.5 Équation de la dynamique

Le raisonnement sur les énergies permet de retrouver les équations de la dynamique sans avoir recours à la seconde loi de Newton (le PFDC). Lorsque l'énergie mécanique se conserve ($dE_m = 0$), il suffit de remarquer que :

$$\text{forces conservatives : } dE_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dE_m}{dt} = 0} \quad (4.25)$$

Par exemple, pour la chute verticale d'un objet de masse m (exercice C2.2), si z représente la coordonnée de l'objet qui tombe avec un axe orienté vers le haut dont l'origine est au sol, également origine des énergies potentielles, on a :

$$E_m = mgz + \frac{1}{2}mv^2 = mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

or $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = mg\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z} = 0 \Rightarrow a = \ddot{z} = -g$

où on a utilisé la propriété $\frac{d\dot{z}^2}{dt} = \frac{d\dot{z}^2}{d\dot{z}} \frac{d\dot{z}}{dt} = 2\dot{z}\ddot{z}$. La solution triviale $\dot{z} = 0$ correspondant à l'état de repos n'est pas retenue.

Si des forces non conservatives sont présentes, il faut utiliser le théorème de l'énergie mécanique donné par l'éq.(4.24) :

forces non conservatives : $dE_m = dW^f \Rightarrow \boxed{\frac{dE_m}{dt} = \frac{dW^f}{dt}}$ (4.26)

Par exemple, pour une chute verticale avec frottements visqueux (exercice C3.4) on retrouve l'équation différentielle de la dynamique ainsi :

$$\vec{f} = -\eta\vec{v} \Rightarrow dW^f = -\eta\vec{v} \cdot d\vec{r} = -\eta\dot{z}dz \Rightarrow \frac{dW^f}{dt} = -\eta\dot{z}^2$$

or $\frac{dE_m}{dt} = mg\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z}$ et $\frac{dE_m}{dt} = \frac{dW^f}{dt} \Rightarrow mg\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z} = -\eta\dot{z}^2$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{\eta}{m}\dot{z} = -g \text{ soit } \dot{v} + \frac{\eta}{m}v = -g$$

On retrouve bien l'équation (3.21) de la question 2 de l'exercice C3.4.

4.6 Formulations de la physique moderne

On a vu lors de la section 4.3.4 que l'énergie mécanique est définie comme :

$$E_m = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \quad (4.27)$$

Cette équation peut être inversée afin d'exprimer la vitesse en fonction de la position via $U(r)$:

$$v(r) = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r))} \quad (4.28)$$

On peut voir cette équation⁵ comme une nouvelle formulation de la dynamique classique qui a un avantage certain par rapport au PFDC : cette équation est scalaire et du premier ordre alors que la seconde loi de Newton est vectorielle et du second ordre.

Les équations (4.27) et (4.28) indiquent l'existence d'une relation entre vitesse, position et énergie. Toute la dynamique du système physique est contenue dans ces équations (ou dans le PFDC). Pour cette raison on introduit la

5. Le signe + ou - dépend des conditions initiales, il n'y a donc bien qu'une seule équation.

notion de « portrait de phase » qui correspond à une représentation graphique de l'évolution temporelle du système physique dans le plan (r, v) . Plus vous avancerez dans vos études plus on vous demandera d'étudier les portraits de phase des systèmes dynamiques considérés.

La formulation scalaire de la dynamique fait que la physique moderne est basée sur une approche en terme d'énergie et non en terme de force. Cette nouvelle formulation est appelée « mécanique analytique ». On retrouve deux fonctions (ou opérateurs selon les domaines) légèrement différentes : le « lagrangien » d'expression $L = T - U$ et le « hamiltonien » d'expression $H = T + U$. Historiquement, la mécanique lagrangienne a été introduite et développée en première lors de la seconde moitié du XVIII^{ème} siècle par Euler et Lagrange (et bien d'autres). Basée sur le principe de moindre action ($\delta A = 0$ où $A = \int L dt$ est l'action), cette nouvelle formulation de la mécanique a eu de nombreuses applications en mécanique céleste, dans l'étude des systèmes avec contraintes (la mécanique des machines...) et est encore aujourd'hui à la base de la description relativiste du monde, à la fois au niveau de l'Univers dans sa globalité (relativité générale, cosmologie) qu'au niveau des particules élémentaires (théorie quantique des champs, physique des particules et des hautes énergies).

On a déjà tous les outils en main pour obtenir une version simplifiée de la fameuse équation d'Euler-Lagrange qui remplace le PFDC ou le théorème de l'énergie mécanique. Le lagrangien $L = L(r, v) = T(v) - U(r)$ est une fonction de deux à six variables selon la dimension d'espace du problème (en 3d il y a trois variables pour la position et trois pour la vitesse, $\vec{r} \rightarrow r_i$ avec $i = 1, 2, 3$ et $\vec{v} \rightarrow v_i$, en coordonnées cartésiennes $i = x, y, z$). Cependant chaque composante i de la position et de la vitesse sont reliées par la relation $v_i = dr_i/dt$, permettant aux résultats qui suivent d'être vérifiés pour chaque composante i . Ensuite, il suffit de remarquer que $dT/dv = mv$ et de se rappeler que $\vec{F} = -dU/d\vec{r}$ soit en terme de composante $dT/dv_i = mv_i$ et $F_i = -dU/dr_i$. Ainsi $\partial L/\partial v_i = dT/dv_i = mv_i$ et $\partial L/\partial r_i = -dU/dr_i = F_i$. Le PFDC $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ s'écrit en composante $F_i = d(mv_i)/dt$, soit $F_i - d(mv_i)/dt = 0$ ce qui donne :

$$\text{équation simplifiée d'Euler-Lagrange} \quad \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = 0 \quad (4.29)$$

La véritable équation d'Euler-Lagrange a la même forme mais les composantes r_i et v_i sont remplacées par des « coordonnées généralisées » dont la portée est bien plus profonde que la présentation artificielle donnée ici. Vous trouverez les détails et une dérivation rigoureuse de cette équation dans un ouvrage de mécanique analytique.

La mécanique hamiltonienne, développée par Hamilton et Jacobi (et bien d'autres) dans la première moitié du XIX^{ème} siècle, est aujourd'hui à la base de la mécanique quantique et de l'étude de la complexité que l'on nomme en physique : systèmes dynamiques, théorie du chaos ou encore physique non-linéaire. Ces domaines de la physique sont toujours en pleine expansion.

4.7 Exercices

E4.1 – Chute verticale

Une masse m est lancée verticalement avec une vitesse initiale v_0 .

1) Si on néglige les frottements, calculer en raisonnant sur les énergies :

- La hauteur maximale atteinte,
- la vitesse lorsque le projectile repasse par son point de lancement,
- la vitesse à une distance d inférieure au point de lancement.

(A.N. : $m = 200\text{ g}$, $v_0 = 10\text{ ms}^{-1}$, $g = 10\text{ ms}^{-2}$ et $d = 15\text{ m}$.)

2) Reprendre les deux premières questions si on suppose que le projectile est soumis à une force de frottement d'intensité constante f . (A.N. : $f = 0.5\text{ N}$)

E4.2 – Tracteur

Un tracteur tire un traîneau rempli de bois sur une distance horizontale $L = 20\text{ m}$. Le poids total vaut $P = 14700\text{ N}$. Le tracteur exerce une force constante $F_T = 5000\text{ N}$ à un angle $\alpha = 37^\circ$ par rapport à l'horizontale. Une force de frottement $F_f = 3500\text{ N}$ s'oppose au mouvement.

- Trouver le travail effectué par chaque force qui agit sur le traîneau et le travail effectué par toutes les forces.
- Quelle est la vitesse du traîneau après la longueur L si la vitesse initiale est de $v_0 = 2\text{ m/s}$?

E4.3 – Vol en planeur

Un pilote et son planeur volent à la vitesse v_0 que l'on supposera constante, et descendent de 2 km d'altitude. La finesse du planeur est de 38 (le planeur descend de 1 unité pour 38 unités de distance horizontale parcourue). On suppose que le mouvement est rectiligne.

- Calculer le travail des forces de frottements lors de ce mouvement.
- Justifier pourquoi la force des frottements est constante. En déduire l'intensité de la force de frottements.
- Le planeur est pris dans une "pompe" et remonte à son altitude de départ, toujours à vitesse constante. Estimer le travail fourni par les courants ascendants.

E4.4 – Prix d'une montée en ascenseur

Un ascenseur transportant 10 passagers s'élève de $h = 80\text{ m}$ en $\Delta t = 3$ minutes. Chaque passager a une masse $m_P = 80\text{ kg}$, l'ascenseur a une masse de $m_A = 1000\text{ kg}$. Calculer la puissance de son moteur et le prix de la montée si le kWh coûte 15 centimes.

E4.5 – Puissance développée par une voiture en montée

Une voiture monte sur une route inclinée de $\alpha = 3^\circ$ avec une vitesse constante $v = 45\text{ km/h}$. La masse de la voiture est $m = 1000\text{ kg}$. Quelle est la puissance développée par son moteur ? Quel est le travail après $\Delta t = 10\text{ s}$?

E4.6 – Montée en télési

On considère un skieur de masse $m = 80\text{ kg}$ sur un télési permettant de remonter une pente constante ($\alpha = 20^\circ$) et de longueur $L = 500\text{ m}$. Le télési exerce une force de traction \vec{F} de module $F = 400\text{ N}$, transmise au skieur par

la perche et faisant un angle $\beta = 30^\circ$ avec la pente. On néglige la phase d'accélération et on suppose que le skieur remonte la pente à la vitesse constante $v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$. Il est également soumis à une force de frottement fluide constante $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$. Le skieur étant considéré comme un point matériel, on suppose que toutes les forces s'exercent en son centre de gravité G .

- 1) Faire un dessin de la situation. Effectuer le bilan des forces exercées sur le skieur, donner leurs projections suivant les vecteurs de la base cartésienne choisie (judicieusement) et calculer leur norme.
- 2) Donner l'expression de λ en fonction de v_0 , α , β , F , m et g .
- 3) Déterminer l'expression littérale et la valeur du travail de chacune des forces.
- 4) La ligne de téléski peut faire remonter jusqu'à 50 skieurs de masse moyenne m simultanément. Déterminer la puissance maximale du moteur de la remonté mécanique.

E4.7 – Force et produit vectoriel

Montrer que la force $\vec{F} = k \vec{u} \wedge \vec{v}$, où k est une constante, \vec{u} un vecteur unitaire constant et \vec{v} le vecteur vitesse d'une particule, ne change pas l'énergie cinétique de la particule. Quelle est la trajectoire de la particule ?

E4.8 – Énergie potentielle

Calculer l'énergie potentielle associée aux forces centrales suivantes :

- 1) $\vec{F}_1(r) = k_1 r \vec{u}_r$,
- 2) $\vec{F}_2(r) = k_2 / r^2 \vec{u}_r$.

E4.9 – Force linéaire dans le temps

Une force $\vec{F} = 6t \vec{u}_x N$, linéaire dans le temps, agit sur une particule dont la masse est 2 kg . La particule est initialement au repos.

- 1) Trouver le travail fait par cette force durant les deux premières secondes.
- 2) Calculer le gain en énergie cinétique.
- 3) Vérifier la validité du théorème de l'énergie cinétique.

E4.10 – Parachutiste

Un parachutiste de masse $m = 100 \text{ kg}$ est largué sans vitesse initiale à une altitude de 4000 m . Le parachutiste déclenche l'ouverture de son parachute à 1000 m . On appellera h la hauteur de chute libre et on prendra la position d'ouverture comme origine de l'axe vertical des positions et comme origine des énergies potentielles. On raisonnera à une dimension jusqu'à la question 10.

- 1) Si on néglige les frottements, calculer la vitesse du parachutiste au moment de l'ouverture :
 - a) à partir d'un raisonnement sur les équations horaires (PFDC),
 - b) à partir d'un raisonnement sur les énergies.
- 2) La vitesse mesurée au moment de l'ouverture est en fait $v_L = 200 \text{ km.h}^{-1}$. Calculer le travail des forces de frottement et en déduire l'intensité de la force de frottement si elle est supposée être constante.
- 3) On suppose que le parachutiste est soumis à une force de frottements du type $\vec{f} = -k \vec{v}$. Établir l'équation différentielle contrôlant l'évolution des vitesses en utilisant un raisonnement énergétique puis en utilisant le PFDC.

- 4) Calculer l'équation horaire des vitesses. En déduire que la vitesse du parachutiste tend vers une vitesse limite v_L . Donne une représentation graphique de $v(t)$. On notera $\tau = m/k$ le temps caractéristique de la variation de vitesse.
- 5) Lorsque $t = \tau$ calculer le rapport $v(t = \tau)/v_L$?
Au bout de combien de temps la vitesse sera-t-elle à moins d'un pour cent de la vitesse limite ?
- 6) Calculer l'équation horaire de la trajectoire $x(t)$. Lorsque $t \rightarrow 0$ montrer que la distance varie avec le carré du temps. Justifier physiquement ce résultat. Tracer sommairement la fonction $x(t)$.
- 7) Calculer approximativement le temps de chute.
- 8) Calculer les énergies cinétiques et potentielles en fonction du temps.
- 9) Calculer la dépendance temporelle du travail des forces de frottements par deux méthodes différentes (calcul direct et théorème de l'énergie mécanique).
- 10) Au moment du largage l'avion se déplace. Décrire succinctement les aspects bidimensionnels du problème.

E4.11 – Bilans énergétiques

Une particule matérielle M de masse m est déposée au point A_0 à l'altitude h sur un plan incliné (voir figure 4.8).

- 1) La particule parvient-elle au point A_1 d'altitude $h' > h$ en supposant qu'elle glisse sans frottement sur le plan ?
- 2) Le point matériel est maintenant mis en contact (mais sans lien physique) avec un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0 . Le ressort est comprimé jusqu'à une longueur l puis bloqué, la particule est alors en A_0 . On libère le ressort. Le trajet $A_0A_1A_2$ est parfaitement glissant. Déterminer :
 - La longueur l du ressort pour que la particule atteigne A_1 avec une vitesse nulle.
 - La vitesse de cette particule en A_2 .
 - La distance d'arrêt $L = A_2A_3$, sachant qu'à partir de A_2 interviennent des frottements solides de coefficient de friction μ .

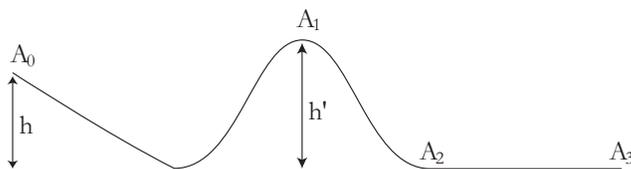


FIGURE 4.8 – Exercice E4.11

E4.12 – Rebond sur un ressort

On abandonne sans vitesse initiale un bloc de masse m à partir du sommet d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Le bloc glisse sans frottement et vient comprimer un ressort de constante de raideur k en bas du plan incliné. Le bloc va comprimer le ressort d'une longueur d avant de s'arrêter puis il sera propulsé par le ressort vers le haut le long du plan incliné. Soit L la longueur séparant initialement le bloc de l'extrémité du ressort.

- 1) Faire apparaître toutes les forces sur un schéma au moment où le ressort

est comprimé de façon maximale, ainsi que les axes et l'origine d'un repère pertinent pour l'étude du problème. Préciser clairement toutes vos notations.

- 2) Exprimer k en fonction de m , d , L et θ .
- 3) Calculer la vitesse du bloc juste avant qu'il touche le ressort.
- 4) Jusqu'à quelle hauteur le bloc remonte-t-il ?
- 5) Admettons maintenant la présence d'une force de frottements f de norme constante. Soit d' la nouvelle longueur de compression. Jusqu'à quelle hauteur ce bloc va-t-il remonter ?

E4.13 – Le looping star

Vous voulez devenir concepteur de manèges à sensations fortes. Votre premier contrat concerne l'étude d'un manège appelé « looping star ». Voici une première modélisation du problème relativement simple.

Un bloc de masse m glisse sans frottement le long d'un rail qui se termine par une boucle circulaire de rayon R . Le bloc est lâché sans vitesse initiale d'un point A situé à une altitude h au-dessus du point (B) le plus bas de la boucle. La forme du rail entre A et B importe peu.

- 1) Que vaut la vitesse v_B du bloc au point B ?
- 2) Le bloc, représenté par un point M , aborde la boucle et on repère sa position par l'angle ϕ entre OB et OM , où O est le centre de la boucle. Si on suppose que le bloc ne quitte pas le rail, donner l'expression de v la vitesse du bloc.
- 3) Quelle est la norme N de la réaction du rail sur le bloc, en fonction de m , g , R , h et ϕ ?
- 4) Montrer que N s'annule pour $\cos \phi_d = 2/3(1 - h/R)$. En déduire la valeur de v en ce point.
- 5) Décrire qualitativement le mouvement dans les 3 cas suivants : ($h < R$), ($R < h < 5R/2$) et ($h > 5R/2$). Que se passe-t-il pour $h = 2R$?

E4.14 – Utilisation des théorèmes

Une bille de masse m est susceptible de glisser (voir figure 4.9) :

- soit sans frottement à l'intérieur d'une portion de jante circulaire, quart de cercle de centre C et de rayon R .
- soit en présence de frottements solides de coefficient μ constant, sur un plan incliné d'angle α .

Déterminer dans chaque cas la vitesse minimale v_0 qu'il faut communiquer à la bille en M_0 afin qu'elle atteigne le point M_1 .

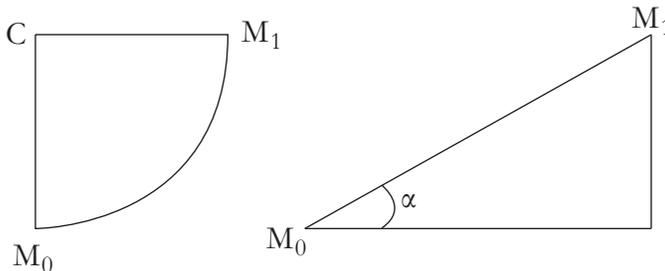


FIGURE 4.9 – Exercice E4.14

E4.15 – Le scooter sous-marin

Un scooter sous-marin est constitué d'un moteur, d'une hélice protégée par une grille et de deux poignées. Le plongeur tient les poignées dans ses mains et est ainsi entraîné sous l'eau sans effort. Le scooter est vendu en affichant une vitesse de 4 km/h et nous supposons qu'il tracte le plongeur avec une force constante \vec{F} . La masse m du plongeur et de son équipement est ajustée de façon à ce que le poids compense exactement la poussée d'Archimède à une certaine profondeur, $m = 100 \text{ kg}$.

1) Cas sans frottement : le plongeur se déplace sous l'eau en ligne droite suivant un axe Ox , dans un plan horizontal. La vitesse de déplacement étant faible, on fait l'hypothèse que l'on peut négliger les frottements fluide. À l'instant initial le plongeur part du point O , sans vitesse.

a) Appliquer la deuxième loi de Newton et déterminer l'accélération $a(t)$, la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ du plongeur.

b) À l'aide des résultats de la question précédente montrer que $v^2 = \lambda x$ où λ est à déterminer en fonction de F et m . Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

c) Ce modèle, avec l'hypothèse de frottements négligeables est-il physiquement acceptable? Justifier en fonction des réponses aux questions précédentes.

2) Prise en compte des frottements fluides que l'on modélise par une force $\vec{f} = -k\vec{v}$. Les conditions initiales sont celles de la question 1. Pour un déplacement suivant l'axe Ox :

a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

b) Déterminer la vitesse $v(t)$. Montrer qu'au bout d'un temps suffisamment long, la vitesse tend vers une vitesse limite constante v_L dont on déterminera l'expression en fonction de F et k (c'est la vitesse annoncée du scooter). Tracer l'allure de la courbe représentant $v(t)$.

c) Déterminer l'équation horaire des positions $x(t)$.

d) Que vaut cette fonction lorsque $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow +\infty$. On fera un raisonnement physique et un raisonnement mathématique en utilisant $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + (\alpha t)^2/2 + O(t^3)$.

e) Tracer l'allure de la courbe représentant $x(t)$.

f) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer la puissance P du scooter en régime permanent (lorsque $v = v_L$) en fonction de k et v_L . Calculer P en supposant que $m/k = 1 \text{ s}$.

3) Mouvement circulaire : le plongeur souhaite se déplacer dans un plan horizontal suivant une trajectoire circulaire de rayon r à la vitesse angulaire ω constante. On appelle O le centre du cercle. Le corps du plongeur est tangent au cercle. On prend en compte les frottements fluides.

a) Déterminer la position \vec{OM} , la vitesse \vec{v} et l'accélération \vec{a} du plongeur au point M , en coordonnées polaires dans la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$.

b) Appliquer la deuxième loi de Newton et montrer que le plongeur doit incliner son scooter d'un angle δ par rapport à son corps vers l'intérieur du cercle.

c) Déterminer δ en fonction de g , v_L et ω . Calculer δ et le rayon du cercle r si on suppose que la vitesse tangentielle est toujours de 4 km/h et que le plongeur fait un tour en 5 min .

E4.16 – Glissement d'un bloc sur un glacier

Un gros bloc de rocher glisse sur un glacier que l'on supposera avoir une pente uniforme faisant un angle α avec l'horizontale. Le bas du glacier est en contact avec de l'eau et le rocher sera considéré comme ponctuel. On choisira l'origine des temps et l'origine des positions à l'instant initial où le rocher commence à descendre le glacier avec une vitesse v_0 . On appellera (Ox) l'axe qui est le long de la pente du glacier avec une orientation positive vers la descente, et (Oy) l'axe perpendiculaire à (Ox) . Soit m la masse du rocher et L la longueur du glacier.

1) Cas sans frottement

- Dessiner la situation avec les forces impliquées à un instant t quelconque.
- En appliquant la seconde loi de Newton, déterminer $a(t)$, $v(t)$ et $x(t)$ pour la période où le rocher est sur le glacier. Représenter graphiquement ces fonctions.
- Calculer le temps de présence du rocher sur le glacier. En déduire la vitesse d'impact du rocher dans l'eau.
- À partir d'un raisonnement sur les énergies, retrouver l'expression de la vitesse d'impact du rocher dans l'eau.
- Applications numériques avec $m = 100 t$, $v_0 = 10 m.s^{-1}$, $g = 9,81 m.s^{-2}$, $L = 80 m$ et $\alpha = \pi/6$.

2) Frottements de contact solide-solide

On notera \vec{f}_1 la force de frottement de contact entre le glacier et le rocher. On rappelle qu'une telle force a une intensité constante $f_1 = \mu N$ où N est l'intensité de la force de réaction normale au support et μ est le coefficient de frottement.

- Dessiner la situation avec les forces impliquées à un instant t quelconque. En déduire l'expression de la force de frottements en fonction de μ , m , g et α .
- En appliquant le PFDC calculer l'expression de l'accélération que l'on notera a_0 dans la suite de l'exercice.
- Montrer que si $\mu = \tan \alpha$ le mouvement est rectiligne et uniforme.

Dans la suite de l'exercice on suppose que les frottements solide-solide sont plus efficaces que l'entraînement dû au poids ($a_0 < 0$). Donner les expressions littérales, les applications numériques seront demandées explicitement.

- On suppose que le rocher s'arrête sur le glacier avant d'atteindre l'eau. En utilisant la seconde loi de Newton, donner l'expression du temps de glissade du rocher sur le glacier. En déduire l'expression de la longueur minimale du glacier.
 - Retrouver ce résultat à partir d'un raisonnement sur les énergies.
 - Faites l'application numérique avec $\mu = 0.6$ et comparer ce résultat à la valeur de L donnée en 1. Conclusion.
 - En appliquant le PFDC, déterminer le temps de présence du rocher sur le glacier. En déduire la vitesse d'impact du rocher dans l'eau. Représenter graphiquement les fonctions $a(t)$, $v(t)$ et $x(t)$ pour la période où le rocher est sur le glacier.
- (Indication : c'est l'expression de la vitesse qui vous donnera le bon temps ...)

- h) À partir d'un raisonnement sur les énergies, retrouver l'expression de la vitesse d'impact du rocher dans l'eau.
- i) Applications numériques avec $\mu = 0.6$.

3) Prise en compte des frottements fluides

À présent on tient compte des frottements fluides tels que $\vec{f}_2 = -b\vec{v}$. Le rocher est donc soumis à deux forces de frottements.

- a) Calculer l'équation différentielle contrôlant l'évolution des vitesses à partir d'un raisonnement sur les énergies.
- b) Vérifier votre résultat à partir d'un raisonnement utilisant la seconde loi de Newton.
- c) En déduire les équations horaires des vitesses et des positions.
- d) Si on suppose que le rocher s'arrête sur le glacier donner les expressions du temps de glissade et de la distance parcourue.
- e) Est-ce le cas si $b = 10^4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$?
- f) Commenter le rôle de la masse du rocher sur le mouvement en comparant avec la situation des cas 1 et 2.

E4.17 – Potentiel de Higgs

Une particule de masse m est soumise à la force $\vec{F} = F(x)\vec{u}_x$ qui dérive du potentiel $V(x) = \frac{\lambda}{8}(x^2 - x_0^2)^2$ où x_0 et λ sont des constantes positives.

Ce potentiel joue un rôle très important en physique des particules où le boson de Higgs, récemment découvert au CERN, obéissant à un tel potentiel⁶, est responsable de la brisure de symétrie de la force électrofaible qui est l'union, à haute énergie, des forces électromagnétiques et nucléaires faibles...

- Étudier la fonction énergie potentielle $V(x)$. Donner sa représentation graphique.
- Déterminer l'expression de la force $F(x)$. En quels points s'annule-t-elle ?
- Quelles sont les positions d'équilibre ? Déterminer leur nature stable ou instable.
- À partir du PFDC, déterminer l'équation différentielle contrôlant la dynamique de m .
- Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.
- On s'intéresse au mouvement de m au voisinage du point d'équilibre stable x_0 . On effectue le changement de variable $\epsilon = x - x_0$. Montrer que cette nouvelle variable obéit à l'équation différentielle $\ddot{\epsilon} + \omega^2\epsilon = 0$ avec $\omega^2 = \lambda x_0^2$.
- Déterminer la forme de la solution $\epsilon(t)$. En déduire le comportement de $x(t)$ au voisinage de x_0 . Déterminer la période des oscillations et vérifier que l'expression trouvée est bien homogène à un temps.

(Si vous avez du mal avec cette question, lisez le chapitre 5 !)

E4.18 – Rotationnel, potentiel et circulations

Reprendre l'exercice C4.5 de l'annexe C en considérant le champ de force $\vec{F}(x, y) = (y^2 - x^2)\vec{u}_x + kxy\vec{u}_y$.

6. Dans ce contexte la variable x ne représente pas une position mais un champ quantique et relativiste...

Chapitre 5

Oscillateurs

et

mouvements périodiques

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

→ Définitions des mouvements périodiques. Notions de période, de fréquence et de pulsation.

→ Notions sur la mesure du temps.

→ Description des mouvements oscillants libres, amortis et forcés.

→ Notions d'amplitude maximale, de phase, de déphasage et de facteur d'amortissement.

→ Description du phénomène de résonance.

• Compétences

→ Étude de l'oscillateur harmonique simple. Régime libre. Ressort (C5.1) et pendule (E5.5).

→ Étude de l'oscillateur harmonique amorti. Régimes surcritique, critique et pseudopériodique (C5.2).

→ Étude de l'oscillateur harmonique forcé. Régimes transitoire et permanent. Analyse d'une résonance (C5.3).

→ Outils mathématiques :

* Équations différentielles du second ordre.

* Nombres complexes.

• Lecture conseillée

Notions de physique	Young et Freedman (2013)	Hecht (1999)
Mouvement périodique	ch.14 p437-471	ch.12 p445-464

5.1 Introduction et mesure du temps

• Définitions

Un autre type de mouvement, en général unidimensionnel, que l'on retrouve très fréquemment dans les phénomènes physiques, est le mouvement oscillant. Au niveau macroscopique, une masse accrochée à un ressort ou au bout d'un fil (pendule) décrivent des mouvements périodiques. Les vibrations de la matière sont des oscillations autour d'une position d'équilibre. Le courant électrique alternatif que nous utilisons dans notre vie de tous les jours a une amplitude qui varie dans le temps de façon périodique. Au niveau microscopique, tous les atomes et toutes les molécules, ou plutôt toutes les liaisons moléculaires entre atomes, vibrent, oscillent autour de leur position d'équilibre.

En mécanique, on décrit les oscillations par un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre stable notée x_{eq} . Les oscillations sont dites « périodiques » si l'intervalle de temps, appelé « **période** » et notée T , entre deux oscillations est constant. On introduit d'autres grandeurs liées à cette notion de période mais ayant un sens physique différent :

- La **fréquence**, notée f ou ν selon les domaines, est telle que $f = \nu = 1/T$
La fréquence est le nombre d'oscillations par unité de temps.

- La **pulsation**, notée ω , est telle que $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$

Elle peut parfois être associée à une vitesse angulaire. Par exemple, lors de l'étude du mouvement circulaire d'un point M à la vitesse angulaire ω , les coordonnées $x = R\cos\omega t$ et $y = R\sin\omega t$ ont un mouvement périodique de pulsation ω . Dans tous les cas ω est une **fréquence angulaire**.

• Mesure du temps

Qu'est-ce que le temps ? Voici une question bien difficile à laquelle nous ne pouvons pas donner de réponse rigoureuse, unique et satisfaisante. La seule chose que l'on constate c'est qu'il passe, qu'il s'écoule... En revanche, les physiciens peuvent s'attaquer plus facilement au problème de la mesure du temps.

Comment mesurer le temps qui passe ? Si on est dans une pièce noire sans outils et sans montre, on peut essayer de compter. Cependant, dire ou penser « 1 » ne prend pas le même temps que le nombre « 1325678 ». Le fait de compter n'est donc pas une bonne méthode pour avoir une mesure fiable du temps car le temps mis pour prononcer chaque nombre n'est pas périodique. Toujours dans cette pièce noire, une autre solution bien plus fiable serait de compter les battements de notre cœur. En moyenne, il bat 60 fois par minute ce qui pourrait servir de définition de la seconde ! Malheureusement ça n'est qu'en « moyenne », pendant notre sommeil ou après un effort ce rythme change beaucoup, selon notre âge ou selon les individus cela change aussi. Le rythme des battements cardiaques n'est donc pas une bonne horloge, mais dans cette pièce noire c'est le mieux que l'on puisse faire...

L'astronomie a fourni pendant des millénaires les meilleures horloges. Le jour vient de la rotation de la terre sur elle-même, le mois, du cycle lunaire,

l'année, du cycle des saisons c-à-d de la rotation de la terre autour du soleil. Les divisions plus petites que le jour requièrent le recours à des appareils comme les clepsydres, les sabliers, les pendules ou les montres mécaniques à ressorts et plus récemment les montres à quartz. L'ensemble de ces méthodes de mesure du temps ont en commun la nécessité d'être liées à un phénomène périodique, quelque chose qui se répète dans le temps. Malheureusement l'ensemble de ces rythmes, de ces cycles, de ces appareils répétitifs subissent des perturbations qui ne rendent pas le phénomène parfaitement périodique...

Comment définir la seconde ? Cette question est loin d'être triviale. Aujourd'hui, on essaye de classer les horloges par ordre de mérite. On mesure la périodicité d'un phénomène pour de nombreuses horloges différentes puis on essaye d'identifier la plus « stable », c-à-d celle dont la période est la moins perturbée, celle qui subit le moins de fluctuations. On fait des statistiques et on choisit celle qui à l'écart-type le plus faible possible. Depuis quelques dizaines d'années (1967) ce sont les horloges atomiques qui l'emportent, bien que la fréquence des pulsars¹ a failli leur ravir la première place il y a quelques années. Malheureusement la définition précise de la seconde, aujourd'hui, fait appel à des notions de physique atomique que vous ne connaissez pas encore. En simplifiant, on peut dire que la seconde est proportionnelle à la période d'une onde associée à la désexcitation (entre deux niveaux d'énergies) de l'atome de césium 133... *Retenez simplement que la mesure du temps nécessite l'emploi d'horloges qui sont des appareils associés à des phénomènes périodiques.*

Remarques sur le mètre et la mesure des distances

En voyant la complexité de la définition de la seconde on peut se demander s'il en est de même pour l'unité de distance « mètre », allez sur le web ou wikipedia pour forger votre opinion. Dans la vie de tous les jours, pour mesurer une longueur on utilise une règle ou un « mètre » de couturière ou de maçon. Ce type d'appareils n'est rien d'autre qu'un mètre « étalon » et c'est ainsi qu'on a défini le mètre pendant longtemps. Avec la découverte de la relativité et du principe d'Einstein (voir chapitre 1 section 1.2) on définit aujourd'hui le mètre à partir de la seconde et de la valeur de c la vitesse limite relativiste. En mécanique classique la mesure des distances ne pose pas de problème particulier et peu importe la véritable définition du mètre. En relativité, la notion de distance est à manier avec beaucoup de précautions mais ceci est une autre histoire...

• Oscillateurs harmoniques

L'oscillateur est dit « harmonique » si les oscillations peuvent être décrites par une fonction sinusoïdale. La description mathématique est alors relativement simple tout en permettant une description physique très proche de la plupart des phénomènes réels. Cependant, dans certaines situations où les frottements ne sont pas négligeables et lorsque le système physique est soumis à des contraintes, le mouvement peut rester périodique sans être sinusoïdal : les oscillations sont dites « anharmoniques ».

1. Un pulsar est une étoile à neutron résultant de l'explosion d'une étoile (supernova) qui émet un flash (rayon X) le long de son axe de rotation à intervalle très régulier.

Dans ce chapitre, nous traiterons uniquement les oscillateurs harmoniques, dans le cas le plus simple (« oscillateur harmonique libre »), dans les situations où il y a des frottements (« oscillateur harmonique amorti ») et lorsqu'une force extérieure fournit de l'énergie au système (« oscillateur harmonique forcé »). Nous prendrons l'exemple d'une masse accrochée à un ressort, mais l'ensemble des calculs réalisés et des résultats obtenus pourront être aisément transposés à d'autres domaines de la physique (électricité, optique, ondes, physique atomique, mécanique quantique...).

Les ressorts que nous allons étudier ont un mouvement unidimensionnel. On nommera x l'axe du mouvement. Le point d'étude M , associé à une masse m est repéré par la variable $x(t)$. Le centre du mouvement oscillant correspond à la position d'équilibre x_{eq} du ressort. Pour un ressort en position horizontale, cette position d'équilibre correspond à la longueur à vide du ressort. Si le ressort n'est pas horizontal, le centre du mouvement oscillant correspond à l'équilibre statique (position au repos).

La force de rappel \vec{F} est proportionnelle à l'écart entre la position du ressort et la position à vide. L'expression de cet écart, c-à-d de la force de rappel \vec{F} , dépend de l'origine choisie pour l'axe x (voir chapitre 3, section 3.1.2, équation (3.9)). Si l'origine est choisie au point d'accroche du ressort on a $\vec{F} = -k\Delta x \vec{u}_x = -k(x - L_0) \vec{u}_x$. Si l'origine est choisie au niveau de la position à vide du ressort, l'expression mathématique de \vec{F} se simplifie et devient $\vec{F} = -kx \vec{u}_x$. Pour des ressorts non horizontaux, il peut être utile de choisir une autre origine du repère comme la position d'équilibre statique. Avec ce choix, l'expression de l'équation horaire du mouvement sera particulièrement simple au détriment de l'expression de \vec{F} qu'il faut alors traiter avec soin (voir les exercices E5.7 et E5.3 où $\vec{F} = -k\Delta x \vec{u}_x$ mais $\Delta x = x + cste \neq x - L_0$).

Dans la suite de ce chapitre pour simplifier les expressions mathématiques à traiter, nous travaillerons avec des ressorts horizontaux et une origine prise au niveau de la longueur à vide ($\vec{F} = -kx \vec{u}_x$). Nous répéterons les formules finales avec $\Delta x(t)$ lorsque cela s'avérera nécessaire.

Avant de se lancer dans les calculs, il faut raisonner pour essayer de comprendre la situation, surtout si l'on n'est pas familier avec les forces de rappel des ressorts. La figure 5.1a montre un ressort en extension alors que la figure 5.1b présente un ressort en compression. Dans les deux situations la force a la même expression car on remarquera que x est positif pour le ressort en extension ce qui implique $\vec{F} \sim -\vec{u}_x$, et que x est négatif pour le ressort en compression impliquant alors $\vec{F} \sim +\vec{u}_x$. On comprend donc que cette force, proportionnelle à la position (ou plutôt, au déplacement qui est la différence de position par rapport à la longueur à vide), change de sens selon que le ressort soit en compression ou en extension mais ce changement de sens est parfaitement pris en compte par l'expression de \vec{F} .

Un autre point important est de comprendre le sens physique de la constante de raideur k . Cette constante caractérise la facilité ou la difficulté que l'on va avoir pour étirer ou comprimer le ressort. La dimension de k , $[k] = [F/x]$, indique que c'est une force par unité de longueur que l'on exprime en N/m .

En fait, ce chapitre va être exclusivement présenté sous la forme d'exercices

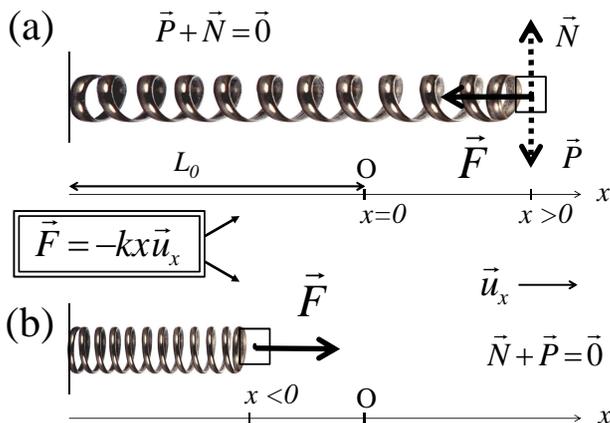


FIGURE 5.1 – Forces de rappel pour un ressort étiré (a) ou comprimé (b)

de cours car la difficulté principale réside dans les aspects calculatoires que vous devez à présent apprendre à maîtriser. Cette présentation inhabituelle vise à favoriser vos capacités à résoudre des problèmes traitant les mouvements périodiques. Avant de passer au chapitre suivant vous devez être capable de faire ces exercices de cours sans regarder les corrections (avec un bémol pour C5.3).

5.2 Oscillateur harmonique simple : régime libre

• Exercice de cours C5.1

Soit un ressort de longueur au repos l_0 , de constante de raideur k , en position horizontale sur un support, dont un des côtés est fixé au mur et sur l'autre on attache une masse m . On néglige les frottements. On choisira l'origine de l'axe horizontal x égale à la position de la masse m lorsque le ressort est au repos.

1) **Analyse dimensionnelle** – La période du mouvement oscillatoire T ne peut dépendre que des quantités physiques caractérisant le système masse+ressort, à savoir l_0 , m et k . En raisonnant sur les dimensions des diverses quantités, trouver la relation les reliant à la période T à un facteur numérique près.

2) **PFDC** – Faire un dessin avec toutes les forces présentes au niveau de la masse m . Appliquer alors la seconde loi de Newton et projeter cette relation sur l'axe horizontal afin d'en déduire l'équation différentielle du mouvement.

3) **Raisonnement énergétique**

a) Calculer l'énergie mécanique E_m du système en fonction de m , k , x et \dot{x} .

b) Comment E_m varie avec t ? Retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir du calcul de dE_m/dt .

4) Calculer les solutions de cette équation différentielle. En déduire l'expression de la période T du mouvement.

5) En déduire les équations horaires des vitesses et des accélérations. Donner la vitesse et l'accélération maximales de la masse, et la force de rappel maximale.

6) Calculer $x(t)$, $v(t)$ et $a(t)$ pour les conditions initiales (CI) suivantes :

a) le ressort est lâché sans vitesse initiale de la position $x(0) = x_0 > 0$.

- b) le ressort est comprimé de la valeur $x_0 < 0$ sans vitesse initiale.
- c) la masse est lancée de sa position d'équilibre dans le sens de l'élongation avec une vitesse initiale v_0 .
- d) cas général : le ressort est lâché de la position x_0 avec la vitesse \vec{v}_0 .
- 7) Applications numériques et représentations graphiques
- a) Représenter graphiquement les équations horaires des positions $x(t)$ pour les différentes conditions initiales, avec les valeurs suivantes : $k = 1 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ g}$, et $x_0 = 10 \text{ cm}$ (6a), $x_0 = -10 \text{ cm}$ (6b), $v_0 = 1 \text{ m/s}$ (6c). Pour la question 6d on prendra $x_0 = 0,1 \times \sqrt{3}/2 \text{ m}$ et $\|\vec{v}_0\| = 0,5 \text{ m/s}$ sachant que le ressort est initialement étiré et lancé en direction de sa position d'équilibre. On calculera dans ce cas les valeurs de x_m et de la phase ϕ .
- b) En prenant comme référence le cas de la question 6a, donner les équations horaires de chaque cas en faisant bien apparaître le x_m commun (défini positif) et le déphasage ϕ .
- c) Faire des représentations graphiques sur une même figure pour $v(t)$ et $a(t)$, pour les cas 6a et 6d seulement, mais on prendra pour axe des abscisses la quantité $\omega_0 t$.

Réponses

5.3 Oscillateur harmonique amorti

• Exercice de cours C5.2

On reprend l'exercice précédent, en supposant à présent qu'il y a une force de frottements visqueux qui freine le mouvement de la masse accrochée au ressort.

On suppose que cette force de frottements est du type $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

1) **Analyse dimensionnelle** – On a vu avec l'oscillateur harmonique (simple) que les oscillations sont caractérisées par une pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2\pi/T$. À présent une nouvelle constante dimensionnée, α , entre en jeu. Montrer que la constante $\tau = 2m/\alpha$ est homogène à un temps.

2) **PFDC** – Faire un dessin avec toutes les forces présentes au niveau de la masse m . Appliquer alors la seconde loi de Newton et projeter cette relation sur l'axe horizontal afin d'en déduire l'équation différentielle du mouvement (en fonction de ω_0 et τ).

3) **Raisonnement énergétique**

a) Calculer l'énergie mécanique E_m du système en fonction de m , k , x et \dot{x} .

b) Comment E_m varie avec t ?

c) Calculer le travail élémentaire des frottements en fonction de \dot{x} et dx .

d) Retrouver l'équation différentielle du mouvement avec le calcul de dE_m/dt .

4) Déterminer le polynôme caractéristique et montrer qu'il y a trois familles de solutions distinctes.

5-7) Pour chaque famille de solution : 5 $\rightarrow \tau\omega_0 < 1$; 6 $\rightarrow \tau\omega_0 = 1$; 7 $\rightarrow \tau\omega_0 > 1$

a) Déterminer l'équation horaire des positions $x(t)$ solution de l'équation différentielle trouvée aux questions 2 et 3d.

b) En déduire les équations horaires des vitesses et des accélérations.

c) Calculer les constantes d'intégration dans le cas général correspondant aux conditions initiales suivantes : $x(t=0) = x_0$ et $v(t=0) = v_0$.

d) Représenter graphiquement les équations horaires des positions $x(t)$, des vitesses $v(t)$ et des accélérations $a(t)$, avec les valeurs numériques suivantes :

- conditions initiales : $x(t=0) = x_0 = 0,1 \text{ m}$ et $v(t=0) = 0 \text{ m/s}$.

- caractéristiques du système physique : $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10 \text{ s}^{-1}$ et

$$5 \rightarrow \tau = 10^{-2} \text{ s} ; \quad 6 \rightarrow \tau = 10^{-1} \text{ s} ; \quad 7 \rightarrow \tau = 1 \text{ s}.$$

8) Étudier le comportement de l'énergie dans le cas faiblement amorti $1 \ll \tau\omega_0$.

Réponses

5.4 Oscillateur harmonique forcé : résonance

L'oscillateur harmonique forcé est le système le plus simple pour analyser le phénomène de résonance que l'on retrouve en permanence dans le monde physique. Au niveau macroscopique une résonance se manifeste en général par un mouvement de vibration mécanique à une fréquence bien définie. Les vibrations des objets sont à tout instant présentes mais, en général, on ne les ressent pas car leurs amplitudes sont en dessous de notre seuil de détection sensoriel. Dans certaines situations, l'excitation extérieure, responsable des vibrations, atteint une fréquence particulière (appelée fréquence de résonance) qui résulte en une augmentation de l'amplitude des vibrations. Cette forte augmentation de l'amplitude des vibrations nous permet de les ressentir et constitue ce qu'on appelle le phénomène de résonance.

Par exemple, dans une voiture, vous pouvez avoir l'impression qu'elle vibre plus à certaines vitesses qu'à d'autres... En fait, tout objet, tout matériau, possède des fréquences de résonance, et si l'objet considéré est excité à une de ces fréquences là, l'amplitude des vibrations augmente fortement. Dans les cas les plus extrêmes la structure du système physique peut être ébranlée voire brisée : des verres peuvent être brisés par le son de la voix de certaines cantatrices ou par un mouvement de rotation sur le bord du verre, des ponts se sont effondrés sous les pieds de troupes militaires marchant à pas cadencés... Si vous construisez plus tard des machines, l'étude des fréquences de résonance sera une de vos préoccupations majeures !

Au niveau microscopique, l'absorption ou l'émission de lumière par la matière se fait à certaines fréquences précises (dites « fréquences propres² ») ce qui est une manifestation des propriétés ondulatoires et quantiques de la matière et de la lumière. Une façon simple d'interpréter ces propriétés est de les voir comme des phénomènes de résonance. La couleur des objets vu par nos yeux résulte de l'existence de fréquences propres caractéristiques des atomes situés à la surface de ces objets ! C'est ainsi que de la lumière « blanche » devient colorée après réflexion sur la matière : certaines fréquences sont « sélectionnées » par résonance. Il y a énormément de phénomènes microscopiques associés à des résonances.

En électronique on utilise couramment des composants qui permettent des phénomènes résonnants. Dans un cours d'électrocinétique vous pourrez étudier que les circuits électriques composés de résistances, de condensateurs et de bobine à induction (les fameux circuits *RLC*) peuvent être résonnants selon la fréquence du générateur électrique alternatif (lié à la force excitatrice que nous verrons plus bas) et les valeurs des composants électroniques du circuit (caractérisant le système physique). L'exercice E5.10 vous guide dans la compréhension de cette analogie électro-mécanique. Les électroniciens jouent avec les résonances afin de donner des propriétés diverses et variées à leurs systèmes.

Au niveau nucléaire, les particules instables (radioactives) n'ont pas une masse bien définie. On décrit ces particules par des résonances dont la position du

2. Fréquences propres et fréquences de résonances sont identiques pour l'interaction matière - rayonnement car les frottements sont inexistantes (voir l'équation (??) plus bas).

pic donne la fréquence propre associée à la valeur moyenne de la masse, et la largeur du pic à mi hauteur donne l'écart-type sur cette valeur moyenne, soit l'incertitude sur la masse avec un indice de confiance de 68%. La durée de vie d'un élément radioactif est directement reliée à cette incertitude sur la masse c-à-d à la largeur de la résonance.

Le phénomène de résonance se retrouve dans tous les domaines de la physique et même hors de la physique (allez sur le web ou wikipedia pour avoir une liste plus exhaustive). Cependant, la résolution détaillée du problème mathématique est malheureusement un peu lourde, elle fait appel à l'utilisation des nombres complexes, mais elle reste fort intéressante et permettra d'arriver naturellement aux propriétés des solutions résonantes qui doivent être connues et maîtrisées.

• Exercice de cours C5.3

On reprend l'exercice précédent, en supposant à présent qu'il y a une force extérieure \vec{F}_e , dépendante du temps, qui « excite » le système physique. On dit que le système est « forcé ». On suppose que cette force d'excitation agissant sur la masse accrochée au ressort est du type : $\vec{F}_e = F_m \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

Il faut prendre en compte la présence de frottements, nous verrons plus loin pourquoi... A.N. : $a_m = F_m/m = 1 \text{ m/s}^2$, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10 \text{ s}^{-1}$ et $\tau = 2 \text{ s}$.

- 1) Calculer l'équation différentielle du mouvement.
- 2) Déterminer l'équation horaire des positions $x(t)$.
- 3) Étudier la phase de la solution particulière obtenue précédemment.
- 4) Étudier l'amplitude de la solution particulière.
- 5) Représenter graphiquement les équations horaires des positions $x(t)$ pour les trois choix $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ et $\omega = 2\omega_0$, avec les conditions initiales : $x(t=0) = x_0 = 0,1 \text{ m}$ et $v(t=0) = v_0 = 0 \text{ m/s}$.

Réponses

5.5 Exercices

E5.1 – Oscillateur harmonique

Un bloc de masse m est attaché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée au mur. Le bloc glisse sans frottement sur un axe horizontal.

- 1) Établir l'équation du mouvement du bloc autour de sa position d'équilibre.
- 2) Donner la solution du problème sachant que la position du bloc est x_0 à $t = 0$ et qu'à cet instant sa vitesse est nulle.
- 3) Calculer la période des oscillations.

E5.2 – Relation vitesse - position

L'accélération a d'un corps se déplaçant le long de l'axe des x est donnée par $a = 4x - 2$. Au temps $t = 0$ le corps est en x_0 et la vitesse est v_0 .

- 1) Déterminer les équations horaires de la position $(x(t))$ et de la vitesse $(v(t))$. En déduire la vitesse en chaque point x ($v(x)$).
- 2) De manière astucieuse, trouver la vitesse en chaque point x . (Indice : éliminer la variable t dans votre équation différentielle.)

Quelle méthode préférez-vous ?

E5.3 – Oscillateur vertical en extension

Considérons un objet de masse m suspendu à un ressort, soumis à la force de rappel $\vec{F}_r = -kz\vec{u}_z$ et à la force de gravitation $\vec{F}_g = -mg\vec{u}_z$, où $k > 0$ est la constante de rappel et $g > 0$ l'accélération de la pesanteur. La position verticale de la masse est repérée par l'altitude z et sa vitesse est notée v .

- 1) À quel état du ressort correspond la valeur $z = 0$? Établir l'équation du mouvement. Montrer que l'on obtient une équation différentielle de la forme $\ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) = -g$, où t désigne le temps et ω une constante positive que l'on déterminera en fonction de k et m .
- 2) Résoudre cette équation différentielle avec les conditions initiales : $z(0) = 0$ et $v(0) = 0$. Quelle est la période d'oscillation T du mouvement obtenu ?
- 3) L'altitude $z(t)$ oscille entre une valeur minimale z_{min} et une valeur maximale z_{max} . Déterminer ces deux valeurs en fonction de m , g et k .
- 4) Calculer le travail de la force totale $\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_g$ entre les points d'altitudes z_{min} et z_{max} . Comment interprétez-vous le résultat obtenu ?
- 5) Déterminer l'énergie potentielle $U(z)$ dont dérive la force \vec{F} si $U(z = 0) = 0$.
- 6) Trouver l'altitude z_e pour laquelle la valeur de $U(z)$ est extrémale ; calculer $U_e = U(z = z_e)$ et tracer l'allure de la courbe $U(z)$. L'altitude z_e est-elle une position stable ? Trouver une autre méthode permettant de calculer z_e .
- 7) Donner l'expression de l'énergie totale en fonction de z et de v . Que vaut l'énergie totale au temps $t = 0$? Essayer d'interpréter cette valeur.
- 8) On considère maintenant que la masse m est également soumise à une force de frottement visqueux de type $\vec{F} = -b\vec{v}$. Établir la nouvelle équation du mouvement et la résoudre avec les mêmes conditions initiales que précédemment. Discuter les différents régimes obtenus.

E5.4 – Oscillateur multidimensionnel

On se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel M de masse m , se déplaçant dans l'espace sous l'action d'une force de rappel $\vec{F} = -k\vec{r}$, propor-

tionnelle au rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ repérant la position du point par rapport au centre attracteur O .

- 1) Établir et résoudre les équations du mouvement.
- 2) En supposant qu'à l'instant $t = 0$ le point M se trouve en \vec{r}_0 avec pour vitesse \vec{v}_0 , déterminer la trajectoire du point M .
- 3) Dans quelles configurations initiales, le mouvement se réduit-il à celui d'un oscillateur à un degré de liberté?
- 4) Calculer la période T de la trajectoire déterminée en 2). Cette période dépend-elle des conditions initiales?

E5.5 – Pendule

Un pendule simple est constitué d'une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur l et soumise à l'action de la pesanteur g . La position du pendule est repérée par l'angle orienté ϕ ($-\pi \leq \phi \leq \pi$ et $\phi = 0$ à l'équilibre). Dans la suite, on néglige les frottements et on s'intéresse au régime des petites oscillations.

1) À partir d'une analyse dimensionnelle trouver la relation liant la période T des (petites) oscillations du pendule et les quantités introduites précédemment, à un facteur numérique près.

2) *Raisonnement sur les forces*

a) Donner les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération de la masse m en utilisant un système de coordonnées polaires adapté au problème et que l'on aura pris soin de définir.

b) Utiliser la seconde loi de Newton pour obtenir, d'une part, une expression de la force de tension du fil, et d'autre part, l'équation différentielle régissant la variation temporelle de l'angle ϕ .

3) *Raisonnement sur les énergies*

Soit $U(\phi)$ l'énergie potentielle de la masse m , dont l'origine est choisie à la position d'équilibre ($U(0) = 0$). Soit h la hauteur par rapport à la position d'équilibre et v la vitesse de m .

a) Trouver la relation reliant h à l et ϕ . En déduire $U(\phi)$.

b) Trouver la relation reliant v à l et ϕ . En déduire une expression pour l'énergie cinétique de m ($T(\phi)$).

c) À partir de la conservation de l'énergie mécanique, calculer l'équation différentielle du mouvement.

4) En supposant que les oscillations sont de faibles amplitudes ($\sin \phi \approx \phi$), donner l'équation différentielle contrôlant l'évolution de ϕ . En déduire la période propre du mouvement et la solution générale pour $\phi(t)$. Les conditions initiales sont telles que le pendule est lâché de la position $\phi = \phi_i$ sans vitesse initiale.

E5.6 – Horloge à poids

Une horloge est constituée d'un pendule simple entretenu de période propre $2s$. Pour maintenir l'amplitude des oscillations constante, l'horloge puise son énergie dans l'énergie potentielle d'une masse de $1kg$ descendant d'une hauteur de $1m$ par semaine. La longueur du pendule est $l = 1m$.

1) Évaluer le travail des frottements au cours d'une oscillation.

2) La longueur d'un pendule simple peut varier avec la température. Quel est l'allongement Δl acceptable pour que l'horloge indique encore l'heure exacte à 10s près au bout d'un jour de fonctionnement?

E5.7 – Ressort vertical en compression

L'extrémité *inférieure* d'un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide L_0 est fixée à un support fixe S . Un objet de masse m est accroché sur son extrémité *supérieure*. On définit un axe vertical z , orienté vers le haut, ayant pour origine l'extrémité S du support.

1) Étude de l'équilibre statique

L'équilibre statique correspond au cas où il n'y a aucun mouvement. La masse m comprime le ressort qui est alors dans une position d'équilibre « statique » différente de la position d'équilibre « à vide ».

- Faire un dessin de la situation en représentant les différentes forces impliquées dans le problème.
- Déterminer la position d'équilibre statique z_{eq} de la masse en fonction des données du problème.
- Vérifier votre résultat par un raisonnement dimensionnel.

2) Étude de la dynamique sans frottement - PFDC

À l'instant initial, on pose la masse m sur l'extrémité *supérieure* du ressort vertical, sans vitesse initiale. On néglige les frottements.

- Faire un dessin de la situation en représentant les différentes forces impliquées dans le problème à un instant t quelconque. On précisera la position initiale et la position d'équilibre statique.
- À l'aide d'un raisonnement physique (sans calcul), déterminer la position minimale de la masse m .
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide de la seconde loi de Newton. Préciser la nature de cette équation. (La recherche des solutions sera faite à la question 4).

3) Étude de la dynamique sans frottement - énergies

- Exprimer l'énergie cinétique de la masse en fonction de la vitesse.
- Exprimer l'énergie potentielle du ressort (origine pour $z = L_0$) et l'énergie potentielle de pesanteur de la masse (origine pour $z = 0$).
- À partir de la conservation de l'énergie mécanique, déduire de la question précédente une expression de l'énergie cinétique en fonction de la position $z(t)$. (On utilisera les expressions de l'énergie mécanique initiale et à une position z quelconque).
- Utiliser le résultat précédent pour calculer le domaine de variation de $z(t)$. Où se situe z_{eq} dans ce domaine ?
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique.

4) Étude de la dynamique sans frottement - solution 1

- Déterminer l'équation horaire du mouvement $z(t)$.
- Calculer l'amplitude maximale z_m , la pulsation ω_0 et la période T_0 du mouvement. Commenter la relation entre la position d'équilibre statique et la solution particulière obtenue précédemment.
- Application numérique : $L_0 = 0,5\text{ m}$; $k = 45\text{ N/m}$ et $m = 0,2\text{ kg}$. Représenter graphiquement $z(t)$.

5) Étude de la dynamique sans frottement - solution 2

On effectue un changement de coordonnée (un changement de variable), en

définissant un nouvel axe vertical, noté x , orienté vers le haut et ayant pour origine la position d'équilibre statique.

- Donner la relation entre $x(t)$ et $z(t)$.
- Établir l'équation différentielle du mouvement avec la fonction $x(t)$, en utilisant la méthode de votre choix. Préciser la nature de cette équation.
- Calculer la solution $x(t)$. En déduire $z(t)$.

6) Étude de la dynamique avec frottements

À présent, le système est soumis à une force de frottements visqueux $\vec{f} = -b\vec{v}$.

- établir l'équation différentielle du mouvement en utilisant la méthode et la variable de votre choix.
- Déterminer l'équation horaire du mouvement $z(t)$, avec des conditions initiales identiques à celles des questions précédentes.
- Exprimer et calculer la pseudo-pulsation ω . Montrer qu'elle est peu différente de ω_0 si on prend pour l'application numérique $b = 0.08 \text{ N.s/m}$.
- Exprimer et calculer la phase du mouvement.
- Combien de temps faut-il pour que l'amplitude de l'oscillation soit inférieure à 1 mm ?

E5.8 – Liaison moléculaire

Deux atomes identiques, de masse m , interagissent par une force conservative dérivant du potentiel (énergie potentielle) de Lennard-Jones :

$$V(r) = V_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \quad (5.32)$$

où r est la distance entre les atomes et V_0 une constante positive.

- Étudier ce potentiel et donner sa représentation graphique.
- Calculer la force, appelée force de van der Waals, dérivant de ce potentiel.
- Montrer que cette force se réduit à une force de rappel élastique quand r est proche de la valeur d'équilibre r_0 . *Indication : poser $x = r - r_0$ et utiliser le développement limité $(1 + x/r_0)^{-\alpha} \simeq 1 - \alpha x/r_0$ afin de trouver $k \simeq 72V_0/r_0^2$.*
- Donner la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

E5.9 – Ressorts couplés

On considère une masse m reliée à deux ressorts mécaniques, de raideurs k_1 et k_2 , et longueurs à vide l_1 et l_2 , associés de deux façon différentes :

- en série : les deux ressorts sont suspendus bout à bout, le premier étant fixé à une paroi horizontale et la masse est accrochée au bout du second ;
- en parallèle : les deux étant suspendus à la paroi et accrochés à la masse (dans ce cas on supposera $l_1 = l_2$).

Pour chaque cas étudié :

- Faire un dessin et le bilan des forces quand le système est à l'équilibre. *Indice pour le cas en série : effectuer un bilan des forces au niveau de la masse et un autre au niveau du point d'accroche des deux ressorts.*
- Montrer que le système est équivalent à un système « masse-ressort », et déterminer la constante de raideur équivalente de ce dernier ainsi que la longueur à vide équivalente.
- Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution du système.

E5.10 – Analogie électro-mécanique

On considère les deux dispositifs suivants :

Dispositif A – Circuit RLC forcé en courant continu

Un condensateur de capacité C initialement déchargé est placé dans un circuit en série avec une résistance R , une bobine d'inductance L et un générateur de tension E . On néglige les résistances internes du condensateur, de la bobine et du générateur, et on fera attention à définir le condensateur et la bobine en convention récepteur. On prendra l'origine des temps au moment où on ferme le circuit (c-à-d quand le condensateur commence à se charger et le courant à s'établir).

Dispositif B – Ressort horizontal, amorti et forcé

Soit un ressort de longueur au repos l_0 , de constante de raideur k , en position horizontale, dont un des cotés est fixé au mur et sur l'autre on attache une masse m . Le ressort est soumis à une force de frottements visqueux du type $\vec{f} = -b \vec{v}$. Le ressort est aussi soumis à une force excitatrice F_e constante tendant à allonger le ressort. On choisira l'origine de l'axe horizontal (axe "x") égale à la position de la masse m lorsque le ressort est au repos. On prendra l'origine des temps au moment où la masse est immobile à la position de repos.

1) Établir les équations différentielles vérifiées, d'une part, par la charge q du condensateur dans le circuit électrique RLC, et d'autre part, par la position x de la masse m dans le système mécanique. Faire des schémas pour préciser vos notations et l'ensemble des relations nécessaires à l'établissement de ces équations différentielles.

2) Résoudre ces équations différentielles dans le cas où les paramètres vérifient une condition de pseudo-périodicité (régime amorti). On prendra soin de définir précisément les conditions de pseudo-périodicité, en explicitant clairement le coefficient d'amortissement τ , la pulsation propre ω_0 et la pseudo-pulsation ω . À l'aide des conditions initiales, on exprimera le déphasage ϕ en fonction de τ et ω , et les amplitudes maximales (q_m ou x_m) en fonction des solutions particulières (q_p ou x_p), de τ et ω .

3) À partir de l'expression obtenue pour $q(t)$, déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant. Déterminer par la suite l'expression des énergies emmagasinées par la bobine (W_L) et par le condensateur (W_C).

4) À partir de l'expression obtenue pour la position $x(t)$ de la masse m , déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$. Déterminer par la suite l'expression de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle élastique E_p .

5) Compléter le tableau donnant l'analogie électro-mécanique :

électrocinétique	Mécanique
$q(t)$	
	$v(t)$
L	
	k
R	
E	
	E_c
	E_p

E5.11 – Phénomène de battement : $\gamma = 0$ et $\omega \neq \omega_0$

Le phénomène de battement est très courant en électronique et dans le domaine des communications. Il consiste en une onde sinusoïdale dont l'amplitude est elle-même sinusoïdale. Le formalisme développé pour étudier les oscillations harmoniques forcés permet de voir ce phénomène. Il apparaît lorsque les frottements sont nuls, ce qui est le cas pour les oscillateurs microscopiques, et lorsque la fréquence excitatrice est différente de la fréquence propre.

Une masse m accrochée à un ressort de constante de raideur k est excitée par une force $F_e = F \cos \omega t$. Les frottements sont nuls. On posera $a_m = F/m$ et $\omega_0^2 = k/m$. À l'instant initial la masse est à la position $x_0 = 0$ sans vitesse.

- 1) Établir l'équation différentielle du mouvement.
- 2) Déterminer la solution homogène.
- 3) À partir de l'équation (??) montrer que la solution particulière de la forme $x_p(t) = K e^{rt}$ est telle que $K \in \mathbb{R}$ et $r = i\omega$.
- 4) Montrer que la phase de la solution particulière est nulle ($\phi_p = 0$) et que $K = a_m / (\omega_0^2 - \omega^2)$.
- 5) En utilisant les conditions initiales $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$, montrer que la solution générale peut être mise sous la forme : $x(t) = x_m (\cos \omega_0 t - \cos \omega t)$. Calculer l'expression de x_m .
- 6) En déduire que :

$$x(t) = 2x_m \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right)$$

- 7) Représenter graphiquement $x(t)$ avec $x_m = 1 \text{ m}$, $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ et $\omega = 6 \text{ s}^{-1}$.

E5.12 – Résonance sans frottements : $\gamma = 0$ et $\omega = \omega_0$

Une masse m accrochée à un ressort de constante de raideur k est excitée par une force $F_e = F \cos \omega t$ de pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$. Les frottements sont nuls. À l'instant initial la masse est lâchée de la position x_0 sans vitesse.

- 1) Établir l'équation différentielle du mouvement.
- 2) Déterminer la solution homogène.
- 3) À partir de l'équation (??) montrer que la solution particulière ne peut pas être de la forme $x_p(t) = K e^{rt}$ avec $K \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{C}$.
- 4) Montrer que la solution particulière peut être de la forme $x_p(t) = A t \sin \omega t$. En déduire l'expression de A en fonction de F , m et k . Représenter graphiquement $x_p(t)$ avec $A = 1 \text{ m/s}$ et $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$.
- 5) Déterminer l'équation horaire du mouvement. Quel est le destin du ressort ?

Chapitre 6

Impulsion

et

loi de conservation 2

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

- Impulsion/quantité de mouvement : définition.
- Notion de système isolé et conservation de l'impulsion.
- Notions élémentaires sur les chocs : force moyenne, temps caractéristique et taille caractéristique du choc.
- Conservation de l'impulsion. Cas à deux particules. Cas à N particules.
- Définitions du centre de masse et du référentiel du centre de masse.
- Collisions inélastiques et élastiques. Collision élastique 2d, angle de diffusion.

• Compétences

- Savoir appliquer le PFDC et le théorème de l'énergie cinétique afin de calculer les caractéristiques du choc (C6.1).
- Savoir appliquer la conservation de l'impulsion pour obtenir des informations sur les masses et les vitesses des particules impliquées (C6.2).
- Résolution de problèmes de collisions élastiques et inélastiques unidimensionnel (C6.3, C6.4).
- Étude de la collision élastique bidimensionnelle (C6.5).

• Lecture conseillée

Notions de physique	Young et Freedman (2013)	Hecht (1999)
Impulsion, chocs, collisions	ch.8 p241-277	ch.9 p341-346

6.1 Introduction

• Définition de l'impulsion

L'impulsion, notée \vec{p} , est définie par la relation :

$$\boxed{\vec{p} = m \vec{v}} \quad (6.1)$$

pour une particule de masse m et de vitesse \vec{v} . La dimension de $p = \|\vec{p}\|$ est $[p] = MLT^{-1}$, et son unité s'exprime en $kg.m/s$ (équivalent au $N.s$).

Nous ne ferons pas ici de distinction entre l'impulsion et la quantité de mouvement¹. Dans les ouvrages français, on peut parfois voir une nuance entre impulsion et quantité de mouvement, où l'impulsion correspond à l'expression relativiste de la quantité de mouvement : en relativité $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, mais $\gamma \rightarrow 1$ quand $v \ll c$. Dans la plupart des pays, l'impulsion prend un autre sens et correspond à une « variation d'impulsion » $\Delta \vec{p}$ se traduisant par le terme « impulse » en anglais. Dans ce cours l'impulsion est la quantité de mouvement et nous appellerons explicitement la variation d'impulsion la quantité $\Delta \vec{p}$.

Il est important de réaliser que l'énergie cinétique ($T = \frac{1}{2}mv^2$) et l'impulsion dépendent des mêmes quantités physiques, la masse et la vitesse, mais ont pourtant un sens physique très différent. La distinction entre ces deux quantités est loin d'être évidente, cela a même animé de longs débats du XVII^e au XIX^e siècles, « la querelle des forces vives », entre Descartes, Leibnitz et leurs différents partisans. Depuis plus d'un siècle on a compris que :

- L'énergie cinétique est une quantité scalaire (un nombre), qui correspond à l'énergie associée au mouvement, et qui n'est qu'une partie de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique se conserve si le système physique est conservatif. Nous verrons dans ce chapitre que l'énergie cinétique ne se conserve que lors de collisions dites « élastiques ».
- L'impulsion est une quantité vectorielle (un vecteur) et nous verrons qu'elle se conserve si le système physique est isolé.

• Conservation de l'impulsion

Lors de l'étude du principe d'inertie (première loi de Newton) nous avons défini le terme isolé : **un système est isolé s'il n'est soumis à aucune force extérieure**. Le principe d'inertie pouvait alors être formulé simplement en disant que : *si un système est isolé alors il possède un mouvement rectiligne et uniforme*.

Dans ce chapitre nous allons étudier des systèmes physiques qui ne seront pas associés à un seul point matériel mais à un ensemble de points. Cela va nous permettre d'étudier les interactions entre particules, et plus précisément, les chocs et les collisions entre objets. Dans ce cours nous introduisons une nuance²

1. La quantité de mouvement se traduit par « momentum » ou « linear momentum » en anglais.

2. Cette nuance *faible* n'est pas forcément faite dans les livres que vous pourrez lire.

entre « chocs » et « collisions » : le terme collision correspondra au cas où le système est isolé, alors qu'on réserve le mot choc pour une collision où le système n'est pas isolé.

Nous avons mentionné que la conservation de l'énergie, tout d'abord intuitée par les faits expérimentaux, peut être démontrée mathématiquement à partir de la propriété d'homogénéité du temps (invariance par translation dans le temps des équations de la dynamique). Dans le chapitre 4 nous avons montré qu'en présence de forces conservatives l'énergie mécanique se conserve.

De façon analogue, les résultats expérimentaux ont amené à considérer une seconde loi de conservation : la conservation de l'impulsion, qui est associée à la propriété d'homogénéité de l'espace (invariance par translation d'espace des équations de la dynamique), et que l'on peut vulgariser ainsi : une expérience physique qui donnait un certain résultat « ici », doit donner le même résultat « là-bas ». Cette propriété de l'espace et des lois de la physique peut être démontrée mais la démonstration, de niveau master, ne peut pas être menée ici. Ainsi, nous supposons que

l'impulsion totale du système se conserve si le système est isolé.

Dans la section suivante nous démontrerons la conservation de l'impulsion à partir du principe de l'action - réaction (troisième loi de Newton). Cette démonstration est parfaitement valable en mécanique classique. Cependant il faut noter que la conservation de l'impulsion est en fait beaucoup plus profonde et générale que le principe d'action-réaction. En effet, si l'on tient compte que les interactions sont caractérisées par de l'information/de l'énergie qui se propage à vitesse finie (la fameuse théorie de la relativité restreinte) alors la troisième loi de Newton n'est plus vraie. Néanmoins, l'homogénéité de l'espace n'est pas remise en cause par la relativité et la conservation de l'impulsion quant à elle reste parfaitement valable...

L'impulsion étant une grandeur vectorielle et l'espace ayant trois dimensions, cette loi de conservation de l'impulsion implique la conservation de trois nombres lors de l'évolution du système physique. Ces trois nombres correspondent aux trois composantes du vecteur impulsion totale.

On dit qu'un système physique est « quasi-isolé » s'il est soumis à un ensemble de forces extérieures qui se compensent ($\vec{F}_T^{ext} = \vec{0}$). Dans ce cas aussi, l'impulsion totale du système se conserve.

Cependant, avant d'étudier la conservation de l'impulsion et ses multiples implications nous allons nous intéresser au cas des chocs pour un système physique non isolé.

6.2 Chocs

• Force de choc et impulsion

Le concept d'impulsion permet d'analyser les forces pendant les chocs. En effet, impulsion et forces sont reliées par la seconde loi de Newton, le PFDC :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (6.2)$$

La variation d'impulsion par rapport au temps est égale à la somme des forces appliquées au système. **Lors d'un choc, la particule de masse m qui subit le choc, voit son impulsion passer de la quantité \vec{p}_i à la quantité \vec{p}_f pendant un laps de temps $\Delta t = t_f - t_i$. Durant cet intervalle de temps la force associée au choc \vec{F}_c domine toutes les autres forces qui pourraient être présentes.**

Au niveau microscopique, si les deux particules impliquées dans le choc sont du type électron, proton ou noyau d'atome, la force de choc correspond à une interaction fondamentale (électromagnétique ou nucléaire). Cependant, il apparaît plus commode de considérer comme système physique l'ensemble des deux particules qui effectuent le choc, ce qui permet alors de définir un système isolé et ainsi d'utiliser la conservation de l'impulsion. On étudiera cette situation dans la section sur les collisions.

L'étude des chocs concerne donc les objets macroscopiques. *La force de choc est une force approximative traduisant la résistance de la matière à la pénétration par une autre matière.* Par exemple, prenons un projectile venant heurter un mur. On s'intéresse au projectile seulement. Le projectile n'est pas un système isolé : au moment du choc, le projectile ne passe pas à travers le mur, le mur exerce une force sur lui et cela va changer son impulsion (ainsi que sa vitesse et son énergie). Le projectile n'est pas isolé car il subit une force extérieure. Il faut considérer le système « mur+projectile » pour avoir un système (quasi-)isolé.

Si le projectile est un œuf, la résistance du mur est telle qu'il exerce une force de choc qui va stopper l'œuf et l'éclater car la résistance de la structure de l'œuf est bien plus faible que la force de choc.

Si le projectile est une balle de tennis, la force de choc exercé par le mur va stopper la balle car elle ne traverse pas le mur. Cependant, comme la balle est élastique, elle se déforme, elle s'aplatit contre le mur : une partie de son énergie cinétique initiale est transformée en « énergie interne élastique ». Ensuite, la balle repart en sens inverse avec une vitesse proche mais inférieure à sa vitesse initiale car la balle et la surface du mur qui a été frappée sont légèrement plus chaudes : une partie de l'énergie cinétique a été transformée en chaleur.

Si le projectile est une boule de pétanque, elle va s'arrêter contre le mur et chauffer beaucoup. Si le mur est en brique la boule va même pouvoir y faire un trou selon la vitesse, l'impulsion et l'énergie données à la boule et selon la résistance du mur : la résistance du mur a été partiellement vaincue. Si le mur est en béton armé, c'est la boule qui peut être déformé, ou le mur et la boule, ou aucun des deux !

Ces exemples montrent, d'une part, que les situations macroscopiques sont diverses et variées, d'une complexité certaine et vont donc nécessiter de faire une étude approximative, et d'autre part, qu'il va falloir être rigoureux et attentif si on veut comprendre les rôles distincts joués par l'énergie et l'impulsion !

• Force de choc moyenne et temps caractéristique du choc

Le PFDC nous dit que $d\vec{p} \simeq \vec{F}_c dt$, car la force de choc domine les autres forces. Au niveau macroscopique (et non infinitésimal) on obtient :

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_i^f d\vec{p} \simeq \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_c dt \quad (6.3)$$

Si on suppose que la force de choc est constante \vec{F}_c^m , ce qui est une approximation assez grossière mais nous nous en contenterons dans le cadre de ce cours, on obtient **une relation simple entre la variation d'impulsion $\Delta \vec{p}$, la force de choc moyenne \vec{F}_c^m et l'intervalle de temps caractéristique du choc Δt** :

$$\boxed{\Delta \vec{p} \simeq \vec{F}_c^m \Delta t} \quad (6.4)$$

Pour comprendre ce qu'il se passe vectoriellement, supposons que le projectile soit stoppé lors du choc : $\vec{p}_f = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{p} = -\vec{p}_i = \vec{F}_c^m \Delta t$, soit que $\vec{F}_c^m \sim -\vec{p}_i$: la force de choc est opposée à l'impulsion initiale. Si $\vec{p}_f \neq \vec{0}$, la situation est plus compliquée car il faut raisonner à deux dimensions, dans le plan (\vec{p}_i, \vec{p}_f) , et l'éq.6.4 nous indique que $\vec{F}_c^m \sim \Delta \vec{p}$.

La force de choc exprime la résistance d'un objet sur un autre. En toute logique cette force de choc est associée à une force de réaction normale : $\vec{F}_c^m = \vec{N}$. La force de choc est donc perpendiculaire à la surface de contact entre les deux objets. Dans de nombreux cas, relativement simples, on comprend aisément la situation avec un tel raisonnement. Par exemple, on peut retrouver la loi de Descartes de la réflexion de la lumière grâce à cette propriété. Cependant, dans des situations plus complexes (voir exercice E6.4) il est difficile de connaître la direction normale à la surface de contact, ça n'est pas une donnée du problème. En revanche la connaissance de la variation d'impulsion permet de reconstruire la force de choc moyenne et, si cela nous intéresse, d'en déduire la normale de la surface de contact.

Si seule l'intensité de la force moyenne du choc nous intéresse, on peut utiliser la relation :

$$\|\Delta \vec{p}\| \simeq F_c^m \Delta t \quad \Rightarrow \quad F_c^m = \frac{\|\Delta \vec{p}\|}{\Delta t} \quad (6.5)$$

On constate alors qu'un projectile subissant une variation d'impulsion donnée ($\|\Delta \vec{p}\|$ constant) est soumis à une force de choc d'autant plus forte que le temps caractéristique du choc est court. En d'autres mots, plus l'objet qui arrête le projectile est mou (Δt est grand), moins la force moyenne de choc est violente. Ceci doit vous paraître évident ! Si vous sautez d'un plongeoir de

cinq mètres de haut, préférez-vous qu'il y ait de l'eau dans la piscine ou non ? Le temps d'amortissement, c-à-d le temps caractéristique de choc, n'est pas le même dans l'eau que sur du béton. L'eau résiste mais on arrive à pénétrer dedans surtout si notre surface de contact est petite, si on fait un plat, on pénètre moins, le temps caractéristique de choc est plus court, la force de choc augmente et l'endroit où on a tapé à plat chauffe beaucoup. Sur du béton le temps d'amortissement est très court, la force de choc est donc très forte au point que la résistance de la structure de notre corps peut être dépassée (voir exercice E6.5).

• Énergie et taille caractéristique du choc

La quantité physique qui lie force et énergie est le travail $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Mais le théorème de l'énergie cinétique affirme que $W = \Delta T$, et si on considère que la force de choc domine toutes les autres forces, on a :

$$\Delta T = T_f - T_i = \int_i^f \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

Si à présent on considère la force moyenne de choc, supposée être constante en norme et en direction, on obtient :

$$\boxed{\Delta T = F_c^m \Delta h} \quad (6.6)$$

où Δh est la taille caractéristique du choc. Remarquons que les signes de $W_{i \rightarrow f}$, ΔT et Δh sont tous négatifs : le travail de la force de choc est résistant et le choc réduit l'énergie cinétique ($T_f < T_i$), ainsi, par construction, Δh se trouve avec un signe moins. Le plus souvent on précisera la valeur de $|\Delta h|$ car ce signe n'a pas véritablement de sens physique.

Conclusions :

- La variation d'impulsion est reliée à l'intensité et à la direction de la force de choc et au temps caractéristique du choc, voir éq.(6.4).
- La variation d'énergie cinétique est reliée à l'intensité de la force de choc et à la taille caractéristique du choc, voir éq.(6.6).

• C6.1 – Arrêter des balles

On vous lance une balle de masse $m_1 = 600 \text{ g}$ à la vitesse $v_1 = 3 \text{ m/s}$ (boule de pétanque), puis on vous lance une autre balle plus légère $m_2 = 60 \text{ g}$ mais plus rapide $v_2 = 30 \text{ m/s}$ (balle de tennis). On suppose qu'il faut le même temps $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ pour les arrêter.

- 1) Pour les deux balles calculer et comparer les impulsions et les énergies cinétiques. Donner les expressions du rapport des énergies cinétiques.
- 2) Calculer et comparer les forces à exercer pour arrêter les balles, les travaux à fournir pour cela et les distances de reculs de votre main.

Réponses

6.3 Conservation de l'impulsion

• Cas à deux particules

On considère deux particules A et B en interaction mais isolées de l'extérieur. « En interaction » veut dire que A exerce sur B une force, notée $\vec{F}_B = \vec{F}_{A \rightarrow B}$, et que B exerce sur A une force, notée $\vec{F}_A = \vec{F}_{B \rightarrow A}$. « Isolées de l'extérieur » veut dire qu'il n'y a pas d'autres forces ou qu'on les néglige. Pour visualiser la situation, pensez à un couple de patineurs ou d'astronautes³.

Le PFDC appliquée à A donne : $\vec{F}_A = d\vec{p}_A/dt$

Le PFDC appliquée à B donne : $\vec{F}_B = d\vec{p}_B/dt$

Le principe d'action-réaction implique : $\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$

Il s'en suit que l'impulsion totale du système, $\vec{p}_T = \vec{p}_A + \vec{p}_B$, se conserve dans le temps :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_T}{dt} = \vec{0}$$

Si le système physique « $A + B$ » est isolé, et que l'on utilise les symboles i et f pour distinguer l'état initial de l'état final, on a :

$$\vec{p}_T^i = \vec{p}_A^i + \vec{p}_B^i = \vec{p}_A^f + \vec{p}_B^f = \vec{p}_T^f \quad (6.7)$$

3. Les premières scènes du film « Gravity » (de Alfonso Cuarón, 2013) montrent très bien ce phénomène...

• **Cas général – Systèmes à N particules**

On considère un système physique constitué de N particules. Soit \vec{p}_j l'impulsion de la particule j animée d'une vitesse \vec{v}_j et possédant la masse m_j . On définit l'**impulsion totale du système** par :

$$\boxed{\vec{p}_T = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j} \quad (6.8)$$

La particule j est soumise à des forces « intérieures » dues aux interactions avec les $N - 1$ autres particules du système. On note \vec{F}_j^{int} la somme totale de ces forces intérieures : $\vec{F}_j^{int} = \sum_{k \neq j} \vec{F}_{k \rightarrow j}$. La particule j peut être soumise à des forces « extérieures » dont la résultante totale est notée \vec{F}_j^{ext} . Le PFDC pour la particule j s'écrit alors :

$$\frac{d\vec{p}_j}{dt} = \vec{F}_j^{ext} + \vec{F}_j^{int} = \vec{F}_j^{ext} + \sum_{k \neq j} \vec{F}_{k \rightarrow j}$$

Le PFDC pour le système total s'écrit alors :

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^{ext} + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \vec{F}_{k \rightarrow j}$$

Mais le principe d'action-réaction nous dit que $\vec{F}_{j \rightarrow k} = -\vec{F}_{k \rightarrow j}$ ce qui implique $\sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \vec{F}_{k \rightarrow j} = \vec{0}$ car les termes s'annulent deux à deux. On retrouve donc une formulation relativement simple pour le PFDC du système complet :

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^{ext} = \vec{F}_T^{ext} \quad (6.9)$$

Le problème actuel est de voir où appliquer cette impulsion totale et cette force (extérieure) totale, car le système physique est un ensemble de particules. Nous verrons dans la prochaine section que c'est le rôle du centre de masse, aussi appelé centre d'inertie.

Si le système est isolé, par définition : $\vec{F}_T^{ext} = \vec{0}$ ce qui implique $\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \vec{0}$, et donc que l'impulsion totale du système se conserve :

$$\boxed{\vec{p}_T^i = \vec{p}_T^f} \quad (6.10)$$

Il faut donc retenir que si un système physique est isolé, quel que soit le nombre de particules qui le constitue, l'impulsion totale se conserve.

• **C6.2 – Recul d'un fusil :**

Un chasseur débutant tient avec nonchalance un fusil dans ses mains, nous permettant ainsi de négliger les forces de contact et de considérer le système « fusil + balle » comme isolé. Il tire un coup de feu. La balle de masse m_B est expulsée avec une vitesse horizontale \vec{v}_B . La masse du fusil sera notée m_F .
A.N. : $m_B = 5 \text{ g}$, $v_B = 300 \text{ m/s}$, $m_F = 3 \text{ kg}$.

1) Déterminer l'impulsion et l'énergie cinétique de la balle.

2) Calculer la vitesse de recul du fusil.

3) En déduire les expressions et les valeurs de l'impulsion et de l'énergie cinétique du fusil. Comparer vos résultats à la question 1.

4) Donner l'expression et la valeur du rapport des énergies cinétiques.

Réponses

6.4 Centre de masse

6.4.1 Définition du centre de masse

Le PFDC d'un système de particules, donné par l'équation (6.9), ressemble tellement au PFDC d'une particule seule que l'on se demande s'il n'y a pas une particule du système qui est privilégiée. La réponse est que ça n'est pas une particule du système mais un « point » qui est très spécial ! Ce point particulier est le centre de masse, ou centre d'inertie, du système. Le centre de masse peut être une particule du système mais pas forcément. Pensez, par exemple, au centre de masse d'un anneau. Pour que ce point acquiert un sens physique, il faut lui associer une masse et une vitesse.

Par convention, on note G le centre de masse, M la masse associée et \vec{v}_G sa vitesse. Il faut trouver sa position \vec{r}_G et que celle-ci soit reliée à sa vitesse par la relation standard $\vec{v}_G = d\vec{r}_G/dt$. De plus, on veut interpréter l'impulsion

totale \vec{p}_T du système à l'aide du centre de masse afin de pouvoir appliquer au centre de masse le PFDC général donné par l'éq.(6.9). On pose donc :

$$\boxed{\vec{p}_T = \vec{p}_G = M \vec{v}_G} \quad (6.11)$$

Il faut à présent trouver les expressions de M , de \vec{v}_G et de \vec{r}_G . Comme \vec{p}_T est la somme des impulsions de toutes les particules du système, on peut supposer que M est la masse totale du système, c'est à dire que :

$$\boxed{M = \sum_{j=1}^N m_j} \quad (6.12)$$

On en déduit immédiatement la vitesse du centre de masse à partir de l'expression de l'impulsion totale du système (éq.(6.11)) qui est aussi celle du centre de masse :

$$\vec{p}_T = \vec{p}_G = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j = M \vec{v}_G \Rightarrow \boxed{\vec{v}_G = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j}{M}} \quad (6.13)$$

En se rappelant que $\vec{v}_j = d\vec{r}_j/dt$, et en voulant $\vec{v}_G = d\vec{r}_G/dt$, on réalise que la position du centre de masse est donnée par la relation :

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j}{M}} \quad (6.14)$$

Un objet indéformable a en général une trajectoire quelconque, souvent accompagné d'un mouvement de rotation autour de son centre de masse. Un objet déformable (par exemple un nuage de gaz) aura un mouvement encore plus complexe mais on pourra toujours définir la trajectoire de son centre de masse qui sera beaucoup plus simple. Si on ne s'intéresse qu'au mouvement de G alors on peut considérer que l'objet, le système physique, se réduit à un point. C'est cet argument qui justifie « la mécanique du point » vue dans les chapitres précédents.

Par exemple, la trajectoire d'un obus est simplement décrite par celle de son centre de masse. Après son explosion, le centre de masse des débris suit un mouvement identique à celui avant explosion ! Ceci vient du fait que l'explosion ne fait intervenir que des forces « intérieures ». Vous verrez ainsi en thermodynamique qu'il faudra introduire une « énergie interne » pour le système étudié mais les détails (microscopiques) de la nature de cette énergie ne vous seront d'aucune utilité pour la description macroscopique du système.

Remarque : il faut réaliser que les équations (6.12), (6.13) et (6.14) sont de nature « discrète » or souvent, à notre échelle, les objets nous semblent de nature « continue ». Le centre de masse d'un système macroscopique, caractérisé par sa densité volumique de masse $\rho = \rho(\vec{r})$ telle que $[\rho] = M/L^3$, est défini par les relations :

$$M = \int_{\text{objet}} \rho dV \quad \text{et} \quad \vec{r}_G = \int_{\text{objet}} \rho \vec{r} dV$$

où dV est l'élément de volume infinitésimal.

Dans la suite de ce cours les systèmes physiques les plus complexes ne seront constitués que de deux points. Lors de l'étude de la physique des solides ces définitions vous seront utiles.

6.4.2 Référentiel du centre de masse

Lors du chapitre 3, section 3.2.2, nous avons étudié les référentiels et en particulier nous avons vu que le référentiel du laboratoire, où nous effectuons nos mesures associées à nos expériences, est un référentiel terrestre que l'on suppose galiléen afin que l'on puisse appliquer les lois de Newton. Pour étudier les collisions, un référentiel d'inertie très particulier, appelé « référentiel du centre de masse », se révèle être essentiel pour comprendre ce qu'il se passe.

Le référentiel du centre de masse (\mathcal{R}_{CM}) a pour origine le centre de masse. Or le centre de masse est animé de la vitesse \vec{v}_G pour un observateur situé dans le laboratoire. Si le système physique est isolé, l'éq.(6.13) montre une propriété essentielle des systèmes isolés : la vitesse du centre de masse \vec{v}_G est constante car $\vec{p}_T = \vec{p}_G$ est constant. Cela implique que les deux référentiels \mathcal{R}_{CM} et \mathcal{R}_{lab} sont reliés par une translation rectiligne et uniforme. Par conséquent, si on suppose que le référentiel du laboratoire est un référentiel d'inertie, alors, automatiquement, le référentiel du centre de masse est galiléen aussi.

La notion de vitesse relative, étudiée dans le chapitre 2, section 2.3.4, permet de relier les variables cinématiques entre deux référentiels d'inertie. Toutes les quantités définies dans le laboratoire sont reliées aux quantités définies dans \mathcal{R}_{CM} par la transformation de Galilée :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OG} + \vec{r}' = \vec{v}_G t + \vec{r}' \quad (6.15)$$

où \vec{r} est la position mesurée dans le laboratoire avec une origine des coordonnées notée O , \vec{r}' est la position mesurée dans le \mathcal{R}_{CM} avec une origine des coordonnées notée $O' = G$. On note avec un ' toutes les quantités de \mathcal{R}_{CM} .

La loi de composition des vitesses est simplement :

$$\vec{v} = \vec{v}_G + \vec{v}' \quad (6.16)$$

Pour l'instant ces définitions subtiles vous paraissent sans doute un peu obscures, mais avec le temps vous comprendrez ces nuances importantes. Pour le moment reprenez que **le référentiel du centre de masse a pour origine G le centre de masse, et que, dans ce référentiel, l'impulsion totale du système physique est nulle :**

$$\boxed{\vec{p}'_T = \vec{0}} \quad (6.17)$$

En effet, dans \mathcal{R}_{CM} , G est l'origine du système de coordonnées, G ne bouge pas, et comme $\vec{p}_T = \vec{p}_G = M \vec{v}_G$, on a dans \mathcal{R}_{CM} : $\vec{p}'_T = M \vec{v}'_G = \vec{0}$.

6.5 Collisions

On appelle collision l'interaction entre plusieurs objets (dans ce cours on se limitera à deux) qui intervient pendant un intervalle de temps très court et telle que les forces extérieures sont absentes ou négligeables. On peut donc considérer que le système est isolé et que l'impulsion totale se conserve.

Les collisions sont classées en deux types distincts :

- *inélastiques* : de la chaleur est produite lors du choc, l'énergie cinétique totale n'est pas conservée ;
- *élastiques* : c'est le contraire, l'énergie cinétique totale se conserve, aucune chaleur n'est dégagée.

6.5.1 Collisions inélastiques : $Q = -\Delta T$

La plupart des collisions macroscopiques rentrent dans cette catégorie. Lors du choc l'énergie cinétique totale diminue ($T_T^f < T_T^i$) et se transforme en chaleur. La seule loi de conservation que l'on peut utiliser pour obtenir de l'information est celle de la conservation de l'impulsion. **La chaleur Q est égale à la variation d'énergie cinétique : $Q = -\Delta T > 0$.**

On appelle « choc mou » la sous-classe de collisions où les objets restent collés dans l'état final. Dans ce cas le système passe d'un état à deux objets de masse m_1 et m_2 à un nouvel état de masse $M = m_1 + m_2$. Cela réduit le nombre de « degrés de liberté » du problème. Pour le moment, on peut voir les *degrés de libertés* comme le *nombre de variables indépendantes*. Nous reviendrons sur cette notion importante dans la suite du cours.

• C6.3 – Collision inélastique dans un plan

Un jeune garçon joue aux petites voitures sur une table (on néglige les frottements). Il lance une voiture contre une autre. La voiture A a une masse $m_A = 300 \text{ g}$ et une vitesse $\vec{v}_A^i = v_A^i \vec{u}_x$ ($v_A^i = 2 \text{ m/s}$) et la voiture B est au repos et a une masse $m_B = 200 \text{ g}$. Après la collision la voiture A repart avec une vitesse $v_A^f = 1 \text{ m/s}$ faisant un angle $\alpha = \pi/6$ avec sa direction initiale.

- 1) Calculer \vec{v}_B^f (composantes, norme et angle β par rapport à \vec{u}_x).
- 2) Calculer l'énergie perdue sous forme de chaleur lors de la collision.

Réponses

6.5.2 Collisions élastiques

Lorsque l'interaction, entre les objets qui entrent en collision, est conservative alors l'énergie cinétique totale se conserve. On rencontre ce type de collisions dans le monde microscopique (atomes, noyaux et particules élémentaires), mais cela peut aussi être une très bonne approximation pour certains objets macroscopiques lorsque les frottements sont négligeables (boules de billard, palets sur coussin d'air...). Par conséquent, **lors de collisions élastiques deux lois de conservation sont respectées : la conservation de l'énergie et la conservation de l'impulsion.** Le nombre de degré de liberté est réduit par rapport au cas inélastique.

• C6.4 – Collision élastique à une dimension

Une particule de masse m_1 avec la vitesse $\vec{v}_1^i = v_1^i \vec{u}_x$ rentre en collision élastique avec une particule de masse m_2 possédant la vitesse $\vec{v}_2^i = -v_2^i \vec{u}_x$. Soit \vec{v}_1^f et \vec{v}_2^f les vitesses des particules 1 et 2 après la collision, que l'on supposera être colinéaires à l'axe \vec{u}_x .

1) Écrire l'ensemble des relations que vous pouvez déduire des lois de conservation. Comparer le nombre de ces relations avec le nombre de variables inconnues. Quelle conclusion en tirez-vous ?

2) On suppose que la particule 2 est au repos ($v_1^i = v$, $v_2^i = 0$). Donner les expressions des vitesses finales des deux particules en fonction de m_1 , m_2 et v .

3) Quelle condition doit satisfaire la particule 1 pour pouvoir revenir en arrière ? Étudier les 3 cas : $m_1 = m_2$, $m_1 \ll m_2$ et $m_1 \gg m_2$.

Réponses

• C6.5 – Collision élastique à deux dimensions

Une particule de masse m_1 avec la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ rentre en collision élastique avec une particule au repos de masse m_2 . Soit \vec{v}_1^f et \vec{v}_2^f les vitesses respectives des particules 1 et 2 après la collision, dont les directions par rapport à \vec{u}_x sont repérées par les angles θ_1 et θ_2 .

1) Montrer que l'ensemble des mouvements se passe dans un plan. On prendra \vec{u}_x comme direction horizontale et on appellera \vec{u}_y la direction verticale du demi-plan contenant \vec{v}_1^f . Faire un dessin.

2) Écrire l'ensemble des relations que vous pouvez déduire des lois de conservation. Comparer le nombre de ces relations avec le nombre de variables inconnues. Quelle conclusion en tirez-vous ? La particule 1 peut-elle revenir en arrière ? Dans quelle zone de l'espace peut évoluer la particule 2 ?

3) Donner la position \vec{r}_G et la vitesse \vec{v}_G du centre de masse. Discuter leurs dépendances en fonction du temps.

4) Définir le référentiel du laboratoire (\mathcal{R}_{lab}) et le référentiel du centre de masse (\mathcal{R}_{CM}). Si on note par un ' les quantités du référentiel du centre de masse, montrer que l'on passe d'un référentiel à l'autre par la relation suivante :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_G t \quad (t' = t) \quad (\text{Transformation de Galilée})$$

En déduire la loi de composition des vitesses : $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_G$.

5) Dans \mathcal{R}_{CM} , écrire l'ensemble des relations que vous pouvez déduire des lois de conservation. En déduire que les vitesses se conservent. Faire un dessin de la collision en faisant apparaître l'angle de collision θ . Donner le domaine de variation de θ .

6) Calculer les composantes des 4 vecteurs vitesses \vec{v}_1^i , \vec{v}_2^i , \vec{v}_1^f et \vec{v}_2^f ,

définies dans \mathcal{R}_{CM} en fonction de m_1 , m_2 , v , et θ (on posera $M = m_1 + m_2$).

7) En déduire les expressions des vitesses finales dans \mathcal{R}_{lab} \vec{v}_1^f et \vec{v}_2^f , en fonction de m_1 , m_2 , M , v , et θ .

8) Montrer que : $2\theta_2 = \pi - \theta$. Donner le domaine de variation de θ_2 .

9) Montrer que : $\tan \theta_1 = \sin \theta / (\cos \theta + m_1/m_2)$. Donner les domaines de variation de θ_1 dans les 3 cas : $m_1 = m_2$, $m_1 > m_2$ et $m_1 < m_2$.

Réponses

6.6 Exercices

E6.1 – Choc d'une balle contre un mur

Une balle de masse m frappe un mur. Le mouvement est purement horizontal. La vitesse initiale (vers la gauche) vaut \vec{v}_i et la vitesse après le rebond (vers la droite) vaut \vec{v}_f . Données : $m = 200\text{ g}$, $v_i = 20\text{ m/s}$ et $v_f = 10\text{ m/s}$.

- 1) Calculer la variation de quantité de mouvement due au choc.
- 2) Si on suppose que le contact entre le mur et la balle a duré $\Delta t = 0,01\text{ s}$, calculer la force moyenne exercée par le mur sur la balle pendant le choc.
- 3) Calculer la variation d'énergie cinétique due au choc.

E6.2 – Chute en avion

Un homme ($m_H = 80\text{ kg}$) tombe d'un avion. La pression maximale moyenne que peut supporter le corps humain est de $P_{max} = 35\text{ N.cm}^{-2}$. La surface moyenne du corps humain est de $0,35\text{ m}^2$. La vitesse limite de chute libre est de $v_{lim} = 200\text{ km/h}$. Il a beaucoup de chance car en tombant dans de la neige poudreuse il survit. Calculer la profondeur du trou qu'il creuse par sa chute, ainsi que le temps qu'il a mis pour le faire.

E6.3 – Accidents de voiture

Un couple en voiture heurte de plein fouet un platane. L'homme à une masse $m_H = 80\text{ kg}$ et la femme $m_F = 60\text{ kg}$. La pression maximale moyenne que peut supporter le corps humain est de $P_{max} = 35\text{ N.cm}^{-2}$. La surface moyenne du corps humain est de $0,35\text{ m}^2$. Le temps d'arrêt d'un corps humain sur un platane est de $\Delta t = 0,007\text{ s}$. On exprimera les vitesses demandées en km/h .

- 1) Sans ceinture de sécurité que se passe-t-il? Calculer la vitesse maximale que doit avoir la voiture pour que la femme survive? Que se passe-t-il pour l'homme? Commentez ces résultats.
- 2) Ils ont mis leur ceintures. L'élasticité de la ceinture permet un temps d'arrêt de $\Delta t = 0,018\text{ s}$. Calculer la vitesse maximale que doit avoir la voiture pour que le couple survive?
- 3) La voiture est en fait équipée d'un airbag, mais seulement pour le conducteur. Le temps d'amortissement de l'airbag est $\Delta t = 0,03\text{ s}$. La femme est au volant et survit, l'homme meurt. Calculer l'intervalle des vitesses possibles de la voiture.

E6.4 – Dégagement d'un libéro

Lors d'un match foot, un libéro interrompt une contre attaque en dégageant le ballon. Le ballon de masse m arrivait droit sur le libéro avec la vitesse \vec{v}_i et est reparti avec la vitesse \vec{v}_f qui fait un angle θ avec l'horizontale. On suppose que le temps de collision vaut Δt . Application numérique : $m = 400\text{ g}$, $v_i = 20\text{ m/s}$, $v_f = 30\text{ m/s}$, $\theta = \pi/4$ et $\Delta t = 0,01\text{ s}$.

- 1) Calculer la variation de quantité de mouvement due au choc. (Attention, le mouvement est bidimensionnel! Calculer les composantes puis la norme et enfin l'angle β fait avec l'horizontale.)
- 2) Calculer la force moyenne \vec{F}_c^m exercée par le footballeur sur le ballon durant le choc. On précisera les valeurs de chaque composante, de la norme et de l'angle θ_F fait avec l'horizontale.

E6.5 – Plions les genoux !

Si vous sautez d'un escabeau sur un pèse-personne, combien pesez-vous ? On supposera que la décélération lors du choc est constante. Soit Δt le temps et Δh la distance sur lesquels la vitesse passe de la valeur v à 0. Soit m votre masse et h la hauteur d'où vous sautez.

- 1) Calculer la vitesse v juste avant impact en fonction de g et h . ($\Delta h \ll h$)
- 2) À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, exprimer la force de choc moyenne F en fonction de m , v et Δh . En déduire l'expression de F en fonction de m , g , h et Δh .
- 3) À l'aide de la variation de l'impulsion, exprimer Δt en fonction de v et Δh . En déduire l'expression de Δt en fonction de g , h et Δh .
- 4) Avec $m = 80 \text{ kg}$, $h = 2 \text{ m}$ et $\Delta h = 1 \text{ cm}$, calculer les valeurs de F et Δt . Quelle est la valeur indiquée (en tonne !) par le pèse-personne ?
- 5) La pression de rupture en compression d'un os est d'environ $1,7 \cdot 10^4 \text{ N.cm}^{-2}$. Le rayon moyen d'un tibia est d'au moins 1 cm . Avec les données de la question précédente, qu'en déduisez-vous ?

E6.6 – Balle contre un arbre

Une balle de masse m tirée horizontalement frappe un arbre avec une vitesse de v . Elle pénètre d'une longueur L dans l'arbre, sous l'action d'une force de freinage constante.

- 1) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique calculer la force exercée par l'arbre sur la balle ?
- 2) En raisonnant sur la variation d'impulsion, déterminer le temps nécessaire à la balle pour s'arrêter ?

Comparer vos résultats à ceux obtenus pour l'exercice E3.2 avec le PFDC et un raisonnement sur les équations horaires.

E6.7 – Centre de masse

Soit O l'origine de notre repère, P_1 le point associé à la masse m_1 , P_2 le point associé à la masse m_2 et G le centre de masse du système. Montrer l'équivalence entre les quatre relations suivantes :

$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{OG} = m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2}$$

$$m_1 \overrightarrow{GP_1} + m_2 \overrightarrow{GP_2} = \vec{0}$$

$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{GP_1} = m_2 \overrightarrow{P_2P_1}$$

$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{GP_2} = m_1 \overrightarrow{P_1P_2}$$

E6.8 – Collision sur un axe

Deux palets sur coussin d'air et guidés par un rail (on néglige les frottements) rentrent en collision frontale. Le palet A (venant de la gauche) a une masse $m_A = 500 \text{ g}$ et une vitesse $v_A^i = 2 \text{ m/s}$ et le palet B (venant de la droite) a une masse $m_B = 300 \text{ g}$ et une vitesse $v_B^i = 2 \text{ m/s}$. Le palet B repart en sens inverse (vers la droite) avec une vitesse $v_B^f = 2 \text{ m/s}$.

- 1) Faire le bilan des forces avant, pendant et après la collision. En déduire si l'impulsion totale est conservée ou non.

- 2) Quelle est la vitesse et la direction du palet A après la collision ?
- 3) Comparer les changements d'impulsion et de vitesse pour chaque palet.
- 4) Comparer les énergies cinétiques totales initiales et finales. La nature du choc est-elle élastique ou inélastique ?

E6.9 – Collision complètement inélastique (choc mou)

On reprend l'exercice E6.8 mais à présent les palets sont équipés de bandes adhésives leurs permettant de rester collés après la collision.

- 1) Quelle est la vitesse et la direction du système formé par les deux palets après la collision ?
- 2) Comparer les énergies cinétiques totales initiales et finales.

E6.10 – Descente en bobsleigh 1 (collision inélastique)

Vous venez de faire une descente en bobsleigh, vous êtes sur la ligne d'arrivée que l'on considère droite et horizontale. On néglige les frottements. Votre masse plus celle du bob vaut $m_A = 200 \text{ kg}$ et votre vitesse $v_A^i = 2 \text{ m/s}$. Malheureusement le descendeur précédent, peureux et plus léger que vous, est toujours dans son bob, immobile en plein milieu de la piste ! La collision est inévitable. Après le choc vous envoyez balader le descendeur précédent et son bob, qui ont une masse totale $m_B = 180 \text{ kg}$, à la vitesse $v_B^f = 1,5 \text{ m/s}$.

- 1) Faire le bilan des forces avant, pendant et après la collision. En déduire si l'impulsion totale est conservée ou non.
- 2) Quelle est votre vitesse après la collision ?
- 3) Comparer les changements d'impulsion et de vitesse pour chaque système descendeur+bob.
- 4) Comparer les énergies cinétiques totales initiales et finales. Commenter le résultat.

E6.11 – Descente en bobsleigh 2 (Choc mou)

On reprend l'exercice E6.10 en supposant que les deux bobs restent accrochés après la collision.

- 1) Quelle est la vitesse du système formé par les deux bobs après la collision ?
- 2) Montrer que le rapport $h = T_T^f / T_T^i$ des énergies cinétiques totales initiales et finales est inférieur à 1. Calculer les pertes énergétiques lors du choc mou.

E6.12 – Descente en bobsleigh 3

On reprend l'exercice E6.10 mais en laissant libre m_B et v_B^f . On veut savoir les conditions à remplir pour qu'après le choc vous repartiez en arrière.

- 1) Exprimez la condition de recul sur la composante $v_{A,x}^f$. En déduire la valeur minimale $v_{B,min}^f$ que peut prendre v_B^f .
- 2) A priori, vous ne pouvez pas libérer d'énergie interne pour accélérer votre bobsleigh, et donc l'énergie cinétique initiale avant le choc doit être supérieure ou égale à l'énergie cinétique finale. Utiliser cette condition pour trouver la valeur maximale $v_{B,max}^f$ que peut prendre v_B^f .
- 3) La condition évidente que $v_{B,min}^f \leq v_{B,max}^f$ impose, d'une part, une contrainte entre m_A et m_B , et d'autre part, une valeur maximale $v_{A,max}^f$ que peut prendre v_A^f (la norme définie positive de \vec{v}_A^f). Trouver cette contrainte et cette valeur.

- 4) Avec les données de l'exercice E6.10 mais en choisissant une autre vitesse v_B^f , pouvez-vous repartir en arrière ?
- 5) Si $v_A^f = v_{A,max}^f$ calculer v_B^f puis les énergies cinétiques totales avant et après la collision. En déduire, la nature de la collision. Trouver un ensemble de valeurs numériques (en gardant les m_A et v_A^i de l'exercice E6.10) correspondant à cette situation.
- 6) Commenter le « a priori » de la question 2.

E6.13 – Collision inélastique dans un plan

Deux palets sur coussin d'air (on néglige les frottements) rentrent en collision sur une table. Le palet A a une masse $m_A = 300\text{ g}$ et une vitesse $\vec{v}_A^i = v_A^i \vec{u}_x$ ($v_A^i = 2\text{ m/s}$) et le palet B est au repos et a une masse $m_B = 200\text{ g}$. Après la collision le palet A repart avec une vitesse $v_A^f = 1\text{ m/s}$ faisant un angle $\alpha = \pi/6$ avec sa direction initiale.

- 1) Calculer \vec{v}_B^f (composantes, norme et angle β (en degré) par rapport à la direction \vec{u}_x).
- 2) Calculer l'énergie perdue sous forme de chaleur lors de la collision.

E6.14 – Accident avec un bus

Lors de votre dernière sortie en voiture vous avez eu un accident avec un bus qui a grillé un feu rouge. La collision a eu lieu à un croisement à angle droit, et votre voiture s'est encastrée dans le bus après le choc. Votre GPS indiquait une vitesse de 54 km/h juste avant la collision. Vous estimez la masse totale de la voiture et des passagers à 800 kg , et celle du bus et de son chauffeur à 2 t . Le chauffeur du bus affirme qu'il roulait tout doucement, au maximum à 15 km/h . Ne le croyant pas vous mesurez la direction finale de votre voiture (et du bus) après le choc : vous faites 9 pas selon la direction initiale de votre voiture et 12 pas selon la direction initiale du bus.

- 1) Expliquer pourquoi on peut considérer que les quantités de mouvement « totales » juste avant et juste après la collision sont égales.
- 2) Le chauffeur du bus vous ment-il ?
- 3) Donner la vitesse juste après le choc du système « bus+voiture+occupants ».
- 4) En déduire l'énergie perdue lors du choc ? Qu'est-elle devenue ?

E6.15 – Énergie transférée lors d'une collision élastique de plein fouet

On supposera que les mouvements se font sur un seul axe.

- 1) Donner un exemple de réalisation matérielle d'un tel cas.
- 2) La particule de masse m_1 est lancée à la vitesse \vec{v}_1^i sur une cible initialement immobile de masse $m_2 = am_1$ (a étant une constante). En supposant le choc élastique, calculer les vitesses \vec{v}_1^f et \vec{v}_2^f après le choc en fonction de a et de \vec{v}_1^i . Commentez les cas limites $a \rightarrow 0$, $a = 1$ et $a \rightarrow +\infty$.
- 3) Exprimer en fonction de a le coefficient de transfert $h = \Delta T_2 / T_T^i$, quotient de l'énergie cinétique transférée à la cible par l'énergie cinétique initiale totale. Quelle est la valeur de a qui optimise le transfert ? Déterminer la situation correspondante.

E6.16 – Collisions et pendule

Soit une boule M_2 de masse m_2 suspendu par un fil de longueur L , inextensible et de masse négligeable, à un point fixe O . Le fil est tendu et M_2 est tangente à un support horizontal. La boule M_2 , initialement au repos, est heurtée de front par une boule M_1 de masse m_1 animée d'une vitesse \vec{v} qui glisse sans frottement sur le support horizontal (voir figure 6.5). La ou les collisions entre les boules seront supposées être élastiques.

1) Cas des masses identiques : $m_1 = m_2 = m$

- Calculer les vitesses des boules M_1 et M_2 **juste après la collision**.
- Soit ϕ l'angle donnant la déviation de M_2 par rapport à la verticale. Calculer l'angle ϕ_m de déviation maximale de M_2 après la collision si on suppose que v n'est pas très grande. (*Indication : utiliser un raisonnement énergétique*)
- Décrire les mouvements **complets** des deux boules. En déduire les vitesses finales (c'est-à-dire pour $t \rightarrow +\infty$) de M_1 et M_2 , ainsi que la position finale de la boule M_2 .
- Si on suppose que le mouvement de M_2 est de faible amplitude, déterminer l'expression simple de ϕ_m en fonction de v , L et g (*Indication : on utilisera le développement limité d'ordre 2 de la fonction cosinus : $\cos \epsilon \approx 1 - \epsilon^2/2$*). En déduire la relation entre v , L et g pour que le mouvement soit de faible amplitude.

2) Cas des masses différentes : $m_1 < m_2$

- Calculer les vitesses des boules M_1 et M_2 **juste après la collision**.
- Décrire les mouvements **complets** des deux boules si on suppose que v n'est pas très grande. Y a-t-il une seconde collision? Pourquoi?
- Soit ϕ l'angle représentant la déviation de M_2 par rapport à la verticale. Déterminer les conditions initiales de la déviation $\phi(0)$ et de sa dérivée $\dot{\phi}(0)$.
- Déterminer l'équation horaire de la déviation de M_2 en considérant les conditions initiales déterminées à la question précédente. (*Indication : utiliser un raisonnement énergétique ou la seconde loi de Newton pour obtenir l'équation différentielle donnant l'évolution de $\phi(t)$*).
- Déterminer la condition sur la vitesse initiale de M_1 pour observer des petites oscillations du pendule. Comparer votre résultat à celui de la question 1d. Sont-ils cohérents?

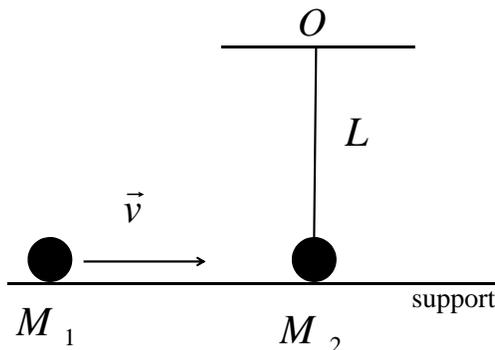


FIGURE 6.5 – Collisions et pendule

Chapitre 7

Rotation,

moment cinétique

et loi de conservation 3

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

- Nuance entre le moment cinétique et le moment angulaire. Notions de moment cinétique orbital et de moment cinétique intrinsèque (spin).
- Définition et propriétés du moment d'une force. Nullité du moment des forces radiales et centrales. Condition d'équilibre pour les mouvements de rotation.
- Définition du moment angulaire. Théorème du moment cinétique.
- Conservation du moment cinétique. Comparaison translation - rotation. Moment d'inertie.
- Applications à la loi des aires et au mouvement sur une ellipse.

• Compétences

- Savoir calculer le moment d'une force (C7.1).
- Savoir appliquer la conservation du moment cinétique pour obtenir des informations simples (C7.2).
- Être capable de démontrer la loi des aires (seconde loi de Kepler).
- Pouvoir expliquer qualitativement les variations de vitesses d'un satellite sur une orbite elliptique.
- Outils mathématiques – Formulations mathématiques des rotations : représentation matricielle et rotation infinitésimale.

• Lecture conseillée

Notions de physique	Young et Freedman (2013)	Hecht (1999)
Mouvement de rotation	ch.9.1-3 p278-288	ch.8 p269-310
Moment d'une force	ch.10.1 p308-311	ch.8.4 p280-281
Moment cinétique	ch.10.5-6 p322-328	ch.8.7 p288-300

7.1 Introduction

La rotation intervient à toutes les échelles, du mouvement de l'électron dans les atomes au mouvement des étoiles dans les galaxies. La plupart des corps ont des mouvements de translation et de rotation. En fait, tout mouvement peut-être décomposé en une somme de translations et de rotations.

Dans ce chapitre relativement court, nous nous intéressons au mouvement de rotation d'un point matériel. La rotation d'un ensemble de points ou d'un corps rigide autour de son centre de gravité peut être étudiée dans un cours de mécanique des solides. Les notions que nous allons introduire ici sont indispensables à la compréhension de la physique du solide mais aussi à celle des interactions fondamentales. En particulier, la conservation du moment cinétique joue un rôle crucial dans la dynamique des forces fondamentales qui interviennent dans la plupart des domaines de la physique.

Précédemment, nous avons mentionné que les propriétés d'invariance par translation des équations de la dynamique amenaient à la conservation de certaines quantités physiques. L'homogénéité du temps, ou invariance par translation dans le temps, était associée à la conservation de l'énergie. L'énergie est une grandeur scalaire, ce qui correspond à la conservation d'un unique nombre. L'homogénéité de l'espace, ou invariance par translation spatiale, était associée à la conservation de l'impulsion. L'impulsion est une grandeur vectorielle, ce qui correspond à la conservation de trois nombres car l'espace a trois dimensions.

Cette multi-dimensionnalité de l'espace conduit à une nouvelle propriété appelée « isotropie de l'espace », qui traduit le fait qu'il n'existe pas de direction privilégiée dans l'espace. En vulgarisant, on peut dire que si une expérience physique donne un certain résultat, une expérience similaire où l'on « tourne » l'ensemble du dispositif expérimental fournira le même résultat. Cette propriété, non intuitive, des phénomènes de rotation liée à l'isotropie de l'espace amène à la conservation d'une nouvelle quantité appelée « moment cinétique » ou « moment angulaire ». Le moment cinétique est un vecteur et sa conservation correspond donc à la constance de trois nombres.

En fait, la situation est encore plus complexe si l'on rentre dans le monde microscopique ou dans celui de la physique théorique/mathématique. Il existe une nuance importante entre le moment cinétique et le moment angulaire. Par exemple, au niveau microscopique, il apparaît que les particules élémentaires possèdent en plus de leurs propriétés intrinsèques de masse et de charges (électriques et « nucléaires »), une autre propriété appelée « spin » qui est un moment cinétique intrinsèque, que l'on vulgarise souvent en disant que les électrons et autres particules élémentaires tournent sur elles-mêmes afin d'associer une image à notre ignorance. Les particules élémentaires étant supposées être ponctuelles (dimension 0) cette rotation sur soi-même n'a aucun sens.

Cependant, le spin est mesurable et est associé à plusieurs propriétés fondamentales, comme les propriétés magnétiques qui se manifestent lorsque les particules sont plongées dans un champ magnétique, ou comme le principe de Pauli. Ce dernier est associé aux propriétés « statistiques » des particules et à la notion de « superposition des états », il stipule qu'on peut « empiler » des

photons (spin entier) mais pas des électrons (spin demi-entier). Le moment cinétique est la somme (vectorielle) du spin et du moment angulaire, mais ceci est une autre histoire. Le spin est aussi appelé moment cinétique intrinsèque, et le moment angulaire est souvent appelé moment cinétique « orbital ».

En physique théorique, on associe à l'homogénéité du temps, à l'homogénéité de l'espace et à l'isotropie de l'espace ce qu'on appelle les symétries de l'espace-temps. La branche des mathématiques qui régit les propriétés de symétrie d'un système est la théorie des groupes. Il apparaît que les objets mathématiques qui décrivent les particules physiques sont très contraints, on ne peut pas faire n'importe quoi ! Un des résultats majeurs de la physique fondamentale du XX^e siècle est que l'ensemble des particules de matière (les électrons, protons, neutrons et quarks qui constituent les atomes et donc la matière) doivent être des particules de spin $\frac{1}{2}$ qu'on appelle fermions (et sont décrits par des objets mathématiques appelés « spineurs »). Les particules d'interaction qui symbolisent l'action des forces fondamentales (comme le photon pour l'interaction électromagnétique ou les gluons pour l'interaction nucléaire forte) doivent être de spin entier (spin 1), on les appelle des bosons (et sont décrits par des objets mathématiques appelés « tenseurs »)...

Il est normal que tout ceci vous paraissent obscur car c'est au niveau master que l'on peut étudier de façon fondamentale les propriétés des rotations, l'isotropie de l'espace et le spin des particules. Retenez simplement que les propriétés de l'espace et du temps fournissent des lois de conservation très pratiques, et que derrière se cache toute une structure mathématique qui constitue l'ossature de notre interprétation actuelle du monde physique...

Nous nous limiterons ici à l'étude du moment cinétique « orbital » ou moment angulaire, que nous nommerons simplement, mais abusivement, moment cinétique. Nous étudierons sa possible conservation à travers une autre quantité physique appelée « moment d'une force ».

• Exercices de cours C7.0

Faire à nouveau les exercices de cours du chapitre 2 : C2.4, C2.5, C2.6 et C2.7, qui doivent être parfaitement maîtrisés à présent.

7.2 Moment d'une force

7.2.1 Intuition et définition

Exemple 1 :

Votre petit neveu est sur un tourniquet et il souhaite que vous le fassiez tourner. Quelle est la direction de la force que vous devez appliquer pour donner un mouvement de rotation au tourniquet ?

Si la force est radiale ($\vec{F}_\rho \sim \vec{u}_\rho$) rien ne se passe. Le plus efficace est d'appliquer une force tangentielle : $\vec{F}_\phi \sim \vec{u}_\phi$. Ceci est schématisé sur la figure 7.1.

Exemple 2 :

Votre oncle vous demande de déplacer un gros rocher. À main nue cela vous est impossible, alors il vous prête une barre à mine afin de l'utiliser comme bras

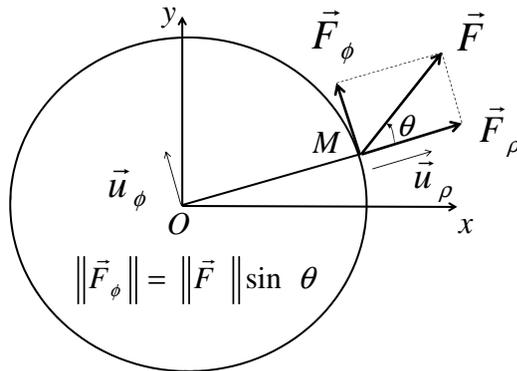


FIGURE 7.1 – Mouvement de rotation et moment d'une force : tourniquet.

de levier et un rondin de bois pour servir d'axe. Faut-il placer le rondin le plus loin possible (figure 7.2a) ou le plus près possible (figure 7.2b) du rocher afin de peut-être réussir à le déplacer ?

Le plus efficace est d'avoir le bras de levier le plus grand possible, c'est à dire d'avoir une distance maximale entre l'action de notre force et le centre de rotation (cas de la figure 7.2b).

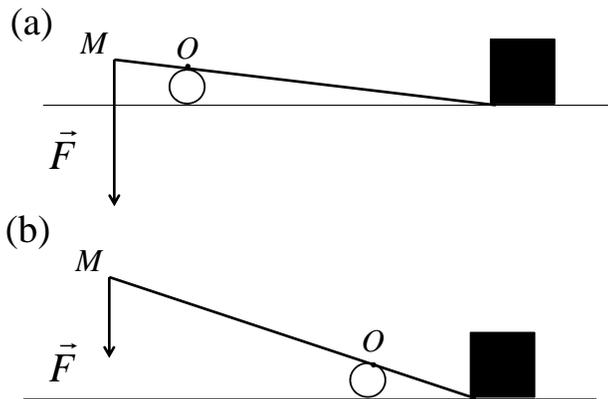


FIGURE 7.2 – Mouvement de rotation et moment d'une force : bras de levier.

Ces deux exemples illustrent les propriétés contenues dans le « moment d'une force » qui caractérise la capacité à tourner (à entrer en mouvement de rotation) du système physique. Le premier exemple montre que la direction de la force joue un rôle fondamental : le moment d'une force est donc une grandeur vectorielle. Le deuxième exemple montre que le moment de la force est proportionnel à la distance entre le point d'application M de la force et le centre de rotation O , soit la norme du vecteur position $r = \|\vec{OM}\|$. Avec cette information, en revenant sur l'exemple 1, on voit que la force tangentielle est proportionnelle au sinus de l'angle entre \vec{r} et la force \vec{F} . On en déduit que le

moment d'une force doit être proportionnel au produit vectoriel entre \vec{r} et \vec{F} ! On définit donc le **moment de la force \vec{F} au point d'application M par rapport au point O** par la formule :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}} \quad (7.1)$$

Par définition $\|\vec{\Gamma}_O\| = rF|\sin\theta|$ (où $\theta = \widehat{(\vec{r}, \vec{F})}$) ce qui traduit bien les résultats vus lors des exemples 1 et 2 précédents.

7.2.2 Propriétés du moment d'une force

- La dimension du moment d'une force est $[\Gamma] = ML^2T^{-2}$, ce qui est identique à la dimension d'une énergie (souvenez-vous que le travail est tel que $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$). Comme l'interprétation physique du moment d'une force est très différente de celle d'une énergie, d'un travail, on utilise comme unité le newton-mètre $N.m$ et on garde le joule J pour les énergies (même si ces deux unités sont rigoureusement identiques, c'est une question de vocabulaire et surtout d'interprétation physique).

- **Le moment d'une force \vec{F} est un vecteur perpendiculaire au plan défini par \vec{F} et \vec{r} :** $\vec{\Gamma} \perp \mathcal{P}(\vec{F}, \vec{r})$ et $\vec{\Gamma}$ est orienté afin que le trièdre $(\vec{r}, \vec{F}, \vec{\Gamma})$ soit direct. En fait, $\vec{\Gamma}$ est parallèle au vecteur rotation $\vec{\omega}$ qui a été défini lors du chapitre 2, section 2.3.5. Si on utilise les coordonnées polaires pour décrire la rotation, alors le plan de rotation $\mathcal{P} = (\vec{r}, \vec{F}) = (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$, et si la rotation est dans le même sens que le sens positif choisi pour ϕ , alors le troisième vecteur unitaire \vec{u}_z du système de coordonnées cylindriques donne la direction du vecteur rotation : $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$.

$$\boxed{\text{- Le moment d'une force centrale est nul : } \vec{F} // \vec{u}_r \Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{0}} \quad (7.2)$$

Ceci vient directement de l'équation (7.1) et du fait que $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r = \vec{0}$.

- Le moment d'une force est calculé par rapport à un point précis. En général, on choisit O le centre de rotation, mais ceci n'est pas obligatoire :

$$\vec{\Gamma}_{O'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \vec{\Gamma}_O.$$

- Si $\vec{\Gamma} \neq \vec{0}$ alors l'action de \vec{F} est d'apporter une accélération angulaire au mouvement du point M . L'accélération en coordonnées polaires est donnée par la relation (éq.(2.38) du chapitre 2) : $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{u}_\phi$.

Si on suppose que la distance $OM = \rho = R$ est fixe (cas des corps rigides) alors $\dot{\rho} = 0$ et l'accélération devient : $\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\vec{u}_\rho + R\ddot{\phi}\vec{u}_\phi$. Par conséquent, si $\vec{\Gamma} \neq \vec{0}$ on a $F_\phi \neq 0$ (selon l'éq.(7.1)) et donc $\ddot{\phi} \neq 0$ (selon le PFDC $\vec{a} \sim \vec{F} \sim \vec{u}_\phi$ donc $a_\phi \neq 0$). La plupart des applications du moment des forces se font en physique du solide où l'on vous introduira d'autres concepts comme le moment d'inertie et l'énergie de rotation.

- Jusqu'à présent nous avons défini l'équilibre d'un système par la condition

$\sum \vec{F} = \vec{0}$. Pour un système constitué d'un ensemble de points matériels, il faut maintenant rajouter une seconde condition d'équilibre : $\sum \vec{\Gamma} = \vec{0}$. Nous pouvons donc approfondir notre interprétation :

$\sum \vec{F} = \vec{0} \longrightarrow \text{condition d'équilibre pour les translations,}$ $\sum \vec{\Gamma} = \vec{0} \longrightarrow \text{condition d'équilibre pour les rotations.}$

Comme ceci sort du cadre de ce cours, nous ne démontrons pas cette propriété, nous l'illustrons seulement à l'aide de l'exercice de cours suivant.

7.2.3 C7.1 – Couple de forces et équilibre

Soit une tige de longueur $2R$ fixée sur un support en son milieu O mais pouvant tourner librement autour de cet axe de rotation. Le plan de rotation est horizontal, et on néglige les frottements. Deux forces, notées \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (on parle de « couple de force »), s'appliquent aux extrémités de la tige sur les points M_1 et M_2 , agissent selon une direction fixe que l'on définit comme la direction x , mais sont de sens opposés : $\vec{F}_1 = -F\vec{u}_x$ et $\vec{F}_2 = +F\vec{u}_x$. L'axe x passe par O (lignes pointillées sur les figures 7.3a,b,c). L'axe de rotation passe aussi par O mais est perpendiculaire à la figure (selon \vec{u}_z).

- 1) La tige fait un angle θ avec l'axe des x comme illustré sur la figure 7.3a. Calculer la somme des forces et la somme des moments des forces. Décrire le mouvement de la tige. Conclure.
- 2) La tige est alignée avec l'axe des x comme illustré sur la figure 7.3b ($\theta = 0$). Calculer la somme des forces et la somme des moments des forces. Conclure.
- 3) Mêmes questions pour $\theta = \pi$ (figure 7.3c).

Réponses

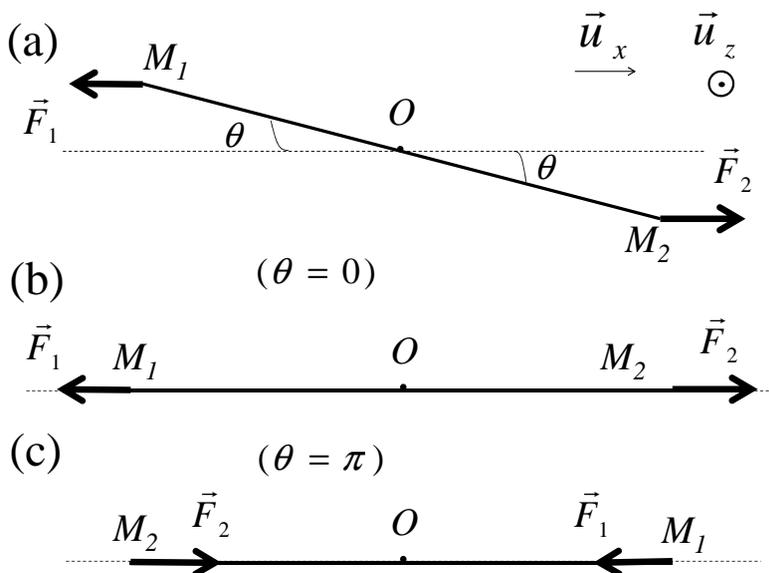


FIGURE 7.3 – Moment d'un couple de forces, rotation et équilibre

7.3 Moment cinétique

7.3.1 Définition

Pour un mouvement rectiligne, c-à-d pour une translation, on a vu qu'à travers le PFDC $\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt$, l'impulsion \vec{p} jouait un rôle très particulier. L'analogue de l'impulsion pour la rotation est le **moment cinétique (orbital)** :

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}} \quad (7.3)$$

Le moment cinétique est donc perpendiculaire au plan défini par \vec{r} et \vec{p} . Comme pour le moment d'une force, \vec{L} dépend directement de \vec{r} et donc du choix de l'origine O du système de coordonnées.

7.3.2 Théorème du moment cinétique

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\Gamma}} \quad (7.4)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{0} + \vec{r} \wedge (\sum \vec{F}) = \sum \vec{\Gamma} \end{aligned}$$

7.3.3 Conservation du moment cinétique

Si la somme des moments des forces est nulle $\sum \vec{\Gamma} = \vec{0}$ alors :
 - le moment cinétique \vec{L} se conserve :

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (7.5)$$

- le mouvement est contenu dans le plan $\mathcal{P} = (\vec{r}, \vec{p}) = (\vec{r}, \vec{v})$.

Si on choisit un système de coordonnées cartésiennes ou cylindriques, le mouvement est dans un plan perpendiculaire à l'axe z .

La somme des moments des forces est nulle, soit si les forces sont nulles, c'est le cas trivial peu intéressant, soit si le point matériel étudié (M) est soumis à des forces centrales $\vec{F} \sim \vec{u}_r$. Ce cas est beaucoup plus pertinent car les quatre interactions fondamentales sont des forces centrales ! Ainsi lorsque vous étudierez la gravitation, l'électromagnétisme ou la physique nucléaire, la conservation du moment cinétique jouera un rôle très important. Dans la section suivante nous allons voir que la seconde loi de Kepler, la loi des aires, est une conséquence directe de la conservation du moment cinétique. Retenez que :

$$\text{Si } \vec{F} \text{ est centrale} \Rightarrow \sum \vec{\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} \text{ se conserve}$$

7.3.4 Liens translation \longleftrightarrow rotation, moment d'inertie

Le vecteur rotation est tel que $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z = \dot{\phi} \vec{u}_z$. Le vecteur $\vec{\omega}$ a pour les rotations un rôle similaire à la vitesse \vec{v} pour les translations.

De façon analogue, pour les translations, la condition d'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$ implique $d\vec{p}/dt = \vec{0}$ et donc que l'impulsion se conserve. Pour les rotations, la condition d'équilibre $\sum \vec{\Gamma} = \vec{0}$ implique $d\vec{L}/dt = \vec{0}$ donnant la conservation du moment cinétique. On peut ainsi faire une analogie entre l'impulsion et le moment cinétique, ainsi qu'entre la force et le moment de la force.

Si $\sum \vec{\Gamma} = \vec{0}$ le mouvement est plan. Soit \vec{u}_z le vecteur normal à ce plan. En utilisant un système de coordonnées cylindriques, on peut montrer très facilement une propriété fondamentale du moment cinétique :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \rho \vec{u}_\rho \wedge m(\dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{u}_\phi) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{L} = m\rho^2 \dot{\phi} \vec{u}_z = m\rho^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega}} \quad (7.6)$$

Le moment cinétique est proportionnel au vecteur rotation. Le coefficient de proportionnalité est une nouvelle quantité physique, cruciale en physique des solides, notée I , nommée « **moment d'inertie** » et telle que $I = m\rho^2$ (pour un seul point, ρ est la distance polaire). L'équation (7.6) est à rapprocher de la définition de l'impulsion :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

On voit que I joue un rôle pour les rotations équivalent à celui de la masse pour les translations.

Pour un ensemble de point matériels labellisés par l'indice j , le moment d'inertie devient, pour un ensemble discret $I = \sum_j m_j \rho_j^2$, ou pour un ensemble continu $I = \int_{\text{objet}} \rho^2 dm$ avec dm un élément de masse infinitésimal relié à la masse volumique de l'objet μ et au volume infinitésimal dV par la relation¹ $dm = \mu dV$. Le moment d'inertie d'un objet dépend donc de sa densité en masse, de sa forme et de la position de l'axe de rotation. Si l'objet est homogène la masse volumique est simplement donnée par le rapport de la masse de l'objet M sur son volume V : $\mu = M/V$.

Par exemple, une tige de masse M et de longueur L pouvant tourner en son milieu a un moment d'inertie $I = ML^2/12$. Si la même tige tourne, non pas autour de son milieu, mais de l'une de ses extrémités alors $I = ML^2/3$. Le centre d'inertie d'une sphère de rayon R et de masse M tournant autour d'un axe passant par son centre vaut $I = 2MR^2/5$. C'est en mécanique du solide que vous étudierez en détails les moments d'inertie de différents corps rigides.

Enfin, le PFDC est à rapprocher du théorème du moment cinétique (équ.(7.4)), et de la dérivée temporelle de l'équation (7.6) :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad \sum \vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$$

	Translations	Rotations
	\vec{v}	$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z \perp \mathcal{P}(\vec{r}, \vec{p})$
	m	$I = m\rho^2$
Résumé :	\vec{p}	$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$
	$\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt = d(m\vec{v})/dt$	$\sum \vec{\Gamma} = d\vec{L}/dt = d(I\vec{\omega})/dt$
	$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_T^i = \vec{p}_T^f$	$\sum \vec{\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$

7.3.5 C7.2 – Rotation du patineur

Un patineur sur glace écarte ses bras puis lance un mouvement de rotation sur lui même avec la vitesse angulaire $\omega_i = 1 \text{ tr/s}$. Bras écartés, son moment d'inertie vaut I_i . Il plie ses bras contre son corps. Le nouveau moment d'inertie du patineur vaut maintenant $I_f = kI_i$ avec $k < 1$. Si on néglige les frottements, le moment cinétique se conserve-t-il ? En déduire la nouvelle vitesse angulaire ω_f (A.N. : $I_i = 3 \text{ kg.m}^2$ et $I_f = 2 \text{ kg.m}^2$). Justifier pourquoi $k < 1$.

1. La masse volumique est notée ici μ pour éviter toute confusion avec la coordonnée polaire ρ .

Réponses

7.4 Applications

7.4.1 Loi des aires (2^{nde} loi de Kepler)

Le mouvement des satellites est tel que la surface ΔS balayée par le vecteur position \vec{r} pendant l'intervalle de temps Δt est indépendante de la position du satellite dans son orbite et donc du temps t où l'on considère le mouvement.

Cette loi est illustrée sur la figure 7.4a qui représente, par exemple, la trajectoire elliptique de la Lune en orbite autour de la Terre. Le point A est l'apogée, et le point P le périégée. Les aires nommées ΔS_1 et ΔS_2 sont balayées pendant le même intervalle de temps Δt . Il apparaît que ces aires sont égales ! *Pourquoi ?*

• Raisonnement géométrique

Afin de réaliser la démonstration, il nous faut un résultat de géométrie reliant la surface d'un triangle à deux des vecteurs qui le définissent. Ceci est illustré sur la figure 7.4b où les vecteurs \vec{u} et \vec{w} définissent le triangle BCD en trait plein. On appelle α l'angle entre les deux vecteurs. On calcule la surface en prenant une hauteur, par exemple celle issue de B qui décompose alors le vecteur \vec{u} en deux parties \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . On obtient pour la surface du triangle :

$$S = \|\vec{u}_1\| \|h/2\| + \|\vec{u}_2\| \|h/2\| = \|\vec{u}\| \|h/2\| = (\|\vec{u}\| \|\vec{w}\| \sin \alpha) / 2 = \|\vec{u} \wedge \vec{w}\| / 2.$$

Revenons à présent à l'orbite de la Lune et faisons un raisonnement infinitésimal entre les instants t et $t' = t + dt$. Entre ces deux instants, la Lune se déplace de la position \vec{r} à la position \vec{r}' comme montré par la figure 7.4c (le déplacement

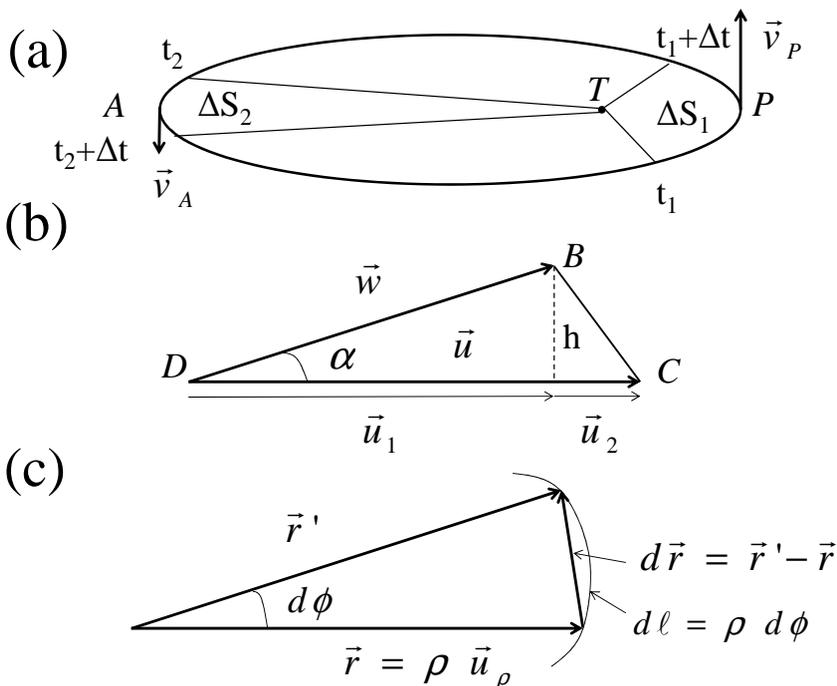


FIGURE 7.4 – Loi des aires

a été exagéré afin que la figure soit lisible). La surface élémentaire dS balayée pendant le temps dt est donc délimitée par les deux vecteurs \vec{r} et \vec{r}' . En vertu du résultat obtenu précédemment, on obtient :

$$dS = \frac{\|\vec{r} \wedge \vec{r}'\|}{2} = \frac{\|\vec{r} \wedge (\vec{r} + d\vec{r})\|}{2} = \frac{\|(\vec{r} \wedge \vec{r} + \vec{r} \wedge d\vec{r})\|}{2} = \frac{\|\vec{r} \wedge d\vec{r}\|}{2}$$

$$\text{D'où : } \frac{dS}{dt} = \frac{\|\vec{r} \wedge d\vec{r}/dt\|}{2} = \frac{\|\vec{r} \wedge \vec{v}\|}{2} = \frac{\|\vec{r} \wedge \vec{p}\|}{2m} = \frac{\|\vec{L}\|}{2m}$$

Si le moment cinétique se conserve, $\|\vec{L}\| = cste$, alors $dS/dt = L/(2m) = cste$. Comme la gravitation est une force centrale, le moment de la force est nul et le moment cinétique se conserve, d'où la variation de surface par unité de temps est une constante, ce qui démontre la seconde loi de Kepler :

$$dS = \frac{L}{2m} dt \Rightarrow \Delta S = \int dS = \int \frac{L}{2m} dt = \frac{L}{2m} \int dt = \frac{L}{2m} \Delta t$$

et donc si $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$ alors $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$.

• Raisonnement polaire

La surface élémentaire balayée entre les instants t et $t' = t + dt$ est donnée sur la figure 7.4c. Le coté du bas est de longueur ρ , le coté droit peut être assimilé

à la tangente (grâce au raisonnement infinitésimal), il est donc perpendiculaire au coté du bas et a pour longueur $d\ell = \rho d\phi$. La surface vaut donc :

$$dS = \frac{\rho d\ell}{2} = \frac{\rho^2 d\phi}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \omega = \frac{L}{2m}} \quad (7.7)$$

et $dS/dt = cste$ si $L = cste$.

7.4.2 Mouvement sur une ellipse

En général, les planètes et les satellites ont des trajectoires elliptiques autour de la masse attractive qui se situe à l'un des foyers de l'ellipse (la Terre occupe un des foyers de l'ellipse parcourue par la Lune sur la figure 7.4a, ou, en accord avec la première loi de Kepler, le Soleil est un des foyers de l'orbite de la Terre).

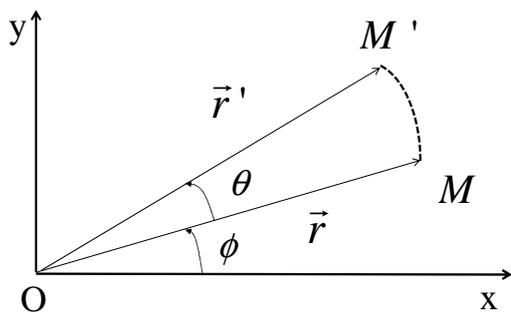
La force de gravitation étant centrale, le moment cinétique se conserve $L = L_0$, l'aspect vectoriel nous dit que la direction est constante et que le mouvement est plan. On a vu qu'en coordonnées polaires le moment cinétique prend la forme (éq.(7.6)) : $L = L_0 = m\rho^2 \dot{\phi}$. L'origine O du système polaire est prise sur le foyer attractif ($O = T$). On en déduit donc que $\dot{\phi} \sim 1/\rho^2$ ce qui implique que pour toute contraction du mouvement (lorsque le satellite se rapproche de la masse attractive, ρ baisse), la vitesse angulaire $\omega = \dot{\phi}$ augmente.

La vitesse du satellite est donnée par la relation : $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{u}_\phi$, soit en norme : $v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2}$. Cette expression est un peu trop compliquée pour comprendre qualitativement ce qu'il se passe. Pour simplifier la discussion, nous allons comparer les normes des vitesses à l'apogée et au périégée, les points extrêmes de l'orbite ce qui se traduit mathématiquement par $\dot{\rho} = 0$. Ainsi sur ces points extrêmes, la vitesse a une expression plus simple $v = \rho\dot{\phi} = \rho\omega$. En tenant compte de la conservation du moment cinétique qui implique $\omega \sim 1/\rho^2$, on en déduit que $v \sim 1/\rho$: plus le satellite est près de la masse attractive, plus sa vitesse est grande ! Ceci est vrai sur toute la trajectoire. Cette propriété des vitesses sur les trajectoires elliptiques est illustrée sur la figure 7.4a.

7.5 Formulations mathématiques des rotations

Considérons une rotation d'angle θ autour d'un axe que l'on choisit comme axe z . Le point M de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (ρ, ϕ) devient le point M' de coordonnées cartésiennes (x', y') et de coordonnées polaires $(\rho, \phi' = \phi + \theta)$. Réalisons que la norme ρ des vecteurs positions $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{r}' = \overrightarrow{OM'}$ reste inchangée car on se limite à une simple rotation. Dans un cadre dynamique général, bien entendu, cette norme peut changer aussi, mais afin de simplifier la discussion actuelle nous nous limitons aux rotations (rayon constant). Par conséquent, les propriétés que nous allons voir sont, en fait, celles des vecteurs unitaires...

La situation est représentée sur la figure 7.5. La rotation d'angle θ que l'on va noter de façon générique R_θ , est une application linéaire qui nous fait passer du point M au point M' : $M \xrightarrow{R_\theta} M'$, ou en vecteurs : $\overrightarrow{OM} \xrightarrow{R_\theta} \overrightarrow{OM'}$, ou en

FIGURE 7.5 – Rotation d'angle θ par rapport à l'axe z .

angle $\phi \xrightarrow{R_\theta} \phi' = \phi + \theta$. Si on écrit les composantes du vecteur \vec{r} comme un « vecteur colonne » on a : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{pmatrix}$ ce qui donne pour \vec{r}' :

$$\begin{aligned} \vec{r}' = \overrightarrow{OM}' &= \begin{pmatrix} x' = \rho \cos \phi' = \rho \cos(\phi + \theta) = \rho \cos \phi \cos \theta - \rho \sin \phi \sin \theta \\ y' = \rho \sin \phi' = \rho \sin(\phi + \theta) = \rho \cos \phi \sin \theta + \rho \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.8)$$

• Représentation matricielle

Si on représente les vecteurs positions \vec{r} et \vec{r}' , par des « vecteurs colonnes », c'est à dire par des matrices 2×1 , alors la rotation R_θ peut être représentée par une matrice 2×2 \mathcal{R}_θ telle que :

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

car les résultats de l'équation (7.8) peuvent aussi s'écrire :

$$\vec{r}' = R_\theta \vec{r} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

• Rotation infinitésimale

Supposons que l'angle θ soit infinitésimal : $\theta = d\phi$. Les éléments de la matrice de rotation \mathcal{R}_θ (ou les coefficients de l'éq.(7.8)) peuvent être simplifiés à l'aide des développements limités des fonctions cosinus et sinus : $\cos d\phi \simeq 1$ et $\sin d\phi \simeq d\phi$. Les relations entre les coordonnées de M et de M' deviennent :

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' = x - y d\phi \\ y' = x d\phi + y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx = x' - x = -y d\phi \\ dy = y' - y = x d\phi \end{pmatrix}$$

Comme la rotation est infinitésimale, M et M' sont proches : $dx = x' - x$ et $dy = y' - y$, ou vectoriellement $d\vec{r} = \overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM}$.

Or $\vec{u}_z \wedge \vec{r}' = -y\vec{u}_x + x\vec{u}_y$ soit $\vec{u}_z \wedge \vec{r}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$d\vec{r}' = d\phi \vec{u}_z \wedge \vec{r}' \Rightarrow \frac{d\vec{r}'}{d\phi} = \vec{u}_z \wedge \vec{r}' \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

où l'on a utilisé le fait que $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z = \dot{\phi}\vec{u}_z$. On constate donc que la dérivée du vecteur position est perpendiculaire au vecteur position : $d\vec{r}'/d\phi \perp \vec{r}'$ car $d\vec{r}' \perp (\vec{u}_z, \vec{r}')$ en vertu des propriétés du produit vectoriel. La dernière relation peut surprendre, mais si on passe en coordonnées polaires on retrouve le résultat bien connu de la vitesse pour un mouvement circulaire :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}' = \rho\omega \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho = \rho\omega \vec{u}_\phi.$$

• Cas général

- Si la rotation a lieu autour d'un axe quelconque (Δ) de vecteur unitaire \vec{u}_Δ , il suffit de remplacer z par Δ dans l'équation précédente.

- La démonstration précédente n'est valable que pour les vecteurs unitaires (voir discussion en début de section). Au lieu du vecteur position \vec{r}' , il est préférable d'utiliser la notation \vec{u}_i où i est une coordonnée quelconque ($i = x, y, z, \rho, \phi, \dots$). Le résultat fondamental obtenu est donc :

$$\boxed{\dot{\vec{u}}_i = \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i \quad \text{avec} \quad \vec{\omega} = \omega\vec{u}_\Delta = \dot{\phi}\vec{u}_\Delta} \quad (7.10)$$

Cette formule est très importante lorsque l'on veut étudier les changements de référentiels, en particulier si on veut comprendre ce qu'est la force de Coriolis. Cette force, responsable des mouvements de rotation des dépressions et anticyclones sur notre planète, est une « force d'inertie » qui apparaît lorsqu'on applique le PFDC dans un référentiel non-galiléen. Dans le chapitre 3 nous avons vu que le PFDC s'applique dans les référentiels d'inertie, ce que n'est pas la Terre en rotation. Nous étudierons plus en détails les forces d'inertie dans le chapitre 9.

- Si le vecteur position \vec{r}' est susceptible de changer en norme et en direction, alors la vitesse est reliée à la position et au vecteur rotation par la relation :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \sum_i x_i \dot{\vec{u}}_i \Rightarrow \vec{v} = \sum_i \dot{x}_i \vec{u}_i + x_i \dot{\vec{u}}_i \\ &\Rightarrow \vec{v} = \sum_i \dot{x}_i \vec{u}_i + x_i \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i = \left(\sum_i \dot{x}_i \vec{u}_i \right) + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \end{aligned} \quad (7.11)$$

Le premier terme de la dernière égalité a été laissé sous forme de composantes car son interprétation relativement subtile mérite une étude approfondie qui sera faite dans le chapitre 9. L'expression de la vitesse $\vec{v} = \sum_i \dot{x}_i \vec{u}_i$, utilisée jusqu'à présent et amenant avec l'équation précédente à la contradiction $\vec{v} = \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$, n'est vraie que dans un référentiel d'inertie avec des vecteurs unitaires \vec{u}_i fixes... À suivre, lors du chapitre 9.

7.6 Exercices

E7.1 – Top Chrono

Un véhicule effectue un test de performance sur une grande ligne droite. À partir d'un départ arrêté et avec une accélération constante (a_0) il atteint la ligne d'arrivée, qui est à une distance de 100 m , en 2 s . Les roues du véhicule ont un rayon de 50 cm .

- 1) Donner les expressions de la vitesse, de la position et de la vitesse angulaire des roues à un instant t quelconque.
- 2) Calculer les valeurs numériques de ces trois quantités après 1 s , à mi-parcours et à l'arrivée. Exprimer la vitesse angulaire en rad/s , tr/s et en tr/min , et la vitesse en m/s et en km/h . Quel est le type du véhicule ?

E7.2 – Construction d'une hélice d'avion

On vous demande de construire une hélice d'avion sachant qu'à plein régime : le moteur tournera à 2400 tr/min , l'aérodynamisme permettra à l'avion de voler à 270 km/h , et que les matériaux utilisés pour construire l'hélice permettront d'avoir une vitesse dans l'air au maximum égale à 270 m/s .

- 1) Exprimer la vitesse totale des extrémités de l'hélice.
- 2) En déduire le rayon maximal que peut avoir l'hélice.
- 3) Avec ce rayon, calculer l'accélération des extrémités de l'hélice.

E7.3 – Lancer du disque

Un lanceur de disque effectue un mouvement de rotation tel que le disque a un mouvement circulaire de rayon 80 cm . À un certain instant, la vitesse angulaire est de $\omega = 10\text{ rad/s}$ et subit un accroissement de $\alpha = 50\text{ rad.s}^{-2}$

À cet instant, calculer les composantes tangentielle et centripètes de l'accélération. En déduire la valeur de l'accélération totale.

E7.4 – Moment d'une force

Une barre rigide, de longueur ℓ , est accrochée à une extrémité fixe O . Pour chaque cas de la figure 7.6 calculer le moment de la force \vec{F} par rapport à O au niveau des points P et M (milieu de OP), puis déterminer la position d'équilibre de la barre OP .

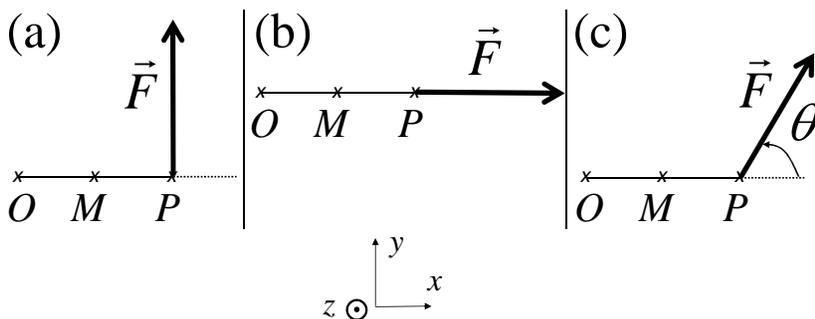


FIGURE 7.6 – Moment d'une force

E7.4 – Glissade sur une sphère, sans frottement

Un point M de masse m est placé à l'instant initial sur le sommet S d'une demi-sphère sur laquelle il glisse sans frottements. Il possède une vitesse initiale horizontale v_0 . Soit O le centre de la demi-sphère et R son rayon. Soit (Ox) l'axe horizontal, (Oy) l'axe vertical et ϕ l'angle (\vec{u}_y, \vec{r}) comme indiqué sur la figure 7.7. L'objectif de l'exercice est de calculer l'angle de décrochage ϕ_D associé à la position D où la masse m quitte la sphère. On notera v la vitesse de M tant que la masse reste sur la sphère.

1) En utilisant le PFDC, déterminer l'intensité de la réaction normale N de la sphère sur la masse m en fonction de m , g , R , v et ϕ .

2) En utilisant le PFDC, calculer l'expression de v en fonction de g , R , v_0 et ϕ .

Indications : éliminer la variable t dans l'équation différentielle reliant $\dot{\omega}$ à ϕ (avec $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\phi}$), utiliser v comme variable plutôt que ω et résoudre l'équation différentielle reliant dv à $d\phi$ par la méthode de séparation des variables.

3) Retrouver ce résultat à l'aide du théorème du moment cinétique.

4) Retrouver la relation précédente sans l'utilisation des différentielles grâce à la conservation de l'énergie. On précisera le rôle joué par la réaction dans le bilan énergétique. Quelle méthode préférez-vous ?

5) Quelle est la valeur de l'angle de décrochage ϕ_D ?

6) Quel est le mouvement ultérieur ?

7) Décrire la situation si $v_0^2 > Rg$.

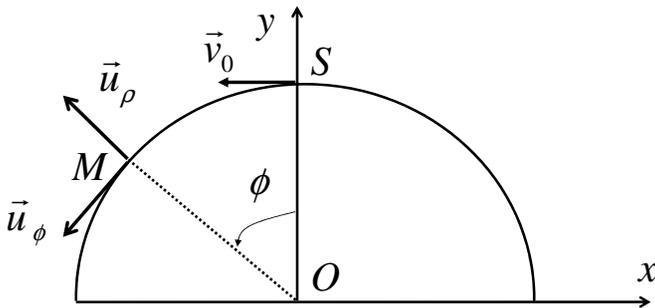


FIGURE 7.7 – Glissade sur une sphère

E7.5 – Pendule

Cet exercice reprend et complète l'exercice E5.5.

Un pendule simple est constitué d'une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur l et soumise à l'action de la pesanteur g . La position du pendule est repérée par l'angle orienté ϕ ($-\pi \leq \phi \leq \pi$ et $\phi = 0$ à l'équilibre). Dans la suite, on néglige les frottements et on s'intéresse au régime des petites oscillations.

1) Calculer le moment des forces à partir du point O , centre de rotation des oscillations du pendule.

2) Calculer le moment cinétique (orbital) de la masse m .

3) En déduire l'équation différentielle du mouvement.

4) En supposant que les oscillations sont de faibles amplitudes ($\sin \phi \approx \phi$), donner l'équation différentielle contrôlant l'évolution de ϕ . En déduire la période propre du mouvement et la solution générale pour $\phi(t)$. Les conditions initiales sont telles que le pendule est lâché de la position $\phi = \phi_i$ sans vitesse initiale.

E7.6 – Pulsar

Une étoile de masse $M_\star = 5M_\odot$ en fin de vie, explose en supernova. Avant l'explosion, la densité de l'étoile est identique à celle du soleil (seulement 40% supérieure à celle de l'eau liquide) et elle tourne sur elle-même en 30 jours. Lors de la supernova, 10% de la masse est expulsée, le reste étant concentré dans une petite sphère appelée étoile à neutrons dont la densité correspond à celle du noyau atomique $\rho_{nucl} \approx 10^{15} \rho_{eau}$. On prendra $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. On supposera que les densités sont constantes dans les différentes étoiles.

1) Calculer le rayon de l'étoile avant puis après la supernova.

2) Calculer la vitesse angulaire de l'étoile à neutrons. (Le moment d'inertie d'une sphère pleine homogène est $I_s = \frac{2}{5} MR^2$)

E7.7 – Tirons le fil

Un point matériel M , de masse m , glisse sans frottement sur un plan horizontal. Il est fixé à l'extrémité d'un fil passant par un trou quasi-punctuel en un point O du plan. Le point M est initialement animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse v_0 , avec $OM = \rho_0$ (l'autre extrémité du fil est fixée). Puis on tire sur l'autre extrémité du fil de manière à diminuer la longueur jusqu'à $OM = \rho < \rho_0$. On ne s'intéresse pas à la dynamique du passage de ρ_0 à ρ .

1) Pour le point M , lorsque ρ est constant, faire le bilan des forces et calculer l'énergie cinétique, le moment cinétique par rapport à O puis la tension du fil.

2) Quelle est la quantité invariante lorsque nous tirons le fil? En déduire la vitesse angulaire $\omega(\rho)$ du point M (en fonction de ρ_0 et v_0).

3) Retrouver ce résultat à l'aide de la seconde loi de Newton.

4) Calculer le travail fourni au système pour passer de ρ_0 à ρ , par deux méthodes différentes.

E7.8 – Danger dans l'espace

Vous partez en voyage dans l'espace avec votre dernière navette. Lors du voyage, vous coupez les moteurs de la navette et décidez de faire une sortie en combinaison (votre masse totale est alors de 150 kg). Par mesure de sécurité vous attachez votre combinaison à l'aide d'un câble ($\ell = 100 \text{ m}$) à l'avant de votre navette. Vous sortez dans l'espace dans une direction perpendiculaire à l'axe de la fusée en vous propulsant avec vos pieds. Lorsque le câble se tend sur toute sa longueur, une déchirure apparaît sur votre combinaison. L'échappement du gaz produit une poussée *tangentielle* (notée \vec{F}) vous donnant une accélération (tangentielle) $a_F = 10^{-2} \text{ m/s}^2$ et vous vous mettez à tourner autour de la navette. La rotation autour du nez de la navette est libre (le câble ne s'enroule pas). Comprenez le danger, vous colmatez la fuite, mais cela vous prend 2 minutes. Vous décidez alors de rentrer dans la navette en tirant sur le câble avec vos bras.

1) Pendant la fuite de gaz.

- Faire le schéma de la situation (utiliser un système de coordonnées polaires centré sur la pointe de la navette, lieu d'attache du câble) et faire le bilan des forces auxquelles vous êtes soumis.
- Donner l'expression du moment cinétique. Est-il conservé ?
- À partir du théorème du moment cinétique calculer l'expression de l'accélération angulaire $\alpha = \dot{\omega}$.
- Appliquer la seconde loi de Newton et en déduire les expressions de l'accélération angulaire (deuxième méthode) et de la tension du câble (T).
- Déterminer les expressions temporelles de la vitesse angulaire $\omega(t)$ et de la norme de la vitesse tangentielle $v(t)$. Justifier la simplicité de l'expression trouvée pour $v(t)$.

2) La fuite est colmatée à $t = t_1 = 2 \text{ min}$.

- Le moment cinétique va-t-il se conserver à partir de maintenant ?
- Calculer votre vitesse tangentielle, votre vitesse angulaire et la tension du câble, à cet instant t_1 .
- Vous vous tractez avec vos bras mais à $\rho_2 = 20 \text{ m}$ de la navette vous commencez à avoir du mal. Donner v , ω et T à cette distance.
- Sur Terre vous étiez tout juste capable de supporter votre poids lorsque vous portiez votre combinaison. Déterminer la distance à partir de laquelle vous n'arrivez plus à vous rapprocher de la navette. La prochaine fois, quelles précautions prendrez-vous avant de sortir dans l'espace ?

E7.9 – Modèle de Bohr pour l'atome d'Hydrogène

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.

A.N. : $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$, $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$,
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I.}$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Partie A

L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton et d'un électron interagissant entre eux du fait de leur charge électrique. Soient donc un proton (point P) de masse m_p et de charge $+e$, et un électron (point E) de masse m_e et de charge $-e$. Les positions et les vitesses de ces particules seront définies par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen.

L'électron et le proton s'attirent ; la force électrostatique exercée par l'électron sur le proton est donnée par :

$$\vec{F}_{E \rightarrow P} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PE}}{\|\overrightarrow{PE}\|^3}$$

- Donner l'expression de la force $\vec{F}_{P \rightarrow E}$ exercée par le proton sur l'électron. Représenter sur un schéma les forces $\vec{F}_{P \rightarrow E}$ et $\vec{F}_{E \rightarrow P}$.
- Montrer que la force de gravitation est négligeable devant la force électrostatique. Montrer alors que le système proton-électron peut être considéré comme isolé. Que peut-on en déduire au sujet de sa quantité de mouvement et de son énergie ?
- Prendre une origine O quelconque et exprimer \overrightarrow{OG} , le vecteur position

du centre de masse G , en fonction des vecteurs position des deux particules. Donner l'expression de la vitesse du centre de masse. Dire pourquoi on peut associer à G un référentiel galiléen. En utilisant les valeurs numériques des masses du proton et de l'électron, montrer que le point G peut être confondu avec le point P ; pour cela, on pourra calculer le rapport PG/PE .

4) Montrer que les quantités de mouvement du proton et de l'électron par rapport au référentiel du centre de masse (d'origine G), ont même norme et sont de sens opposés. En déduire (en utilisant les valeurs numériques des masses) que la vitesse du proton est très petite comparée à celle de l'électron.

Partie B

D'après ce qui vient d'être montré dans la partie A, on voit que l'on peut confondre la position du centre de masse G avec celle du proton supposé fixe et centrer sur ce dernier un référentiel galiléen. Le proton sera donc placé en O , origine du repère, l'électron sera placé en un point M et on notera $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = r\overrightarrow{u}_r$.

1) Écrire, avec la nouvelle notation, l'expression de la force électrostatique \overrightarrow{f} exercée par le proton sur l'électron.

2) Montrer que ce champ de force dérive d'une énergie potentielle U . établir l'expression de cette énergie si on prend l'origine des potentiels à l'infini.

3) Montrer que le moment cinétique \overrightarrow{L} de l'électron par rapport à O est constant. En déduire que la trajectoire est plane. Exprimer \overrightarrow{L} dans le système de coordonnées cylindriques adapté à la situation.

4) Une des hypothèses de Bohr suppose que la trajectoire est circulaire. Montrer qu'elle est alors parcourue d'un mouvement uniforme. Établir l'expression de $v = \|\overrightarrow{v}\|$ en fonction du rayon r de la trajectoire.

5) Donner l'expression de l'énergie mécanique E de l'électron placé dans le champ de force créé par le proton lorsqu'il décrit une trajectoire circulaire de rayon r .

6) Une autre hypothèse de Bohr est la suivante : parmi les trajectoires circulaires possibles, celles qui sont effectivement décrites par l'électron sont celles qui vérifient la relation

$$\|\overrightarrow{L}\| = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$

où h est la constante de Planck et n un nombre entier supérieur ou égal à 1, appelé nombre quantique principal. Donner l'expression de

- $r(n)$, rayon du cercle correspondant au nombre quantique n ;

- l'énergie de l'électron sur ce cercle. Vérifier qu'elle varie comme $1/n^2$.

Calculer le rayon de l'orbite de l'atome d'hydrogène correspondant à $n = 1$.

7) L'énergie d'ionisation est l'énergie qu'il faut fournir à l'électron pour le faire passer de l'orbite correspondant à $n = 1$ en un lieu où il n'est plus soumis à l'attraction du proton.

Donner l'expression de cette énergie pour l'atome d'hydrogène. Calculer la valeur numérique en électron-volt (eV). Comparer avec la valeur expérimentale qui est de $13,6 eV$. Commenter alors la validité du modèle de Bohr.

Chapitre 8

Gravitation

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

- Propriétés de la force de gravitation (C8.1).
- Énergie potentielle gravitationnelle et vitesse de libération.
- Notions élémentaires sur l'expansion de l'univers et les trous noirs.
- Mouvements avec force en $1/r^2$: satellites et mouvement circulaire.
- Mouvements avec force en $1/r^2$: potentiel effectif et trajectoires elliptique, parabolique et hyperbolique.
- Mise en orbite d'un satellite. Troisième loi de Kepler.

• Compétences

- Calcul de l'énergie potentielle d'une force en $1/r^2$.
- Calcul de la vitesse de libération d'une sonde (C8.2).
- Savoir retrouver les propriétés des satellites en mouvement circulaire (C8.3).
- Obtention et analyse qualitative de l'énergie potentielle gravitationnelle effective. Comprendre le lien entre le signe de l'énergie mécanique et la forme de la trajectoire.
- Calcul des bilans énergétiques et leurs implications (C8.4).
- Outils mathématiques :
 - * Étude des coniques (annexe E).
 - * Gravitation d'une sphère homogène (annexe F, C8.5).

• Lecture conseillée

Notions de physique	Young et Freedman (2013)	Hecht (1999)
Gravitation	ch.13 p402-418 + p421-427	ch.7 p237-268

8.1 Introduction

Vous avez à présent en main la plupart des connaissances et des outils nécessaires à l'étude des interactions fondamentales à longue portée que sont la gravitation et l'électromagnétisme. La complexité des phénomènes électriques, magnétiques et des ondes électromagnétiques fait que leurs études sont inscrites dans un cours spécifique enseigné en seconde année. En revanche, d'un point de vue historique, l'étude de la gravitation est intimement liée au développement de la mécanique, raison pour laquelle ce chapitre sur la gravitation est inclus dans ce cours de mécanique.

8.1.1 Définition

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la description classique de la gravitation, rend compte de l'attraction mutuelle des corps massifs à travers la définition de la force gravitationnelle \vec{F}_G :

$$\boxed{\vec{F}_G = -\frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}_r = -\vec{F}'_G \quad (\vec{u}_r = \vec{r}' / \|\vec{r}'\|)} \quad (8.1)$$

où m est la masse du système physique étudié soumise à la force gravitationnelle \vec{F}_G causée par la présence d'une masse m' située à la distance r , comme illustré sur la figure 8.1. Par convention, l'origine du repère (notée O) est prise sur la masse m' et le point d'étude est associé au point M de masse m .

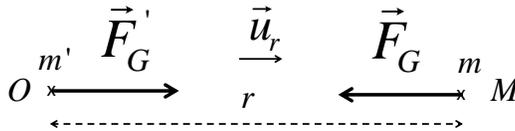


FIGURE 8.1 – Attraction gravitationnelle entre les masses m et m'

La force gravitationnelle est :

- à **longue portée** : elle peut agir sur de très grandes distances,
- **centrale** : la force est de la forme $\boxed{\vec{F} = F(r)\vec{u}_r}$,
- **conservative** : l'énergie mécanique se conserve,
- responsable du phénomène de **pesanteur** (voir section 3.1.1 et C3.1).

8.1.2 Complications

• Troisième loi de Newton

La force gravitationnelle donnée par l'éq.(8.1) s'applique à la masse m qui correspond au système physique étudié. Cependant, en vertu de la troisième loi de Newton, du principe de l'action-réaction, la masse m exerce elle aussi une attraction gravitationnelle sur la masse m' . Par conséquent, pour un observateur extérieur au système « $m + m'$ », les deux masses sont en mouvement.

En d'autres mots, la masse m' , prise comme origine O de notre système de coordonnées pour exprimer la force \vec{F}_G donnée par l'éq.(8.1), subit une force. L'exercice de cours ci-dessous s'intéresse à l'étude de cette force et à l'accélération de la masse m' . Ici, nous voulons remarquer que le référentiel associé au système de coordonnées centré sur O n'est pas un référentiel d'inertie, car O est associé à m' qui subit une force. En toute rigueur, on ne peut donc pas y appliquer les lois de Newton et en particulier le PFDC!

Lors du chapitre 6 nous avons vu qu'il existe un point particulier pour la description d'un système physique constitué d'un ensemble de points : le centre de masse. Ainsi, l'étude de l'interaction gravitationnelle entre les deux masses m et m' devrait se faire à partir du centre de masse, c'est ce qu'on appelle « le problème à deux corps ». Cette étude est assez technique et n'est pas fondamentale pour la compréhension d'un grand nombre de propriétés de la force gravitationnelle, nous ne la traiterons pas dans ce cours.

En fait, si $m' \gg m$ alors la position du centre de masse est très proche de la masse m' ($G \approx O$) et le problème soulevé plus haut peut être parfaitement négligé : on peut choisir m' comme origine, supposer que le référentiel est galiléen et ainsi appliquer les lois de Newton. Démontrons le :

• **C8.1 – On attire la Terre ! Ou presque...**

Une personne de masse $m = 70 \text{ kg}$ est à la surface de la Terre de masse $m' = M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$.

- 1) Calculer l'accélération s'appliquant sur la personne.*
- 2) Calculer l'accélération s'appliquant sur la Terre. En déduire le rapport des accélérations. Conclure.*
- 3) Calculer la position du centre de masse.*

Réponses

- Objets à symétrie sphérique

« La force de gravitation exercée par un objet à symétrie sphérique sur un objet *extérieur*, est équivalente à la force exercée par un point matériel situé au centre de symétrie où se concentre toute la masse. »

Cette propriété simplifie considérablement les calculs *pour un objet extérieur*. À l'intérieur de la sphère, la force et l'énergie potentielle sont très différentes (voir exercice E8.17). La démonstration de cette propriété étant assez technique, car faisant appel au système de coordonnées sphériques que nous avons malheureusement très peu étudié, nous la repoussons dans l'annexe F.

- Masses inertielle et gravitationnelle, relativité générale et principe d'équivalence

La masse m intervenant dans l'expression de la force gravitationnelle, éq.(8.1), est appelée « masse gravitationnelle ». Elle aurait pu être différente de la « masse inertielle » intervenant dans le principe fondamental de la dynamique classique. Toutes les expériences menées jusqu'à présent ont été incapables de montrer une quelconque différence entre ces deux masses. En mécanique classique (ou physique newtonienne) cette équivalence est purement fortuite. Einstein a alors érigé en principe cette équivalence entre ces deux types de masses (le « principe d'équivalence ») qui est à la base de la relativité générale, théorie moderne de l'interaction gravitationnelle tenant compte des effets relativistes. L'action de la gravitation n'est plus vue comme une force mais comme une modification des propriétés de l'espace-temps, la trame de notre univers est alors vue comme un espace-temps-matière...

8.2 Énergie potentielle et applications

8.2.1 Énergie potentielle gravitationnelle

Par définition $dU = dW_{man} = -dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ (voir chapitre 4, section 4.3.1, éq.(4.10)). Ce qui donne pour la force gravitationnelle donnée par l'éq.(8.1) :

$$U(r) = \int \vec{F}_{man} \cdot d\vec{r} = \int \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} + c_I \quad (8.2)$$

où on a remplacé m' par le symbole M pour insister sur le fait qu'on travaille dans l'approximation $M \gg m$, et où c_I est une constante d'intégration que l'on fixe avec la condition limite que l'énergie potentielle est nulle quand $r \rightarrow +\infty$

(c-à-d l'influence de M est nulle à l'infini), ce qui implique $c_I = 0$. Remarquer que si on voulait $U = 0$ pour $r = 0$ on obtiendrait $c_I \rightarrow +\infty$ ce qui assez gênant ! Par conséquent, la fonction énergie potentielle d'une masse m située à la distance r de la masse attractive M est donnée par l'expression :

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (8.3)$$

Le résultat le plus surprenant est que l'énergie potentielle gravitationnelle est **négative**. Ceci traduit le fait que la force gravitationnelle est attractive, elle cherche à lier les deux masses.

Cela semble contradictoire avec l'expression de l'énergie potentielle de la pesanteur d'un corps de masse m situé à l'altitude z : $U_P(z) = +mgz$, où $g = GM/R^2$ pour un astre de masse M de rayon R . Cette énergie potentielle est définie positive grâce au choix arbitraire de l'origine des énergies potentielles à $z = 0$, ce qui correspond à $r = R$. À cette position l'énergie potentielle gravitationnelle donnée par l'équation (8.3) vaut $U(r = R) = -GMm/R = -mgR$. Avec ce choix d'origine, ce choix de constante, on réconcilie les expressions des énergies potentielles gravitationnelles et de pesanteur :

$$U(r = R + z) = -\frac{GMm}{R+z} = -\frac{gR^2m}{R+z} = -\frac{mgR}{1+z/R} = -mgR \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1}$$

$$\stackrel{z \ll R}{\simeq} -mgR \left(1 - \frac{z}{R}\right) = -mgR + mgz = -mgR + U_P(z)$$

où on a utilisé $(1 + \epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$ avec $\alpha = -1$ et $\epsilon = z/R$.

Rappelons que le choix de l'origine des énergies potentielles importe peu en physique¹ car seules les différences d'énergies ΔU ont un sens. En effet, les théorèmes des énergies cinétiques et mécaniques sont basés sur des différences (sur des différentielles d au niveau infinitésimal, sur les variations Δ au niveau macroscopique, voir chapitre 4, équations (4.7-10), (4.24) et la section 4.3.1).

8.2.2 Potentiel gravitationnel et champ gravitationnel

Si on veut exprimer l'influence de la masse M de façon indépendante de la masse de la particule test m , on définit le « potentiel gravitationnel » Φ comme l'énergie potentielle normalisée, ou énergie potentielle par unité de masse :

$$\Phi = \frac{U}{m} = -\frac{GM}{r}$$

Cette équation est analogue à la relation $V = U_e/q$ reliant le potentiel électrique V et l'énergie potentielle électrique U_e .

Le champ gravitationnel \vec{G} peut être vu, en mécanique classique, comme la force gravitationnelle par unité de masse m :

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r$$

On a toujours une analogie électrique où le champ électrique est la force de Coulomb par unité de charge électrique : $\vec{E} = \vec{F}_c/q$.

1. Ceci n'est pas vrai en relativité générale.

8.2.3 Vitesse de libération, états libres et états liés

La vitesse de libération d'un astre de masse M est la vitesse minimale qu'il faut fournir à un corps de masse m afin qu'il puisse se libérer de l'attraction de l'astre et poursuivre sa route infiniment loin.

• C8.2 – Sonde et vitesse de libération

1) Calculer la vitesse de libération d'une sonde de masse m lors d'un lancement **radial** à partir de la surface terrestre. On négligera la rotation de la Terre, les frottements et on supposera que la vitesse initiale v_0 de la sonde est obtenue instantanément (on néglige la période d'accélération de la fusée, la sonde à la vitesse v_0 à la position $r = R_T$).

2) À partir de l'expression des énergies du système à un instant t quelconque, calculer la vitesse de la sonde en fonction de la position à partir du centre de la Terre. Représenter graphiquement la variation du carré de cette vitesse en fonction du rapport r/R_T , pour les 3 cas $v_0 = v_L$, $v_0 > v_L$ et $v_0 < v_L$, où v_L est la vitesse de libération. Dans ce dernier cas, on calculera l'altitude maximale atteinte par la sonde en fonction de G , M_T , R_T et v_0 .

3) Donner le signe de l'énergie mécanique dans ces trois cas. Commenter.

Réponses

• États liés et états libres

On peut maintenant plus facilement interpréter le sens d'un signe négatif pour une énergie : on parle d'état « lié ». Une énergie potentielle négative est associée à une interaction attractive. Si l'ajout de l'énergie cinétique à cette énergie potentielle donne une *énergie mécanique négative*, alors *le système physique est lié*. C'est le cas des systèmes gravitationnels :

- où un astre possède des satellites, cas $M \gg m$: satellites naturels ou artificiels autour des planètes, systèmes planétaires (comme le système solaire), étoiles dans les galaxies possédant un trou noir central supermassif (a priori, la plupart des galaxies récentes) ;
- où plusieurs corps sont en interaction mutuelle, cas $m' \sim m$: étoiles doubles, systèmes d'étoiles multiples, étoiles dans certaines galaxies (galaxies anciennes), galaxies dans les amas de galaxies, amas dans les superamas.

C'est aussi le cas des atomes où l'interaction électromagnétique entre charges électriques opposées permet de lier électrons et noyaux.

En revanche *si l'énergie mécanique est positive* (bien que l'interaction soit attractive, $U < 0$) alors *le système physique est libre*, les objets constituant le système vont s'éloigner les uns des autres. Un système initialement lié peut devenir libre si une force extérieure injecte de l'énergie dans le système (l'exemple le plus courant est le phénomène d'ionisation des atomes où des électrons sont arrachés du nuage électronique, suite à l'interaction d'une particule extérieure (photon, électron...) sur l'atome, transformant ce dernier en ion).

Enfin, remarquons que dans cet exemple où une sonde est lancée radialement mais avec une vitesse insuffisante (cas $v_0 < v_L$), le système physique constitué des deux masses M et m (de l'astre et de la sonde) est dans un état lié. Cependant la masse m est animée d'un simple mouvement d'aller et de retour. Pour qu'il y ait « satellisation » (mouvements circulaires ou elliptiques), il faut que le mouvement soit bidimensionnel, c-à-d que la vitesse initiale \vec{v}_0 et la force \vec{F}_G définissent un plan (ne soient pas colinéaires). En particulier, nous verrons qu'il faut que le moment cinétique orbital soit non nul, ce qui sera étudié dans la section 8.3.

8.2.4 Expansion de l'Univers

• Loi de Hubble

En 1929, Hubble observe que la plupart des galaxies s'éloignent de nous et ceci d'autant plus vite que la distance qui nous en sépare est grande. On peut interpréter ce phénomène comme un effet d'expansion de l'espace, dans le cadre de la relativité générale d'Einstein, ce sont les modèles de « Big Bang ».

Les mesures des vitesses des galaxies réalisées jusqu'à présent, confirment les premières mesures de Hubble et indiquent que ces vitesses sont proportionnelles aux distances de séparation, c'est la fameuse « loi de Hubble » : $v_{exp} = H_0 r$ où r est la distance entre nous et la galaxie considérée, et H_0 est la constante de Hubble *aujourd'hui*.

Les dernières mesures de la constante de Hubble donnent la valeur moyenne $H_0 = 72 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$. Le Megaparsec (Mpc) correspond à la distance moyenne entre les galaxies, avec la conversion $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ A.L.} = 3,10 \cdot 10^{16} \text{ m}$, où A.L. est l'unité de distance « Année Lumière », (voir chapitre 1, exercice C1.6). La valeur de la constante de Hubble joue un rôle fondamental en cosmologie (le domaine de la physique qui étudie l'univers, le cosmos, dans sa globalité), car elle permet d'estimer l'âge de l'univers à un peu moins de 14 milliards d'années : $T_U \sim 1/H_0 = 13,6 \cdot 10^9 \text{ ans}$, voir exercice C1.6 pour une estimation grossière à partir d'un raisonnement dimensionnel.

Plusieurs observations distinctes, comme la répartition des galaxies au-delà d'une échelle de 200 Mpc , la distribution du gaz ou de la matière noire, le fond diffus micro-onde cosmologique, montrent que l'univers à grande échelle est homogène et isotrope. On est alors amené à supposer l'existence d'un nouveau principe, appelé « principe cosmologique » qui stipule au niveau théorique que l'univers est globalement homogène et isotrope. Cela permet de définir la densité moyenne de matière, ρ_m , de l'univers. L'évolution de cette densité de matière dépend du temps. On note ρ_m^0 la valeur de cette densité aujourd'hui.

De façon analogue, la constante de Hubble H_0 , n'est pas constante ! Elle varie au cours du temps, on note H cette fonction que l'on nomme « flot de Hubble ». La loi de Hubble est une prédiction des modèles de big bang une fois que le principe cosmologique est admis, et elle reste vraie à tout moment :

$$\boxed{v_{exp}(t) = H(t) r(t)} \quad \text{loi de Hubble} \quad (8.6)$$

• Équation de Friedman

Considérons une sphère de rayon R centrée sur un observateur situé en O . Soit G une galaxie de masse m située à la distance R et possédant une vitesse v donnée par la loi de Hubble. En réalité la vitesse de la galaxie G possède deux composantes, la vitesse d'expansion donnée par la loi de Hubble, ainsi qu'une vitesse dite « particulière » (v_p) qui résulte de son interaction gravitationnelle avec les galaxies voisines. Pour les galaxies proches, $v_p > v_{exp}$, les galaxies peuvent se rapprocher ou s'éloigner de nous. Pour les galaxies lointaines $v_{exp} \gg v_p$, c'est l'expansion qui domine, les galaxies s'éloignent toutes de nous. Le raisonnement qui suit est valable pour les galaxies lointaines.

La masse M contenue dans la sphère de rayon R vaut : $M = \rho_m 4\pi R^3/3$.
L'énergie potentielle associée à la galaxie G est :

$$U = -\frac{GMm}{R} = -\frac{4}{3}\pi GmR^2 \rho_m$$

L'énergie cinétique, en tenant compte de la loi de Hubble (éq.8.6), est :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \simeq \frac{1}{2}mH^2R^2$$

L'énergie mécanique vaut ainsi : $E = T + U = \frac{1}{2}mR^2 \left(H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_m \right)$.

On en déduit une des équations fondamentales de la cosmologie, « **la première équation de Friedman** » :

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_m = \frac{2E}{m} \frac{1}{R^2} = \frac{-k}{R^2} \quad (8.7)$$

Avec un choix judicieux d'unités, k est une constante pouvant avoir les valeurs $k = 0, -1, +1$, et représentant le signe de E , l'énergie mécanique de la sphère de rayon R . Avec le principe cosmologique, k représente en fait, le signe de l'énergie de l'univers! Nous avons vu, à travers l'exercice de cours précédent que selon le signe de l'énergie le système physique est lié ou libre. Selon la valeur de k , la nature du système « univers » change (ainsi que sa « géométrie ») :

- Si $E < 0$ ($k = +1$) le système est lié, on parle d'univers « fermé », l'expansion finira par s'arrêter, l'attraction gravitationnelle finira par dominer l'expansion, et l'univers se recontractera (« big crunch »).

- Si $E \geq 0$ ($k = 0$ ou -1) le système est libre, l'expansion se poursuivra éternellement. on dit que l'univers est « plat » si $k = 0$ ($E=0$), ou est « ouvert » si $k = -1$ ($E > 0$).

Dans le cadre de la relativité générale, le modèle est plus complexe : on retrouve l'équation de Friedman (éq.(8.7)) mais ça n'est pas uniquement la densité de matière ρ_m qui intervient mais la somme des densités de tous les constituants de l'univers $\rho_m \rightarrow \sum \rho = \rho_m + \rho_R + \rho_\nu + \rho_{EN} + \dots$. En plus de la matière, qui est à 80% composée de matière noire, il faut tenir compte des radiations, des neutrinos, de l'énergie noire et de toute autre composante qui nous reste inconnue². Les destins possibles de l'univers sont alors modifiés.

Le cas où $E = 0$ est un cas limite. Il nous permet de calculer ce qu'on appelle la densité critique de l'univers $\rho_c = 3H^2/(8\pi G) \simeq 10^{-26} kg/m^3 \simeq 6 \text{ protons}/m^3$. Cette valeur est dérisoire par rapport aux densités (atomiques) que l'on trouve sur notre planète ($\rho_{eau} = 10^3 kg/m^3$), ce qui implique que le cosmos est relativement vide...

2. Pour ceux qui sont intéressés par ce genre de choses, récemment, un documentaire sur la cosmologie a été réalisé par des étudiants de master de l'université d'Aix Marseille et peut être vu avec le lien suivant : <http://vimeo.com/75948016>

8.2.5 Trous noirs

On a vu que la vitesse de libération d'un astre de masse M et de rayon R vaut $v_L = \sqrt{2GM/R}$. Un trou noir est tel que son potentiel gravitationnel est suffisamment puissant pour que même la lumière ne puisse pas s'en échapper ! Ainsi un trou noir (classique) vérifie la relation $v_L > c$ où c est la vitesse de propagation de la lumière. Pour une masse donnée, on peut donc calculer le rayon « maximal » que peut avoir le trou noir, appelé « rayon de Schwarzschild », noté R_S :

$$v_L > c \Rightarrow v_L^2 > c^2 \Rightarrow \frac{2GM}{R} > c^2 \Rightarrow R < \frac{2GM}{c^2} = R_S \quad (8.8)$$

De façon surprenante, on obtient le même résultat en relativité générale bien que l'on commette deux erreurs dans le raisonnement classique :

- L'énergie cinétique d'un photon (particule de lumière) n'est pas égale à $\frac{1}{2}mc^2$ car la masse du photon est nulle. (Son énergie cinétique vaut pc où p est l'impulsion du photon, qui elle peut être définie, ceci sera fait dans un cours de relativité restreinte).
- L'énergie potentielle d'un trou noir n'est pas égale à $-GMm/R$.

La surface de la sphère de rayon R_S entourant le trou noir est appelée « horizon des événements » car tout événement ou information émise à l'intérieur de cet horizon ne pourra pas parvenir à un observateur situé à l'extérieur. Les informations que l'on peut obtenir d'un trou noir sont :

- sa masse grâce aux effets gravitationnels sur les masses environnantes ;
- son moment cinétique grâce aux effets de rotation sur le disque d'accrétion environnant ;
- sa charge électrique grâce aux effets électromagnétique sur les charges électriques environnantes.

8.3 Mouvements avec une force en $1/r^2$

Notre étude va être menée avec la gravitation mais elle reste parfaitement valable avec les forces électriques. Soit deux corps de masse M et m en interaction gravitationnelle. On s'intéresse au mouvement de m dû à l'attraction exercée par M que l'on prend pour centre de notre système de coordonnées, on supposera que $m \ll M$ et que les objets massifs sont ponctuels.

8.3.1 C8.3 – Satellite en mouvement circulaire

Un satellite de masse m décrit une trajectoire circulaire de rayon R dont le centre est confondu avec le centre de la Terre. Ce satellite a été déposé à l'altitude h par un lanceur à la vitesse \vec{v} . Soit R_T et M_T le rayon et la masse de la Terre, O le centre du mouvement et on appellera M la position du satellite à un instant quelconque. On néglige les frottements et la rotation de la Terre sur elle-même. Données : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, $M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6380 \text{ km}$, $h = 1000 \text{ km}$ et $m = 100 \text{ kg}$.

- 1) Appliquer la deuxième loi de Newton au satellite. En déduire, que le mouvement est uniforme, ainsi que l'expression (puis la valeur) de la vitesse angulaire.
- 2) Donner le plan de la trajectoire, l'angle entre \vec{r} ($= \overrightarrow{OM}$) et \vec{v} , et le sens de rotation.
- 3) Calculer v , la vitesse de satellisation à l'altitude h , en fonction de G , M_T , R_T et h . Que se passe-t-il si le lanceur libère le satellite à la bonne altitude mais pas à la bonne vitesse ? (et inversement ?)
- 4) Décrire le comportement de v en fonction de celui de h . Donner les valeurs de v lorsque $h \rightarrow 0$ (**vitesse de satellisation minimale**) et $h \rightarrow +\infty$ et commenter le réalisme de ces valeurs.
- 5) Calculer la période du mouvement. En déduire la troisième loi de Kepler.
- 6) Quelle est l'influence de la masse du satellite, m , sur le mouvement ?
- 7) Donner les énergies cinétique, potentielle et totale, associées au satellite. L'énergie se conserve-t-elle ? Quelle énergie (travail) a-t-on fourni au satellite pour l'amener sur son orbite ?
- 8) Calculer le moment cinétique orbital du satellite. Est-il constant ?

Réponses

8.3.2 Conservation de l'énergie et du moment cinétique

Si on peut négliger les frottements on a conservation de l'énergie mécanique car la force gravitationnelle est une force conservative. Ceci est justifié dans l'espace, mais est une approximation grossière dans l'atmosphère terrestre (si l'altitude est inférieure à $\sim 100 \text{ km}$). Par simplicité dans la suite nous négligerons les frottements et considérerons donc que l'énergie se conserve.

La force de gravitation étant centrale, le moment cinétique orbital se conserve. Cela implique que le mouvement des corps se passent dans un plan (caractérisé par la position et la vitesse : $(\vec{r}; \vec{v})$).

Les études simples précédentes nous ont montré que les trajectoires des corps peuvent être fermées (cas d'un satellite en mouvement circulaire) ou ouvertes (cas de la libération d'une sonde). Ces trajectoires différentes sont associées à des vitesses caractéristiques différentes.

Le mouvement étant plan, seules deux coordonnées sont suffisantes pour décrire le mouvement. Les trajectoires pouvant être fermées (cercles ou ellipses), les coordonnées polaires semblent bien adaptées. En fait, les coordonnées polaires décrivent aussi les trajectoires ouvertes (paraboles et hyperboles), ceci est résumé dans l'annexe E. Cela constitue en mathématique ce qu'on appelle l'étude des coniques.

On a donc trois variables : ρ , ϕ et t , mais on a deux lois de conservation : E et $\|\vec{L}\|$. (L'aspect vectoriel de la conservation de \vec{L} a déjà été utilisé en nous montrant que le mouvement est plan). Par conséquent, une seule variable est véritablement libre, il n'y a qu'un seul degré de liberté dans le problème. L'étude de la trajectoire demande la connaissance soit des deux fonctions $\rho(t)$ et $\phi(t)$ (description paramétrique à l'aide des équations horaires des coordonnées, ces deux fonctions ne sont pas indépendantes), soit de la fonction $\rho(\phi)$ (description par l'équation de la trajectoire, le temps est alors implicite).

Vous possédez à présent les outils mathématiques permettant de calculer l'équation de la trajectoire (et non les équations paramétriques). Ce calcul étant assez complexe, nous le repoussons à la section 8.3.6, car le raisonnement sur les énergies, en utilisant les lois de conservation, permet déjà de comprendre un grand nombre de phénomènes de façon qualitative.

• Conservation de \vec{L}

Dans le cas le plus général, le mouvement n'est ni circulaire ($\rho \neq \text{constante}$, $\dot{\rho} \neq 0$) ni uniforme ($\omega \neq \text{constante}$, $\dot{\omega} \neq 0$). On a donc $\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho$ et $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{u}_\phi = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \omega \vec{u}_\phi$. On a vu lors du chapitre 7 que le moment cinétique prend alors la forme : $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \rho \vec{u}_\rho \wedge m(\dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{u}_\phi) = m\rho^2 \dot{\phi} \vec{u}_z$. L'aspect vectoriel ne nous intéresse plus, raisonnons sur les normes et appelons L la valeur constante du moment orbital :

$$L = m\rho^2 \dot{\phi} = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{L}{m\rho^2} \quad (8.9)$$

Ainsi, si l'équation horaire $\rho(t)$ est connue, on déduit grâce à cette équation l'évolution temporelle de $\phi(t)$. Par ailleurs, les composantes de la vitesse peuvent s'exprimer en fonction de ρ et de $\dot{\rho}$ uniquement :

$$v_\rho = \dot{\rho} \quad \text{et} \quad v_\phi = \rho \dot{\phi} = \frac{L}{m\rho} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{m^2\rho^2}}$$

Nous avons déjà utilisé la propriété $v_\phi \sim 1/\rho$ lors de l'étude qualitative des vitesses d'un satellite à l'apogée et au périhélie d'une trajectoire elliptique (voir la section 7.4.2 du chapitre 7).

• Conservation de E

L'énergie cinétique vaut : $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{m^2\rho^2} \right) = T(\rho, \dot{\rho}) \quad (8.10)$

L'énergie potentielle est donnée par :
$$U = -\frac{GMm}{\rho} = U(\rho) \quad (8.11)$$

On en déduit l'énergie mécanique E :

$$E = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{m^2\rho^2}) - \frac{GMm}{\rho} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + U^{eff}(\rho) = cste \quad (8.12)$$

où E est la valeur constante de l'énergie mécanique du système, et U^{eff} est nommée **énergie potentielle « effective »** :

$$U^{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{GMm}{\rho} \quad (8.13)$$

On introduit cette énergie potentielle effective afin de simplifier l'étude du problème. En effet, l'énergie mécanique est constante ($E = cste$ pour tout t) mais ça n'est pas le cas des énergies cinétique ($T = T(t)$) et potentielle ($U = U(t)$). Les dépendances temporelles sont cachées dans les fonctions $\rho = \rho(t)$ et $\dot{\rho} = \dot{\rho}(t)$ (la dépendance en $\dot{\phi}(t)$ a été éliminée grâce à la conservation du moment angulaire), et se compensent entre les termes cinétique et potentiel. Les équations (8.10) et (8.11) indiquent que U ne dépend que de ρ alors que T dépend des deux fonctions ρ et $\dot{\rho}$, ce qui rend l'interprétation particulièrement délicate. L'introduction du potentiel effectif permet de décomposer l'énergie mécanique en deux termes ne dépendant que d'une variable chacun, $U^{eff} = U^{eff}(\rho)$ et l'autre terme $T^{eff} = T(\dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$ peut être vu comme une énergie cinétique effective. L'étude qualitative de $U^{eff}(\rho)$ va permettre de comprendre les points essentiels du comportement des forces centrales en $1/r^2$.

8.3.3 Étude de l'énergie potentielle effective U^{eff}

Afin d'alléger les notations, posons :

$$U^{eff}(\rho) = \frac{A}{\rho^2} - \frac{B}{\rho} \quad \text{avec } A = \frac{L^2}{2m} > 0 \text{ et } B = GMm > 0 \quad (8.14)$$

Étudions cette fonction : $\frac{dU^{eff}}{d\rho} = -\frac{2A}{\rho^3} + \frac{B}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^3}(B\rho - 2A)$
 $\Rightarrow \frac{dU^{eff}}{d\rho} = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_C = \frac{2A}{B} (= \frac{L^2}{GMm^2})$. L'étude des limites donne :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} U^{eff} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{A}{\rho^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} U^{eff} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} -\frac{B}{\rho} = 0^-$$

On a un minimum en $\rho = \rho_C : U^{eff}(\rho = \rho_C) = U_{min}^{eff} = -\frac{B^2}{4A} (= -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2})$.

Cette étude est résumée dans le tableau de variation suivant :

ρ	0	ρ_C	$+\infty$
$(U^{eff})'$	-	0	+
U^{eff}	$+\infty$	U_{min}^{eff}	0

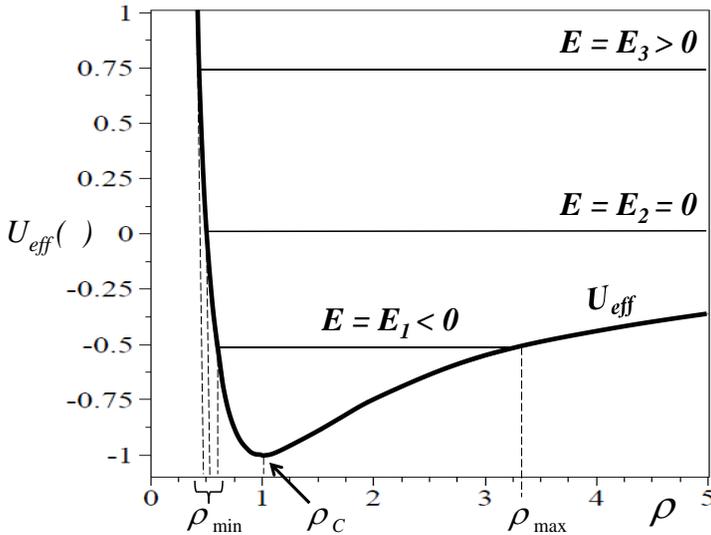


FIGURE 8.4 – Énergie potentielle effective $U^{eff}(\rho)$ en fonction de la distance ρ . Courbe générique obtenue avec les valeurs arbitraires $A = 1 SI$ et $B = 2 SI$

La courbe représentative de $U^{eff}(\rho)$ est donnée sur la figure 8.4. Cette courbe, très importante, caractérise l'interaction entre deux objets (systèmes planétaires, atomes, molécules...).

Lorsque la masse m atteint une des extrémités de son domaine de variation en ρ (par exemple lorsque $\rho = \rho_{min}$), alors l'énergie cinétique effective est nulle (c-à-d $\dot{\rho} = 0$ car $\rho(t)$ est minimum), et on a $U^{eff}(\rho_{min}) = E$ où E est l'énergie mécanique du système physique. Comme E est constante, cela signifie que les lignes horizontales (pointillées) de la figure 8.4 donnent les domaines de variations de la position ρ . On voit que si $E > 0$ ou si $E = 0$, alors $\rho \in [\rho_{min}; +\infty[$: le système est libre, en revanche, si $E < 0$ alors $\rho \in [\rho_{min}; \rho_{max}]$: le système est lié. Nous allons étudier plus en détails ces 3 cas de figures.

En toute rigueur, on pourrait aussi étudier les domaines $]0; \rho_{max}]$, où les ρ_{max} correspondent aux ρ_{min} précédents, c-à-d aux points d'intersections entre la courbe $U^{eff}(\rho)$ et les lignes horizontales $E = cste$. Cependant ces cas sont physiquement plus complexes car on constate que $U^{eff}(\rho)$ diverge lorsque $\rho \rightarrow 0$. En gravitation, cela signifie qu'il faut tenir compte du rayon de l'astre et non plus faire l'approximation que toute la masse est concentrée en son centre. On a déjà étudié une telle situation, dans un cas simplifié, lors du lancement radial d'une sonde (exercice C8.2). En électromagnétisme, lorsque $\rho \rightarrow 0$, il faut utiliser les règles de la mécanique quantique pour avoir une description réaliste des phénomènes, et ceci est bien au-delà des objectifs de ce cours.

Résumons : Le système physique est constitué de deux objets de masse m et M (avec $m \ll M$). Ces informations fixent le paramètre B de U^{eff} . Le moment cinétique orbital est constant, sa connaissance permet de fixer le paramètre A de U^{eff} . On peut alors tracer la courbe $U^{eff}(\rho)$. Le système possède une caractéristique supplémentaire : son énergie E . E est une constante (ligne horizontale

sur la figure 8.4) qui permet de définir une valeur minimale de la distance entre les masses m et M : ρ_{min} . On limite l'étude de $U^{eff}(\rho)$ au cas où $\rho \geq \rho_{min}$. Pour E fixé, on voit que $E = U^{eff}(\rho_{min}) = U_{max}^{eff}$: lorsque le système de masse m est au plus proche de l'objet de masse M , l'énergie potentielle effective est maximum et égale à E (et $T^{eff} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 = 0$).

• Cas 1 – État lié : $E = E_1 < 0$ – Orbite elliptique

Afin de fixer les notations et pour éviter toute confusion entre les trois cas, on pose $E = E_1 = U^{eff}(\rho_{min}) = U_{max}^{eff}$. La figure 8.4 nous montre qu'il existe une valeur maximale de ρ , ρ_{max} , où à nouveau $E = E_1 = U_{max}^{eff} = U^{eff}(\rho_{max})$. Cette situation est analogue à celle d'un oscillateur (voir la figure 4.6 du chapitre 4, section 4.3.4) : pour les valeurs extrémales de l'orbite, ρ_{min} et ρ_{max} , U^{eff} est maximale et T^{eff} minimale. Hors de ces positions, U^{eff} diminue, T^{eff} augmente mais leur somme reste égale à E .

On comprend donc que l'objet m à une orbite avec une distance limitée entre deux valeurs : $\rho_{min} \leq \rho \leq \rho_{max}$, et un diagramme d'énergie ressemblant fortement à celui d'un système périodique tel qu'un oscillateur, on en déduit alors que l'orbite est une ellipse ! Il y a aussi l'angle ϕ dépendant du temps mais on n'a pas besoin de l'étudier pour comprendre que le mouvement est oscillant. Nous insistons sur le fait que ce raisonnement est intuitif et qualitatif, mais n'est en aucune manière une démonstration...

Si $E = E_1 = U_{max}^{eff} = U_{min}^{eff} = -B^2/(4A)$, on voit que $\rho_{min} = \rho_{max}$ et donc que ρ est une constante : $\rho = \rho_C = R$ et l'orbite est circulaire. **Lorsque l'énergie du système est égale à la valeur minimale de l'énergie potentielle effective, la trajectoire est circulaire. On dit que le système est au minimum du potentiel.** La Terre et les planètes du système solaire sont très proches de ce cas minimal.

On peut poursuivre ce raisonnement et calculer les valeurs de ρ_{min} et de ρ_{max} ainsi que les vitesses aux « apsides » qui sont les points extrêmes de l'orbite, c-à-d en ρ_{min} et ρ_{max} et telles que $\dot{\rho} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = 0 &\Rightarrow T^{eff}(\rho) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 = 0 \Rightarrow E = U^{eff} = \frac{A}{\rho^2} - \frac{B}{\rho}(\rho) \\ E = \frac{A}{\rho^2} - \frac{B}{\rho} &\Rightarrow E\rho^2 = A - B\rho \Rightarrow \boxed{E\rho^2 + B\rho - A = 0} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut : $\Delta = B^2 + 4AE$.

On veut deux solutions (ρ_{min} et ρ_{max}), donc il faut que :

$$\Delta > 0 \Rightarrow B^2 + 4AE > 0 \Rightarrow E > -\frac{B^2}{4A} = U_{min}^{eff} \quad (8.16)$$

On retrouve une condition de valeur minimum pour l'énergie, valeur qui correspond au cas du mouvement circulaire ($\Delta = 0$ et $\rho = \rho_C = R$ est racine double). Par conséquent, si $U_{min}^{eff} < E < 0$, alors l'orbite sera elliptique et les

distances des apsides sont données par :

$$\begin{aligned}\rho_{max}^{min} &= \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2E} = -\frac{B}{2E} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4AE}{B^2}} \right) \\ &= -\frac{GMm}{2E} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \right)\end{aligned}$$

On peut obtenir des expressions beaucoup plus simples en utilisant les notations des coniques (voir annexe E), où on définit les paramètres $a =$ **demi grand axe de l'ellipse** et $e =$ **l'excentricité** :

$$2a = \rho_{min} + \rho_{max} \quad \rho_{min} = a(1 - e) \quad \rho_{max} = a(1 + e) \quad (8.17)$$

qui peuvent être donnés en fonction de A et B , ou de G , M , m , E et L :

$$\rho_{min} + \rho_{max} = -\frac{B}{E} = -\frac{GMm}{E} = 2a \quad (8.18)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{4AE}{B^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \quad (8.19)$$

Si $e = 0$ le mouvement est circulaire. Si $0 < e < 1$ le mouvement est elliptique. ($e = 1$ si $E = 0$ et $e > 1$ si $E > 0$, cas qui seront étudiés dans les prochaines sections). Dans tous les cas, O le centre de l'astre de masse M est appelé **foyer** de la conique. Pour une trajectoire fermée appelée **orbite**, O est un des deux foyers de l'ellipse (première loi de Kepler). Ces deux foyers sont confondus pour une orbite circulaire.

On montrera dans la section 8.3.6 que l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires est donnée par :

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{1 + e \cos \phi}} \quad (8.20)$$

où l'origine des angles ϕ est prise lorsque $\rho = \rho_{min}$ (au « périégée ») et où ρ_0 est l'ordonnée à l'origine appelée « **paramètre de l'ellipse** », tel que $\phi = \pi/2$, et ayant pour expression :

$$\rho_0 = \frac{2A}{B} = \frac{L^2}{GMm^2} = (1 - e^2)a = (1 + e)\rho_{min} = (1 - e)\rho_{max} \quad (8.21)$$

Concrètement, ça n'est pas l'énergie E ni le moment cinétique L que l'on mesure, mais plutôt les caractéristiques de l'orbite (a , e , T , $v_P...$) qui permettent alors d'estimer E , L , M et m . Il est donc utile d'inverser les formules précédentes. Nous le faisons pour l'énergie uniquement, à l'aide de l'éq.(8.18), car cela permet d'en déduire une formule fort utile pour calculer les vitesses :

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{\rho} \Rightarrow v^2 = 2GM\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2a}\right) \quad (8.22)$$

On en déduit que $v \sim 1/\rho$ et donc que la vitesse est maximale pour ρ_{min} , et qu'elle est minimale pour ρ_{max} .

Ainsi, les apsides sont des positions très particulières. On leur donne des noms distincts selon les situations :

- Si $\rho = \rho_{min}$, $v(\rho_{min}) = v_{max} = v_P$ et la position est appelée périapside (ou périapse) dans le cas général, périhélie pour la Terre tournant autour du Soleil, et périgée pour les satellites tournant autour de la Terre.
- Si $\rho = \rho_{max}$, $v(\rho_{max}) = v_{min} = v_A$ et la position est appelée apoapside (ou apoapse) dans le cas général, aphélie pour la Terre tournant autour du Soleil, et apogée pour les satellites tournant autour de la Terre.
- Le plus souvent, par simplicité et abus de langage, et c'est ce qu'on fera dans la suite, on parle seulement de périgée et d'apogée, même si la Terre n'est pas la masse attractive.

Ces vitesses peuvent prendre diverses formes selon les besoins et sont déduites de l'équation précédente :

$$v_P^2 = 2GM \left(\frac{1}{\rho_{min}} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{GM}{\rho_{min}} (1+e) = \frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e} = -\frac{2E}{m} \frac{1+e}{1-e} \quad (8.23)$$

$$v_A^2 = 2GM \left(\frac{1}{\rho_{max}} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{GM}{\rho_{max}} (1-e) = \frac{GM}{a} \frac{1-e}{1+e} = -\frac{2E}{m} \frac{1-e}{1+e} \quad (8.24)$$

À un instant quelconque, la masse m possède une vitesse v , donnée par l'éq.(8.22), comprise entre ces deux valeurs extrémales : $v_A \leq v \leq v_P$.

Si le mouvement est circulaire alors $\rho = \rho_{min} = \rho_{max} = R$ et $v = v_A = v_P = \sqrt{GM/R}$. La vitesse de satellisation minimale de la masse m correspond au cas où le rayon R est le plus petit possible, c-à-d lorsque $R = R_M$ où R_M est le rayon de l'astre de masse M : $v_S = \sqrt{GM/R_M}$. Ces résultats sont en parfait accord avec ceux de l'exercice de cours C8.3.

● Cas 2 – État libre : $E = E_2 = 0$ – Trajectoire parabolique

La figure 8.4 montre que $E = E_2 = U_{max}^{eff} = 0$ pour la valeur minimale de $\rho = \rho_{min2}$ et lorsque $\rho \rightarrow +\infty$. Dans ce dernier cas, $U^{eff} \rightarrow 0$, $U \rightarrow 0$, $\vec{F}_G \rightarrow \vec{0}$, $v \rightarrow 0$ et donc $T \rightarrow 0$: tout est nul, ce cas logique où m est trop loin pour ressentir les effets de M est finalement inintéressant. La valeur minimale de ρ , ρ_{min2} , s'obtient comme précédemment :

$$U^{eff}(\rho) = E_2 = 0 \Rightarrow \frac{A}{\rho^2} - \frac{B}{\rho} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A - B\rho = 0 \Rightarrow \rho = \frac{A}{B} \\ \text{ou } \rho \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Donc la position du périapside est donnée par : $\rho_{min2} = \frac{A}{B} = \frac{L^2}{2GMm^2}$.

La trajectoire est ouverte car $\rho \in [\rho_{min2}; +\infty[$, c'est une parabole. Le seul moyen actuel que vous ayez pour le comprendre est grâce à l'expression de l'excentricité (eq.(8.19)) qui est telle que $e = 1$ si $E = 0$, ce qui est par définition le cas d'une parabole (voir annexe E pour plus de détails).

La vitesse au périapside est maximale et purement tangentielle, elle vaut :

$$v_\rho = \dot{\rho} = 0 \text{ et } v_P = v_{max} = v_\phi = \frac{L}{m\rho_{min2}} = \frac{BL}{Am} = \frac{2GMm}{L} \quad (8.25)$$

On peut aussi l'obtenir à partir de l'expression de l'énergie :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2GM}{\rho} \quad (8.26)$$

À partir de cette expression, on peut déterminer la vitesse de libération de l'astre de masse M : cela correspond au cas extrême où la distance minimale entre les deux masses correspond au rayon R_M de l'astre de masse M : $\rho_{min2} = R_M$, ce qui implique alors $\mathbf{v}_P = \sqrt{2GM/R_M} = \mathbf{v}_L$, ce qui est bien la valeur obtenue lors de l'exercice C8.2.

Remarque : on peut obtenir les bornes du domaine de variation de ρ grâce à celles du cas précédent en cherchant les limites quand $E \rightarrow 0^-$:

$$\rho_{max}^{min} = -\frac{B}{2E} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4AE}{B^2}} \right) = -\frac{B}{2E} \left(1 \mp (1 + \epsilon)^{1/2} \right)$$

avec $\epsilon = 4AE/B^2 \rightarrow 0$. Sachant que $(1 + \epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_{max} &\rightarrow -\frac{B}{2E} \left(1 + \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \right) \rightarrow -\frac{B}{E} \rightarrow +\infty \\ \rho_{min} &\rightarrow -\frac{B}{2E} \left(1 - \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \right) = \frac{B\epsilon}{4E} = \frac{A}{B} = \rho_{min2} \end{aligned}$$

• Cas 3- État libre : $E = E_3 > 0$ - Trajectoire hyperbolique

La figure 8.4 nous montre que $E = E_3 = U_{max}^{eff} > 0$ pour la valeur minimale de $\rho = \rho_{min3}$ uniquement car lorsque $\rho \rightarrow +\infty$ on a $E_3 > U^{eff}(\rho \rightarrow +\infty) = 0$.

Pour obtenir la distance du périégée, la condition $\dot{\rho} = 0$ fournit à nouveau l'équation $E\rho^2 + B\rho - A = 0$ (voir éq.(8.15)). Avec $E > 0$ le discriminant $\Delta = B^2 + 4AE$ est positif, on obtient les deux solutions $\rho_{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2E}$. Mais $\sqrt{\Delta} > B$ et $E > 0$ impliquant alors $\rho_- < 0$ ce qui n'est pas physique car ρ est une quantité définie positive. Donc la solution cherchée est :

$$\rho_+ = \rho_{min3} = \frac{B}{2E} \left(\sqrt{1 + \frac{4AE}{B^2}} - 1 \right) = \frac{GMm}{2E} \left(\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} - 1 \right)$$

La trajectoire est ouverte car $\rho \in [\rho_{min3}; +\infty[$, c'est une hyperbole. Le seul moyen actuel que vous ayez pour le comprendre est grâce à l'expression de l'excentricité (éq.(8.19)) qui est telle que $e > 1$ si $E > 0$, ce qui est par définition le cas d'une hyperbole (voir annexe E pour plus de détails).

La vitesse s'obtient avec l'expression de l'énergie :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{\rho}$$

La vitesse est maximale (et tangentielle) au périégée car ρ est minimal :

$$v_P = \sqrt{2E/m + 2GM/\rho_{min3}}$$

8.3.4 Mise en orbite d'un satellite

Lorsque l'on tient compte du rayon R_M de l'astre attractif de masse M , c-à-d lorsqu'on sort de l'approximation de masse ponctuelle, un nouveau problème apparaît pour la mise en orbite d'un satellite.

Si le lancement est radial, $\vec{F} \sim \vec{u}_\rho$, et si on néglige la rotation de l'astre sur lui-même, alors le mouvement est unidimensionnel, il n'y a pas de moment orbital ($\vec{L} = \vec{0}$), et il n'y a pas de composantes selon ϕ , ni pour \vec{v} ni pour \vec{a} . On a vu (exercice C8.2) que si $v < v_L = \sqrt{2GM/R}$ alors le satellite retombe à la surface de l'astre. En revanche, si $v \geq v_L$ alors le satellite part à l'infini. On ne peut pas mettre un satellite sur une orbite avec ce type de lancement.

Si le lancement est non radial, alors $\vec{L} \neq \vec{0}$ et $v_\phi \neq 0$, la trajectoire est une conique dont le foyer est le centre O de l'astre si la vitesse initiale est suffisante, c-à-d si $v_0 \geq v_S = \sqrt{GM/R_M}$ où v_S est la vitesse minimale de satellisation.

Si on suppose que E et L sont fixés au moment du lancement, ils sont caractérisés par les composantes de la vitesse initiale (E dépend de $\|\vec{v}_0\|$ et L de $v_{0,\phi}$). Si $v_0 \geq v_L$ la conique correspond à une parabole ou à une hyperbole. En revanche, si $v_0 < v_L$ l'orbite elliptique est fixée dès le lancement, c'est une trajectoire fermée et donc elle repasse forcément par son point de lancement. Cela signifie que le satellite retombe sur l'astre dans ce cas là aussi ! Ce problème est illustré sur la figure 8.5 où Γ est une trajectoire elliptique (mais pas encore une « orbite »).

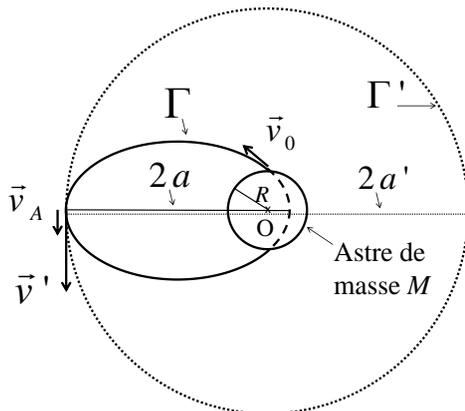


FIGURE 8.5 – Mise en orbite d'un satellite : un excédent de vitesse Δv est fourni à l'apogée pour passer de la trajectoire Γ à l'orbite Γ'

Ainsi pour mettre en orbite un satellite, il faut absolument effectuer un changement de trajectoire après le lancement. En un point Q de la trajectoire initiale Γ , on fournit un excédent de vitesse Δv au satellite (de masse m) qui suit alors une nouvelle trajectoire Γ' : la vitesse passe de la valeur v sur Γ à la valeur v' sur Γ' . En général, on effectue ce changement à l'apogée ($Q = A$), moment où la vitesse est la plus faible. Si $\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ est tangentielle à l'ellipse Γ , alors la direction du grand axe de la nouvelle orbite Γ' sera identique à celle de Γ , comme illustré sur la figure 8.5.

En terme d'énergie, la trajectoire Γ est caractérisée par l'énergie E telle que :

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{\rho} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \quad (8.27)$$

Sur l'orbite Γ' , l'énergie vaut à présent E' avec :

$$E' = -\frac{GMm}{2a'} \quad (= \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{GMm}{\rho'}) \quad (8.28)$$

L'énergie cinétique transférée au satellite vaut $\Delta T = E' - E$. Si on suppose que le transfert d'énergie cinétique se fait au point Q de façon quasi-instantnée alors $\Delta T = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2$ (et $\rho' = \rho$). Si de plus ce transfert se fait à l'apogée ($Q = A$), alors $\Delta T = \frac{1}{2}m(v_A + \Delta v)^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$.

On peut, à présent, tenter de comprendre pourquoi la vitesse de satellisation v_s est dite *minimale*, c'est l'objectif de l'exercice de cours suivant.

• C8.4 – Mise en orbite d'un satellite

Soit un satellite de masse m en orbite autour de la Terre de masse M_T et de rayon R_T . On néglige la rotation de la Terre sur elle-même. On suppose que l'on a mis le satellite sur l'orbite circulaire de rayon $R_1 = R_T$ (altitude nulle) appelée Γ_1 . La vitesse v_1 du satellite est alors égale à la vitesse minimale de satellisation v_S . On veut amener le satellite sur une orbite circulaire Γ_3 telle que sa vitesse v_3 soit égale à la moitié de v_S . À cette fin il faut placer le satellite sur une orbite d'attente elliptique Γ_2 qui est tangente aux orbites Γ_1 et Γ_3 (le satellite ne se téléporte pas). Ceci est illustré sur la figure 8.6. On suppose que le passage d'une orbite à une autre est instantané.

Sur chaque orbite l'énergie totale E_i ($i = 1, 2, 3$) et le moment cinétique L_i sont constants. Les énergies potentielles et cinétiques, efficaces ou non, c -à- d U_i , T_i , U_i^{eff} et T_i^{eff} ne sont constantes que sur les orbites circulaires Γ_1 et Γ_3 . On notera avec un indice 0 ces mêmes quantités pour le satellite au repos à la surface de la Terre avant son lancement. Il sera utile de préciser les expressions des constantes A_i et B_i intervenant dans la définition des U_i^{eff} .

Données : $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ SI, $M_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_T = 6380$ km et $m = 1$ t.

- 1) Avant le lancement, calculer T_0 , U_0 , E_0 et L_0 , puis U_0^{eff} et T_0^{eff} .
- 2) On veut placer le satellite sur l'orbite Γ_1 .
 - a) Calculer la vitesse de satellisation minimale v_S qu'il faut donner au satellite.
 - b) Déterminer T_1 , U_1 , E_1 , L_1 , U_1^{eff} et T_1^{eff} .
 - c) En déduire la variation d'énergie $\Delta E_{0 \rightarrow 1}$ et celle du moment cinétique $\Delta L_{0 \rightarrow 1}$, qu'il a fallu fournir au satellite pour passer du point de départ initial immobile à la surface de la Terre à l'orbite Γ_1 .
- 3) On veut que l'orbite finale Γ_3 soit telle que $v_3 = v_S/2$.
 - a) Calculer le rayon R_3 de l'orbite Γ_3 .
 - b) Déterminer T_3 , U_3 , E_3 et L_3 , puis U_3^{eff} et T_3^{eff} .
 - c) Comparer E_3 et E_1 . Ce résultat vous surprend-il ?
 - d) Essayer d'expliquer pourquoi v_S est la vitesse de satellisation **minimale**.
- 4) On veut caractériser l'orbite elliptique intermédiaire Γ_2 .
 - a) Déterminer le demi-grand axe a de l'ellipse.

- b) En déduire l'excentricité de l'ellipse.
- c) Donner les expressions des vitesses au périégée v_P et à l'apogée v_A en fonction de v_S , et les comparer à cette valeur.
- d) Déterminer T_2 , U_2 , E_2 et L_2 , puis U_2^{eff} et T_2^{eff} .
- 5) En déduire les variations d'énergie et de moment cinétique, $\Delta E_{1 \rightarrow 2}$, $\Delta E_{2 \rightarrow 3}$, $\Delta L_{1 \rightarrow 2}$ et $\Delta L_{2 \rightarrow 3}$, qu'il a fallu fournir au satellite à chaque changement d'orbite. Commenter les signes et les rapports de ces variations. Représenter sur un même graphique les fonctions $U_i^{eff}(\rho)$ en montrant le cheminement complet du satellite de son point de départ à son orbite finale.
- 6) Discuter les critiques majeures de cette description de la réalité.

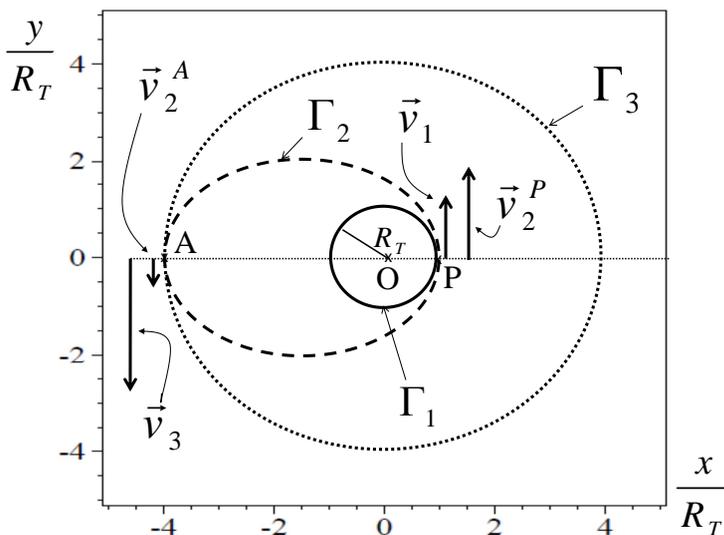


FIGURE 8.6 – Lancement d'un satellite en trois étapes : orbites

Réponses

8.3.5 Dépendance temporelle et troisième loi de Kepler

On a vu lors du chapitre 7, section 7.4.1, que la loi des aires (seconde loi de Kepler) est une conséquence de la conservation du moment cinétique : l'aire balayée pendant un certain temps Δt est indépendante du choix de la position initiale (ou du choix de l'origine des temps) : $\Delta S/\Delta t = cste = v_{ar}$. **v_{ar} est appelée « vitesse aréolaire »** et est donnée par l'éq.(7.7) :

$$v_{ar} = \frac{L}{2m} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}\rho^2\omega$$

Attention la vitesse aréolaire n'est pas une vitesse au sens conventionnel car sa dimension est $[v_{ar}] = L^2T^{-1}$ (tout comme la vitesse angulaire n'est pas une vitesse conventionnelle : $[\omega] = T^{-1}$).

Toute question liée au temps est reliée à la vitesse aréolaire et à la surface balayée par la trajectoire. Comme v_{ar} est une constante, on a la relation :

$$\Delta S = v_{ar} \Delta t$$

qui peut s'écrire plus simplement $S(t) = v_{ar}t$ si on définit l'origine du calcul des surfaces par $S(t=0) = 0$.

On peut relier la variation de surface aux angles polaires ϕ :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad dS = \frac{1}{2}\rho^2d\phi = \frac{\rho_0^2}{2(1+e\cos\phi)^2}d\phi$$

Soit B la position du corps de masse m à l'instant t_B repéré par l'angle ϕ_B et tel que $\rho_B = \rho_0/(1+e\cos\phi_B)$. Au bout du temps Δt le corps est à présent en C , à l'instant t_C , repéré par l'angle ϕ_C et tel que $\rho_C = \rho_0/(1+e\cos\phi_C)$. Par définition $\Delta t = t_C - t_B$. La surface balayée $\Delta S = S_{BOC}$ est telle que :

$$\Delta S = v_{ar} \Delta t = \frac{\rho_0^2}{2} \int_{\phi_B}^{\phi_C} \frac{d\phi}{(1+e\cos\phi)^2}$$

Avec le changement de variable $f = \tan(\phi/2)$ et beaucoup de calculs on obtient :

$$\Delta S = \frac{\rho_0^2}{2} \left[\frac{-e\sin\phi}{(1-e^2)(1+e\cos\phi)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\phi}{2} \right) \right]_{\phi_B}^{\phi_C}$$

La relation entre ρ et ϕ utilisée pour obtenir cette formule (l'équation polaire de la trajectoire éq.(8.20)) suppose implicitement que l'on ait pris le périhélie comme origine des ϕ ($\phi_P = 0$). Si le périhélie est pris comme origine des temps

$t_P = 0$ et comme origine des surfaces, alors on peut écrire plus simplement les relations entre surface, temps et angles d'un point M quelconque à l'instant t , repéré par l'angle ϕ et ayant balayé la surface S depuis le périhélie :

$$S(t) = v_{ar}t = \frac{\rho_0^2}{2} \left[\frac{-e \sin \phi}{(1 - e^2)(1 + e \cos \phi)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{\phi}{2} \right) \right]$$

Si le point M fait un tour complet, l'ellipse est balayée dans son intégralité, ainsi $\phi = 2\pi$, $t = T$ où T est la période du mouvement, et la formule précédente donne la valeur de la surface de l'ellipse $S_{ell} = \pi \rho_0^2 (1 - e^2)^{-3/2} (= \pi ab)$ (où b est le demi petit axe de l'ellipse (voir annexe E)). Avec l'expression $\rho_0 = a(1 - e^2)$ (voir éq.(8.21)) on obtient $S_{ell} = \pi \rho_0^{1/2} a^{3/2}$. Par ailleurs

$$\rho_0 = \frac{2A}{B} = \frac{L^2}{GMm^2} \Rightarrow S_{ell} = \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{L^2}{GMm^2}} = \pi a^{3/2} \frac{L}{m} \sqrt{\frac{1}{GM}}$$

or $S_{ell} = v_{ar}T = \frac{L}{2m}T$ d'où **la troisième loi de Kepler** : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

Cette formule générale permet de remarquer des propriétés intéressantes :

- Le demi grand axe a dépend de l'énergie E mais pas du moment cinétique L ($a = -B/(2E) = -GMm/(2E)$). Il en sera donc de même pour la période T .
- La forme de l'ellipse est directement reliée à son excentricité qui elle dépend de E et L ($e = \sqrt{1 + 4AE/B^2} = \sqrt{1 + 2EL^2/(G^2M^2m^3)}$). Il en est de même pour ρ_0 , ρ_P et ρ_A .
- On peut donc réinterpréter le moment cinétique comme l'allonge de l'ellipse : la figure 8.8 donne quatre orbites différentes à énergie fixée, la période est donc identique pour ces quatre cas, mais les moments cinétiques sont différents et correspondent à des excentricités $e = 0 | 0,5 | 0,7 | 0,8$.

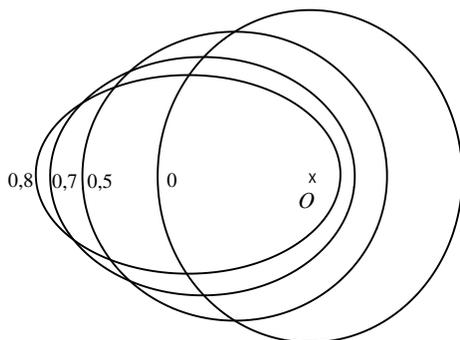


FIGURE 8.8 – Orbites pour $e = 0 | 0,5 | 0,7 | 0,8$ avec $E = cste$ et $T = cste$ identiques pour les quatre cas

8.3.6 Équation polaire de la trajectoire

La dépendance temporelle de la variable ρ est obtenue grâce à l'équation de conservation de l'énergie (équ.(8.12)) :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + U^{eff}(\rho) \Rightarrow \dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U^{eff}(\rho)]}$$

La dépendance temporelle de la variable ϕ est obtenue grâce à l'équation de conservation du moment orbital (équ.(8.9)) :

$$\dot{\phi} = \frac{L}{m\rho^2}$$

La dépendance temporelle s'élimine avec le rapport de ces deux dérivées :

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{d\phi} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} = \pm \frac{m\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho}\right)}$$

Effectuons le changement de variable $x = 1/\rho \Rightarrow dx = -d\rho/\rho^2$, ainsi :

$$d\phi = \pm \frac{L}{m\rho^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - \frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho}}} d\rho = \mp \frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{-Ax^2 + Bx + E}} dx$$

on en déduit que :

$$\frac{dx}{d\phi} = \mp \frac{\sqrt{2m}}{L} \sqrt{-Ax^2 + Bx + E} \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{2m}{L^2}(-Ax^2 + Bx + E)$$

en se rappelant que $A = L^2/(2m)$, on obtient

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{A}(-Ax^2 + Bx + E) = -x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{E}{A} = -\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{B^2}{2A} + \frac{E}{A}$$

Avec le changement de variable $u = x - \frac{B}{2A}$ ($= \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_C}$) $\Rightarrow du = dx$, on a

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = -u^2 + c_u \quad \text{avec} \quad c_u = \frac{B^2}{2A} + \frac{E}{A} = K^2$$

On remarque que $c_u \geq 0$ (voir équ.(8.16)), raison pour laquelle on pose $c_u = K^2$. En notant $u' = du/d\phi$ on constate que l'équation différentielle prend la forme :

$$u'^2 + u^2 = K^2 \tag{8.29}$$

Cette équation différentielle non linéaire peut être linéarisée en la différenciant par rapport à ϕ :

$$\frac{d}{d\phi}(u'^2 + u^2 = K^2) \Rightarrow 2u'u'' + 2uu' = 0 \Rightarrow u'' + u = 0$$

On obtient une équation différentielle du second ordre, linéaire et homogène, dont on connaît bien la forme de la solution : $u = k_u \cos(\phi + \alpha)$, où k_u et α sont a priori des constantes d'intégrations. Cependant on a linéarisé l'équation différentielle en différenciant une fois, ce qui implique qu'il n'y a qu'une constante d'intégration. En fait, k_u est fixé par l'équation non-linéaire du premier ordre (éq.(8.29)) :

$$u = k_u \cos(\phi + \alpha) \Rightarrow u' = -k_u \sin(\phi + \alpha) \Rightarrow k_u^2 = c_u = K^2 = \frac{B^2}{2A} + \frac{E}{A}$$

En fait, K dépend effectivement des conditions initiales qui fixent l'énergie E et le moment cinétique L , A dépend des conditions physiques (M et m) et B de L et m . Mais K n'est pas une constante d'intégration de l'équation (8.29) au sens mathématique du terme...

La constante α dépend de l'origine choisie pour la variable ϕ . Prenons la nulle ($\alpha = 0$) et voyons a posteriori ce que cela implique pour ϕ . La solution pour la variable u est donc :

$$u = u(\phi) = K \cos \phi$$

Il suffit d'inverser les changements de variables pour remonter jusqu'à $\rho(\phi)$:

$$x = u + \frac{B}{2A} \Rightarrow x = x(\phi) = \frac{B}{2A} + K \cos \phi$$

$$\text{d'où } \rho = \frac{1}{x} \Rightarrow \rho = \rho(\phi) = \frac{1}{\frac{B}{2A} + K \cos \phi}$$

$$\text{soit } \rho(\phi) = \frac{1}{\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{B^2}{2A} + \frac{E}{A}} \cos \phi} = \frac{\frac{2A}{B}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4AE}{B^2}} \cos \phi}$$

On vient donc de démontrer que la solution des équations différentielles du mouvement est de la forme :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + e \cos \phi}$$

$$\text{avec } e = \sqrt{1 + \frac{4AE}{B^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} \quad \text{et} \quad \rho_0 = \frac{2A}{B} = \frac{L^2}{GMm^2}$$

Cette équation décrit les propriétés des coniques en coordonnées polaires.

Les coniques portent leur nom car géométriquement elles décrivent les différentes situations de l'intersection d'un plan avec un cône. Vous trouverez dans l'annexe E quelques propriétés des coniques.

8.4 Exercices

E8.1 – Poids lunaire

Sur Terre votre pèse-personne indique que votre masse est de 60 kg . Votre régime vous impose de vous peser tous les jours, y compris lors de votre voyage sur la Lune. Pendant le trajet vous apprenez que la masse de la Lune est 81 fois plus faible que celle de la Terre et que son rayon est 3,7 fois plus faible.

- 1) Sachant que votre masse n'a pas changé durant le trajet, qu'indique le pèse-personne lors de votre première pesée sur la Lune ?
- 2) Calculer la densité moyenne de la Lune. ($\rho_T = 5,5\rho_{eau}$)

E8.2 – Station Spatiale Internationale (ISS)

L'ISS a une trajectoire quasi-circulaire et orbite à une altitude d'environ 400 km . Calculer le nombre de révolution que l'ISS effectue tous les jours.

A.N. : $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, $M_T = 5.98 \cdot 10^{24}\text{ kg}$, $R_T = 6380\text{ km}$.

E8.3 – Vénus

Vénus fait le tour du Soleil en 225 jours. En déduire sa distance au Soleil. (On supposera que les mouvements de Vénus et de la Terre autour du Soleil sont circulaires, et on rappelle que l'unité astronomique est par définition la distance moyenne entre la Terre et le Soleil ($1\text{ U.A.} = 1,5 \cdot 10^8\text{ km}$)).

E8.4 – Marseille-Paris

Un satellite passe au-dessus de Marseille puis de Paris au bout d'un temps Δt , à une altitude $h = 750\text{ km}$. À vol d'oiseau, la distance séparant Marseille de Paris vaut $L = 500\text{ km}$. Calculer Δt . On négligera la rotation de la Terre sur elle-même et on supposera que la vitesse angulaire du satellite est constante.

E8.5 – Trous noirs

1) *Trou noir stellaire* – Les modèles astrophysiques de supernovæ indiquent qu'une étoile en fin de vie peut finir en trou noir si la masse de son cœur est d'au moins trois masses solaire. Si tel est le cas, quel est le rayon de l'horizon des événements (rayon de Schwarzschild) ? En déduire la densité du trou noir et comparer cette valeur aux densités atomique et nucléaire. ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}\text{ kg}$, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ et $r_p = 1,1 \cdot 10^{-15}\text{ m}$)

2) *Trou noir terrestre* – Pour transformer la Terre en trou noir il faudrait compresser sa masse dans une sphère plus petite que sa taille actuelle. Calculer ce rayon. En déduire la densité d'un tel trou noir. ($M_T = 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}$)

3) *Mini trous noirs* – Cosmologues et physiciens des particules cherchent à contraindre la possible existence de mini trous noirs dont la taille caractéristique serait celle des protons ($r_p = 1,1 \cdot 10^{-15}\text{ m}$). Quelles seraient la masse et la densité de tels mini trous noirs ?

E8.6 – Trou noir supermassif au centre de la Voie Lactée : SgrA*

Les observations du centre de notre galaxie semblent indiquer la présence d'un objet très massif. Autour de cet objet, les astronomes ont détecté l'existence d'un anneau de matière dont le rayon mesure 15 A.L. et les objets qui le constituent tournent à la vitesse de 200 km/s .

- 1) Calculer la masse de l'objet compact (en kg et en masse solaire M_\odot).

Sachant que les modèles astrophysiques ont du mal à expliquer l'existence des étoiles de masse supérieures à $100 M_{\odot}$, l'objet compact peut-il être une étoile ?

2) Si on suppose que c'est un trou noir supermassif, quel est son rayon de Schwarzschild ? Cet objet peut-il tenir au sein de l'orbite de la Terre autour du Soleil ? Quelle est sa densité ?

3) Montrer que cet densité est inversement proportionnelle au carré de la masse.

E8.7 – Chute d'une météorite

Une météorite est initialement au repos à une distance du centre de la Terre égale à six fois le rayon terrestre. Calculer sa vitesse quand elle atteint la surface de la Terre. A.N. : $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$, $R_T = 6380 \text{ km}$.

E8.8 – Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est tel qu'il semble immobile pour un observateur à la surface de la Terre.

- 1) Quelle est la période du mouvement ? En déduire la vitesse angulaire.
- 2) Calculer l'altitude du satellite géostationnaire. En déduire sa vitesse.
- 3) En fait la période à prendre en compte est le jour sidéral et non le jour solaire de 24h. Sachant qu'un jour sidéral dure $T_T = 86164 \text{ s}$, calculer :
 - T_T en heures, minutes et secondes,
 - l'erreur relative sur la période si l'on suppose que $T = 24 \text{ h}$,
 - l'erreur relative sur l'altitude du satellite pour la même hypothèse.
- 4) Trouver la latitude à partir de laquelle un observateur à la surface de la Terre ne voit plus le satellite géostationnaire.

A.N. : $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6380 \text{ km}$.

E8.9 – Comète de Halley

En 1456, la comète de Halley effraya tant les gens qu'ils prièrent « pour être sauvés du Diable et de la Comète ». Elle repassera pour la neuvième fois depuis cette époque en 2061. Le 9 février 1986, lors de son passage au périhélie, on mesura sa distance au soleil : $0,6 \text{ UA}$ (l'Unité Astronomique correspond au demi-grand axe de l'orbite terrestre, $1 \text{ UA} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$). Sachant que la masse du soleil est $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, calculer la distance maximum ρ_{max} de la comète au soleil (lors de son passage à l'aphélie). On supposera que l'intervalle de temps entre deux passages successifs de la comète est constant.

E8.10 – Satellite ou sonde ?

Un satellite de masse m décrit une trajectoire circulaire de rayon r dont le centre O est confondu avec celui de la Terre. Ce satellite a été déposé à l'altitude h par un lanceur à la vitesse \vec{v} . Soit R_T et M_T le rayon et la masse de la Terre. On appellera M la position du satellite à un instant quelconque.

- 1) Utiliser le théorème du moment cinétique pour montrer que le mouvement est plan et uniforme. Donner le plan de la trajectoire.
- 2) À partir de la seconde loi de Newton déterminer la vitesse v .
- 3) Démontrer la troisième loi de Kepler.
- 4) Déterminer l'énergie qu'il faut fournir au satellite pour l'amener de la surface de la Terre à une orbite circulaire d'altitude h .
- 5) En un point de sa trajectoire, on lui communique une nouvelle vitesse v'

tangente à la trajectoire circulaire. Calculer la nouvelle valeur de l'énergie et décrire la nouvelle trajectoire. A.N. $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ $M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6380 \text{ km}$, $h = 1000 \text{ km}$, $m = 100 \text{ kg}$, $v' = 15 \text{ km/s}$.

E8.11 – Marées

Les marées océaniques résultent principalement de l'attraction gravitationnelle de la Lune sur le milieu déformable de la masse des océans. On supposera la Terre sphérique, de centre T et de rayon R , recouverte uniformément d'une certaine épaisseur d'eau, faible devant R . Soit L le centre de la Lune et $d_L = TL$ la distance Terre-Lune (entre leurs centres). Soit A le point représentant la masse d'eau la plus proche de la Lune ($A \in [TL]$), et B représentant la plus éloignée (B est diamétralement opposé à A par rapport à T). Soient C et D les points représentant les masses d'eau situées perpendiculairement à celles représentées par A et B ($[CD]$ et $[AB]$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu T). On supposera que les masses d'eau représentées par A , B , C et D sont équivalentes et de masse m . A.N. : $R = 6380 \text{ km}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_L = 0,74 \cdot 10^{23} \text{ kg}$, $d_L = 384400 \text{ km}$, $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $d_S = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

1) Donner les expressions des forces d'attraction dues à la Lune aux points T , A , B , C et D . Faire un schéma.

2) On s'intéresse au déplacement de l'eau sur Terre. Pour un observateur terrestre, la Terre est immobile (on néglige sa rotation sur elle-même). Il faut donc s'intéresser aux « forces différentielles » exercées aux points A , B , C et D , c-à-d à la différence entre la force s'appliquant au point moins la force s'appliquant au centre : $\vec{f}_X = \vec{F}_X - \vec{F}_T$.

a) Trouver les directions (approximatives) des quatre forces différentielles \vec{f}_X pour $X = A, B, C, D$.

b) Si on suppose que $R \ll d$, montrer que $f_A = f_B = 2f_C = 2f_D = 2ma_L$ où $a_L = GM_L R/d^3$ (f_X est la norme de \vec{f}_X , raisonnement vectoriel indispensable pour C et D).

c) Faire un dessin avec les quatre forces différentielles et déterminer leur nature (centripète ou centrifuge).

3) On s'intéresse à présent aux effets du Soleil.

a) Si on néglige les effets de la Lune, faire un dessin de la situation en notant avec un prime les analogues des quatre points A, B, C, D . Montrer que $f_{A'} = f_{B'} = 2f_{C'} = 2f_{D'} = 2ma_S$ où a_S est à déterminer. Quelles conclusions tirez-vous de la valeur numérique du rapport $k = a_S/a_L$?

b) Décrire qualitativement les effets cumulés de la Lune et du Soleil (faire un schéma et donner les valeurs approximatives de $f_X/(ma_L)$) quand les trois astres Terre-Soleil-Lune sont alignés.

c) Même question lorsque les trois astres Terre-Soleil-Lune sont en quadrature (triangle STL rectangle en T).

E8.12 – Expérience de Cavendish (1798) – Mesures de G et M_T

Sur Terre, il est possible de mesurer l'accélération de la pesanteur g mais il est bien plus difficile de mesurer la constante gravitationnelle G . On peut le déduire de g si l'on connaît le rayon et la masse de la Terre. À cette époque le rayon de la Terre était assez bien connu mais la masse de la Terre était

inconnue. L'objectif de cette expérience est de mesurer G et d'estimer M_T .

Aux extrémités d'une baguette horizontale rigide et très légère de longueur $2l = 1,862\text{ m}$, on fixe deux petites sphères en plomb de masse $m = 730\text{ g}$ et de diamètre $2r = 51\text{ mm}$. La baguette est suspendue en son milieu O par un fil de torsion très fin de constante de torsion K , c-à-d que le fil vertical applique à la baguette une force de moment (par rapport au point d'attache du fil) $\vec{\Gamma}_O = -K\phi\hat{z}$, où \hat{z} est le vecteur unitaire vertical orienté vers le haut, ϕ l'angle polaire repérant la baguette dans le plan horizontal (O, \hat{x}, \hat{y}) . La baguette est à l'équilibre lorsque $\phi = 0$.

1) Détermination de la constante de torsion K

Pour cela, on fait pivoter légèrement la baguette autour du fil, puis on la lâche sans vitesse initiale. Chaque sphère de rayon r est soumise à des frottements visqueux dus à l'air de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ avec $\lambda = 6\pi\eta r$ où $\eta = 18 \cdot 10^{-6}\text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$. On mesure alors la pseudo-période des oscillations $T = 14\text{ min } 12\text{ s}$.

- Faire un dessin de la situation à un instant t quelconque.
- Calculer la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur si on néglige les frottements internes dans le fil et les frottements de l'air sur la baguette.

(Indication : Utiliser le théorème du moment cinétique pour obtenir l'équation différentielle du mouvement, et utiliser les résultats obtenus lors du premier semestre pour relier la pseudo-pulsation ω à la pulsation propre ω_0 .)

- En déduire la constante de torsion K .

2) Détermination de la constante de gravitation G

Ce dispositif est complété par deux grosses sphères de masse $M = 158\text{ kg}$, suspendues symétriquement par rapport au fil au moyen d'un dispositif qui les maintient à la même hauteur et à la même distance du fil que les petites sphères. On admet que les sphères peuvent être assimilées à des points matériels situés en leur centre. On approche les deux grosses sphères des petites. À cause de la force gravitationnelle, la position d'équilibre de la balance de torsion est légèrement décalée $\phi_{eq} = \phi_0$. Dans cette position la distance séparant les centres des grosses sphères des centres des petites vaut $d = 22,63\text{ cm}$. Comme $d \ll l$, on supposera que la force gravitationnelle des grosses sphères sur les petites est dirigée selon les $\hat{\phi}$.

- Faire un dessin de la situation à l'équilibre (modifié).
- Exprimer le moment par rapport à O de la force gravitationnelle exercée par les grosses sphères sur les petites.
- On inverse la position des deux grosses sphères par rapport à l'équilibre initial $\phi = 0$ (sans grosses sphères). La nouvelle position d'équilibre est décalée à présent de l'angle $\phi = -\phi_0$. Le décalage entre les deux positions d'équilibre modifiées vaut $x = 7,44\text{ mm}$. En déduire la valeur de G .

3) Détermination de la masse de la Terre M_T

- Proposer un dispositif expérimental simple permettant de mesurer g l'accélération de la gravité à la surface de la Terre.
- On mesure $g = 9,807\text{ m/s}^2$. Par ailleurs, à cette époque, le mètre était défini comme un dix-millionième de la distance de l'équateur au pôle. Calculer avec ces éléments la masse de la Terre.

c) En déduire, la densité de masse volumique de la Terre. Sachant que les roches à la surface de la Terre ont une densité de l'ordre de $\rho \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (granite, calcaire) à $\rho \approx 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (basalte), qu'en concluez-vous ?

E8.13 – Mouvement d'un satellite

Un satellite artificiel S de masse m est placé sur une orbite circulaire de rayon $R_0 = R_T + h$ autour de la Terre. En un point de sa trajectoire, on lui communique un excédent de vitesse. La nouvelle vitesse \vec{v}_1 est tangente à l'orbite circulaire et son module v_1 vaut 10 km/s . A.N. : $m = 2000 \text{ kg}$, $R_T = 6400 \text{ km}$, $h = 200 \text{ km}$, et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

1) Exprimer, en fonction de R_0 , la valeur v_0 du module de la vitesse lorsque le satellite est sur son orbite d'attente. Calculer numériquement v_0 ainsi que son énergie mécanique (on prendra comme zéro de l'énergie potentielle celle correspondante à S infiniment éloigné de la Terre).

2) Montrer que la nouvelle trajectoire est contenue dans un plan que l'on déterminera et calculer la nouvelle valeur de l'énergie. La nouvelle orbite est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique ?

3) L'équation de la nouvelle trajectoire s'écrit $r = p/(1 + e \cos \phi)$, où e et p sont deux constantes appelées respectivement excentricité et paramètre de l'orbite, r est la coordonnée radiale et ϕ l'angle que fait le rayon vecteur avec le rayon vecteur initial (où on prendra comme instant initial celui auquel le satellite acquiert la vitesse \vec{v}_1 et passe donc sur la nouvelle orbite).

a) Retrouver dans vos notes de cours la relation entre p et le module du moment cinétique L_1 du satellite par rapport au centre de la Terre. En déduire l'expression de p en fonction de v_0, v_1, R_0 .

b) Exprimer l'excentricité e en fonction de p et R_0 . En déduire l'expression de e en fonction de v_0 et v_1 . Calculer numériquement e . Quelle est alors la forme de l'orbite. Le résultat est-il cohérent avec celui de la question 2 ?

E8.14 – Retour d'un satellite

Un satellite artificiel de masse m est placé sur une orbite elliptique. Écrire l'expression de son énergie mécanique en fonction de la norme v de sa vitesse et de sa coordonnée radiale ρ .

1) Montrer que les coordonnées radiales r_A, r_P de l'apogée et du périogée sont racines d'une équation du second degré dont les coefficients s'expriment en fonction de l'énergie mécanique et du moment cinétique. En déduire l'expression de l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe a de l'ellipse et établir

$$\text{la relation } v^2 = GM_T \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right).$$

2) Le satellite est initialement situé sur une orbite circulaire (trajet Γ_0) de rayon R_0 . Déterminer sa vitesse v_0 et l'énergie mécanique E_0 .

3) À son passage par un point A de l'orbite on exerce sur le satellite dans la direction de son vecteur vitesse et de façon quasi-instantanée une force qui le ralentit. Il effectue un nouveau trajet (Γ_1). Déterminer la vitesse v_1 qu'il doit prendre pour atteindre la Terre en un point B tel que $\widehat{AOB} = \pi/2$. Calculer la variation d'énergie cinétique subie par le satellite. Donner la vitesse du satellite en B ainsi que son énergie totale.

E8.15 – Retour d'un voyage spatial

Un astronaute, parti pour une exploration interstellaire, revient sur la Terre. Sa fusée s'approche, moteur coupé, sur une orbite parabolique. On désigne par m la masse totale de la fusée et de l'équipage, et par ρ_{min} la distance minimale d'approche. A.N. : $\rho_{min} = 1,2 R_T$, $R_T = 6380 \text{ km}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $m = 220 \text{ t}$ et $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$.

- 1) Utiliser le théorème du moment cinétique pour montrer que la trajectoire s'effectue dans un plan que vous préciserez.
- 2) Calculer la vitesse v_P de la fusée au périégée.
- 3) Arrivé au périégée, le pilote veut satelliser sa fusée sur une orbite circulaire de rayon ρ_{min} . De combien doit-il faire varier la vitesse de la fusée ?

E8.16 – Comète parabolique

La comète parabolique Kohoutek est passée le 28 décembre 1973 à son périhélie P , sa distance au Soleil était alors $SP = d = 21 \cdot 10^6 \text{ km}$. On assimilera l'orbite terrestre à un cercle de rayon $a = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ parcouru à la vitesse $u = 30 \text{ km/s}$. Soit K (K') la position de la comète lorsqu'elle rentre (sort) de l'orbite terrestre. On notera L le moment cinétique et m la masse de la comète.

- 1) Faire un dessin de la situation.
- 2) Donner l'expression du produit GM_\odot en fonction des données du problème.
- 3) Déterminer l'énergie mécanique de la comète. L'orbite étant parabolique, déterminer l'expression de la vitesse au périhélie v_P en fonction de u , a et d .
- 4) Calculer les valeurs de l'angle $\theta = (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SK})$ aux dates où l'orbite de la comète rencontre l'orbite terrestre.
- 5) La loi des aires (seconde loi de Kepler) implique que $\Delta S = \alpha \Delta t$.

a) Exprimer α en fonction de L et de m .

b) À partir de la définition du moment cinétique et de l'expression de v_P , exprimer L en fonction de m , u , a et d . En déduire l'expression de α .

c) À quelle date la comète est-elle entrée à l'intérieur de l'orbite terrestre ?

À quelle date en est-elle sortie ?

(Indications : on posera $t_P = 0$, ainsi $-t_K = S_{KSP}/\alpha$ où $S_{KSP} = S_{KQP} - S_{KQS}$ avec Q milieu de KK' . Exprimer S_{KQS} en fonction de a et θ . Pour calculer S_{KQP} , choisir un système de coordonnées cartésiennes de centre Q dont l'axe des x passe par K et celui des y passe par P , déterminer l'équation de la parabole $y = -Ax^2 + B$ en exprimant A et B en fonction de a , d et θ .)

E8.17 – Force et potentiel dans une sphère homogène

On considère une sphère homogène de centre O , de rayon R et de masse M . On prendra l'origine des potentiels nulle à l'infini. Une masse m interagit avec la sphère et est située en un point P à une distance r de son centre. On considérera les deux cas où P est à l'extérieur ou à l'intérieur de la sphère.

- 1) Calculer ρ la densité volumique de masse dans les deux cas extérieur et intérieur, en fonction de M , R et r .
- 2) Calculer la force et le potentiel s'appliquant sur m lorsque P est à l'extérieur.
- 3) Mêmes questions lorsque m est à l'intérieur.
- 4) Donner les graphiques du potentiel et de la force pour $r \in [0; +\infty[$

Chapitre 9

Forces d'inertie

et

changement de référentiel

Objectifs d'apprentissage du chapitre

• Connaissances

→ Cinématique des changements de référentiel. Vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis.

→ Dynamique des changements de référentiel. Forces d'inertie, forces fictives, force centrifuge, force de Coriolis.

Applications – Exercices de cours C9.1 et C9.2

→ Effets de la rotation de la Terre.

• Compétences

→ Savoir calculer les variables cinématiques dans deux référentiels quelconques.

→ Savoir calculer les forces d'inertie d'un référentiel non galiléen.

→ Interprétation des forces d'inertie et de leur caractère fictif ou non selon la nature de l'observateur considéré.

• À relire

Notions de physique	Chapitres et sections
Notion de référentiel	chapitre 3, section 3.2.2
Formulations mathématiques des rotations	chapitre 7, section 7.5

9.1 Introduction

Nous avons vu lors du chapitre 3 que la seconde loi de Newton est vraie dans les référentiels d'inertie, c'est-à-dire dans des référentiels qui sont en mouvement rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres. Nous avons donné les exemples du passager dans un train qui accélère ou qui freine, ou dans une voiture qui tourne, pour montrer que le passager « semble » subir des forces.

Ces forces sont appelées « forces d'inertie ». Elles sont « fictives » dans le sens où il faut les introduire dans le référentiel du véhicule pour rendre compte du mouvement, et ce référentiel est « non inertiel », mais elles n'existent pas pour un observateur situé dans un référentiel d'inertie observant le mouvement du passager ! Pour cet observateur, les lois de Newton fonctionnent, le passager est soumis au principe d'inertie et à la relation fondamentale de la dynamique.

Ceci doit vous paraître bien étrange voire contradictoire, et c'est bien normal. L'objectif de ce chapitre est de vous faire comprendre ce problème et de développer les outils mathématiques nécessaires à sa compréhension. Vous verrez que, malheureusement, ce formalisme est assez lourd et abscons mais il faut être capable de le manipuler car dans la nature, tout est accéléré ou freiné et/ou en rotation. Décrire le système de l'extérieur ne pose pas de problème et les chapitres précédents vous ont fourni les connaissances et compétences nécessaires. En revanche, décrire le système de l'intérieur, par exemple en étudiant les différentes parties qui le composent, nécessite la manipulation des forces d'inertie et donc des idées et des outils de ce chapitre.

La problématique des changements de référentiels et de la véracité des lois physiques est à la base de l'émergence des théories de la relativité restreinte et générale. Cependant, nous ne nous intéresserons pas à ces théories qui sont aux programmes des enseignements de physique de deuxième et cinquième années. Ici, nous travaillerons dans le domaine « classique » (en opposition au domaine relativiste). En particulier, nous supposerons, tout comme Newton et l'ensemble des physiciens et mathématiciens antérieur au XX^e siècle, que :

- Le temps est absolu. Quel que soit le référentiel, d'inertie ou non, le temps est le même partout, son écoulement ne change pas d'un référentiel à un autre, des horloges synchronisées à un instant le resteront alors à tout moment. Ceci est parfaitement justifié pour la plupart des phénomènes qui nous concernent.
- Les distances peuvent être mesurées instantanément et sans ambiguïté. À nouveau une hypothèse raisonnable qui ne sera plus vraie dans un cadre relativiste (à haute vitesse et près des fortes masses).

Nous appellerons \mathcal{R} un référentiel d'inertie que l'on suppose être immobile et possédant un observateur \mathcal{O} situé à son origine O . Le temps sera noté t et les coordonnées seront cartésiennes (x, y, z) bien que notre discussion ne dépende pas de ce choix. Nous appellerons \mathcal{R}' un référentiel en mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} et possédant un observateur \mathcal{O}' situé à son origine O' . Le temps sera noté t (en fait $t' = t$ par hypothèse) et les coordonnées cartésiennes seront notées avec des ' : (x', y', z') . A priori \mathcal{R}' est non inertiel, mais toutes les formules restent valables si le référentiel est galiléen.

Les objectifs du chapitre sont, d'une part, d'établir les relations entre les différentes grandeurs physiques mesurées dans chaque référentiels, c-à-d les relations entre $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F})$ et $(\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}', \vec{F}')$, et d'autre part, d'interpréter le sens physique de ces diverses relations.

9.2 Cinématique

9.2.1 Positions et notations

Soit M un point en mouvement. Les observateurs \mathcal{O} et \mathcal{O}' voient tous deux le point M et mesurent sa position dans leur référentiel respectif \mathcal{R} et \mathcal{R}' avec leur système de coordonnées respectif. Chaque observateur voit un mouvement mais la trajectoire associée est différente pour chacun. Souvenez-vous de l'exemple de la vigie en haut de son mât lâchant une pierre (section 3.2.2 du chapitre 3) sur un bateau en mouvement : pour la vigie la pierre a un mouvement rectiligne, pour un observateur resté à quai, la pierre a un mouvement parabolique. Dans cet exemple les deux référentiels sont inertiels, le changement de vision de la trajectoire est bien réel.

Dans le référentiel \mathcal{R} le vecteur position a pour expression :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z = \sum_i x_i \vec{u}_i$$

où nous introduisons une nouvelle notation pour abréger les formules qui vont suivre : $x_i = x, y, z$ et $\vec{u}_i = \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. Les trois vecteurs unitaires \vec{u}_i sont fixes pour l'observateur \mathcal{O} et ainsi $\dot{\vec{u}}_i = d\vec{u}_i/dt = 0$ pour cet observateur.

Dans le référentiel \mathcal{R}' le vecteur position a pour expression :

$$\vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'} = \sum_i x'_i \vec{u}'_i$$

Concernant les vecteurs unitaires de \mathcal{R}' il faut faire attention : pour l'observateur \mathcal{O}' ils sont fixes, mais ils sont mobiles pour l'observateur \mathcal{O} . Les vecteurs unitaires définis fixes dans un référentiel, sont mobiles dans l'autre. Ainsi la dérivée temporelle d'un vecteur unitaire $\dot{\vec{u}}_i = d\vec{u}_i/dt$ dépend du référentiel considéré. Ce point crucial est à manipuler avec précaution. Pour cela il faut introduire de nouvelles notations afin de préciser cette dépendance, on rajoute une barre avec le référentiel en indice $|\mathcal{R}$ et $|\mathcal{R}'$. Ainsi :

$$\left. \frac{d\vec{u}_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{u}'_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = 0 \quad \text{mais} \quad \left. \frac{d\vec{u}_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \neq 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{u}'_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} \neq 0 \quad (9.1)$$

En revanche, comme le temps est absolu, la dérivée temporelle des coordonnées est indépendante du référentiel : $(dx_i/dt)|_{\mathcal{R}} = (dx_i/dt)|_{\mathcal{R}'} = \dot{x}_i$. On réservera la notation avec un point « ' » pour les dérivées exprimées sur les scalaires (c-à-d sur les coordonnées) et non sur les vecteurs. Pour les vecteurs, on exprimera clairement le référentiel considéré.

• Relation entre positions

À présent il faut relier mathématiquement les deux positions \vec{r} et \vec{r}' . Ceci se fait grâce à la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'} \quad (9.2)$$

où on a introduit le vecteur position de l'observateur O' mesuré par l'observateur O dans le référentiel \mathcal{R} : $\vec{r}_{O'} = \overrightarrow{OO'} = x_{O'} \vec{u}_x + y_{O'} \vec{u}_y + z_{O'} \vec{u}_z$

9.2.2 Vitesses

Dans le référentiel \mathcal{R} le vecteur vitesse du point M a pour expression :

$$\vec{v} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z = \sum_i \dot{x}_i \vec{u}_i \quad (9.3)$$

On rappelle que les dérivées des vecteurs unitaires \vec{u}_i sont nulles dans \mathcal{R} , voir éq.(9.1). La vitesse du point O' s'écrit :

$$\vec{v}_{O'} = \left. \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}_{O'} \vec{u}_x + \dot{y}_{O'} \vec{u}_y + \dot{z}_{O'} \vec{u}_z = \sum_i \dot{x}_{O',i} \vec{u}_i \quad (9.4)$$

Dans le référentiel \mathcal{R}' le vecteur vitesse du point M a pour expression :

$$\vec{v}' = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \dot{x}' \vec{u}_{x'} + \dot{y}' \vec{u}_{y'} + \dot{z}' \vec{u}_{z'} = \sum_i \dot{x}'_i \vec{u}'_i \quad (9.5)$$

Les dérivées des vecteurs unitaires \vec{u}'_i sont nulles dans \mathcal{R}' , voir éq.(9.1).

• Relation entre vitesses

À présent il faut relier mathématiquement les deux vitesses \vec{v} et \vec{v}' . Ceci se fait en dérivant par rapport au temps, dans le référentiel \mathcal{R} , l'équation vectorielle entre les positions (éq.(9.2)) :

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}' \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \quad (9.6)$$

- Le terme de gauche n'est autre que \vec{v} la vitesse de M dans \mathcal{R} , voir éq.(9.3).
- Le premier terme de droite est $\vec{v}_{O'}$, la vitesse de O' dans \mathcal{R} , voir éq.(9.4).
- En revanche, le dernier terme n'est pas \vec{v}' la vitesse de M dans \mathcal{R}' , il faut développer l'expression :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \dot{x}' \vec{u}_{x'} + \dot{y}' \vec{u}_{y'} + \dot{z}' \vec{u}_{z'} + x' \left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + y' \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z' \left. \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}' + x' \left. \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + y' \left. \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z' \left. \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}' + \sum_i x'_i \left. \frac{d\vec{u}'_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Afin de poursuivre ce calcul, il faut réaliser à présent que la dérivée d'un vecteur unitaire est uniquement reliée à sa capacité à tourner (car sa norme est fixe et égale à 1). Ceci a été étudié lors du chapitre 7 où nous avons relié la dérivée temporelle d'un vecteur unitaire en rotation au produit vectoriel du vecteur rotation et du vecteur unitaire (voir éq.(7.10)). Si les vecteurs unitaires de \mathcal{R}' sont en rotation pour l'observateur \mathcal{O} du référentiel \mathcal{R} , alors on a la relation suivante (simple adaptation de l'éq.(7.10) aux notations actuelles) :

$$\left. \frac{d\vec{u}_i'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i'$$

où $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation qui peut-être défini localement, car tout mouvement peut être décomposé en une translation et une rotation. Ceci vous paraîtra plus clair après quelques exemples concrets. Ainsi l'éq.(9.7) devient :

$$\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}' + \sum_i x_i' \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i' = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \quad (9.8)$$

En injectant ce résultat dans l'éq.(9.6) on obtient :

Loi de composition des vitesses

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e \quad (9.9)$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}'_{\mathcal{O}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \quad (9.10)$$

La dernière équation donne la définition de la **vitesse d'entraînement** \vec{v}_e qui prend en compte les effets de translation et de rotation. Elle est reliée à la vitesse $\vec{v}'_{\mathcal{O}}$ du centre du système de coordonnées de \mathcal{R}' et au mouvement de rotation des axes de \mathcal{R}' $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$. On peut interpréter cette vitesse d'entraînement comme la vitesse mesurée dans \mathcal{R} d'un point P , appelé « point coïncidant », défini à l'instant $t = t_0$ au niveau du point M puis restant fixe dans \mathcal{R}' ultérieurement (afin que $\vec{v}'_P = \vec{0}$).

Les relations (9.9) et (9.10) sont très générales et purement vectorielles. Cependant, chaque vecteur a un sens précis dans un référentiel donné. Si on veut exprimer ces relations vectorielles en composantes il est indispensable de calculer préalablement les relations entre les vecteurs unitaires de chaque système de coordonnées. En effet, \vec{v} est naturellement définie dans \mathcal{R} alors que \vec{v}' l'est dans \mathcal{R}' . En revanche, la situation est confuse pour la vitesse d'entraînement \vec{v}_e car $\vec{v}'_{\mathcal{O}}$ est définie dans \mathcal{R} et $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ l'est dans \mathcal{R}' ! Il faut utiliser les relations entre vecteurs unitaires de chaque référentiel pour obtenir les composantes de \vec{v}_e sans ambiguïté dans un référentiel donné (en général dans \mathcal{R}). Ceci sera plus clair après quelques exemples.

• Transformation de Galilée

Lors des chapitres précédents (chapitre 2, section 2.3.4, et chapitre 6, exercice de cours C6.5) nous avons été confronté à la loi de composition des vitesses entre deux référentiels d'inertie distingués par une vitesse relative \vec{V} rectiligne

et uniforme. Le changement de référentiel entre ces deux référentiels d'inertie, la fameuse transformation de Galilée, ne fait pas intervenir de rotation, d'où $\vec{\omega} = \vec{0}$ et la vitesse d'entraînement se réduit à la simple vitesse de translation entre les centres des deux systèmes de coordonnées : $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} = \vec{V}$

• Opérateur différentiel lié au changement de référentiel

On peut réécrire l'éq.(9.8) de la façon suivante :

$$\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

Ce qui permet de faire apparaître l'opérateur différentiel associé au changement de référentiel et s'appliquant sur les vecteurs définis dans \mathcal{R}' :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \quad (9.11)$$

Insistons sur le fait que le terme faisant intervenir le vecteur rotation et le produit vectoriel provient de la dérivation des vecteurs unitaires de la base de \mathcal{R}' , par conséquent ce terme n'apparaît que lorsqu'on dérive dans \mathcal{R} des vecteurs exprimés dans la base de \mathcal{R}' .

9.2.3 Accélération

Dans le référentiel \mathcal{R} le vecteur accélération du point M a pour expression (simple dérivation de l'éq.(9.3)) :

$$\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z = \sum_i \ddot{x}_i \vec{u}_i \quad (9.12)$$

L'accélération du point O' s'écrit (simple dérivation de l'éq.(9.4)) :

$$\vec{a}_{O'} = \left. \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}_{O'} \vec{u}_x + \ddot{y}_{O'} \vec{u}_y + \ddot{z}_{O'} \vec{u}_z = \sum_i \ddot{x}_{O',i} \vec{u}_i \quad (9.13)$$

Dans le référentiel \mathcal{R}' le vecteur accélération du point M a pour expression (simple dérivation de l'éq.(9.5)) :

$$\vec{a}' = \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \ddot{x}' \vec{u}_{x'} + \ddot{y}' \vec{u}_{y'} + \ddot{z}' \vec{u}_{z'} = \sum_i \ddot{x}'_i \vec{u}'_i \quad (9.14)$$

• Relation entre accélérations

La relation entre les accélérations \vec{a} et \vec{a}' s'établit en dérivant par rapport au temps, dans le référentiel \mathcal{R} , l'équation vectorielle entre les vitesses (éq.(9.9)) :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

Avec l'opérateur différentiel donné par l'éq.(9.11) ce calcul est assez rapide, mais rappelons que cet opérateur n'intervient que lorsqu'on dérive des vecteurs

exprimés dans la base de \mathcal{R}' , donc seuls les vecteurs \vec{v}' et $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ sont concernés car \vec{v}' et \vec{r}' sont exprimés dans \mathcal{R}' . Les différents termes de cette équation s'interprètent ainsi :

- Le terme de gauche est \vec{a} , l'accélération de M dans \mathcal{R} , voir éq.(9.12).
- Le second terme de droite est $\vec{a}_{O'}$, l'accélération de O' dans \mathcal{R} , voir éq.(9.13).
- Pour le premier terme de droite on obtient :

$$\left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' \quad (9.15)$$

- Pour le dernier terme de droite on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}') \\ &= \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation $\dot{\vec{\omega}} = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$ pour alléger les notations et car il n'y pas d'ambiguïté pour ce vecteur là car $\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \vec{0}$. On en déduit :

Loi de composition des accélérations

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_{C_o} \quad (9.16)$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \quad (9.17)$$

$$\vec{a}_{C_o} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \quad (9.18)$$

L'accélération d'entraînement \vec{a}_e ne dépend que des positions du point M et de l'origine O' de \mathcal{R}' . Elle correspond à l'accélération du point coïncidant P . Attention, $\vec{a}_e \neq d\vec{v}_e/dt$.

L'accélération de Coriolis \vec{a}_{C_o} est un nouveau terme qui sera non nul uniquement si le point M est animé d'une vitesse \vec{v}' dans le référentiel \mathcal{R}' .

Remarques :

- On appelle « translation généralisée » le mouvement tel que les vecteurs unitaires de \mathcal{R}' soient fixes pour l'observateur \mathcal{O} de \mathcal{R} . Dans ce cas, $d\vec{u}_i'/dt|_{\mathcal{R}} = 0$. Ceci englobe les translations rectilignes (uniformes ou non) et ce qu'on appelle les « translations circulaires » (par exemple, le mouvement d'une nacelle dans une grande roue de foire, la rotation est alors présente dans les variables cinématiques de O'). On a alors $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'}$ et $\vec{a}_e = \vec{a}_{O'}$ ($\vec{a}_{C_o} = \vec{0}$).
- Si le mouvement entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' est rectiligne et uniforme, on retrouve les propriétés de la transformation de Galilée et $\vec{a} = \vec{a}'$.
- De nouveau les relations (9.16), (9.17) et (9.18) sont très générales et purement vectorielles. Les vouloir en composantes nécessite la connaissance des relations entre les vecteurs unitaires de chaque système de coordonnées.

9.3 Dynamique

Dans cette section nous allons voir comment l'application de la seconde loi de Newton est modifiée dans les référentiels non inertiels. Maintenir le PFDC demande l'introduction de « **forces fictives** », appelées aussi « **forces d'inertie** » car elles sont simplement la manifestation directe de la première loi de Newton, le principe d'inertie. Nous tenterons de comprendre le sens de l'expression « fictives » et en particulier nous verrons que ce sens dépend de la nature du référentiel de l'observateur considéré...

9.3.1 Translation rectiligne non uniforme

Soit M un point en mouvement, \mathcal{R} un référentiel d'inertie et \mathcal{R}' un référentiel non galiléen en accélération rectiligne par rapport à \mathcal{R} de valeur \vec{A} . Cette accélération n'est rien d'autre que l'accélération du centre O' de \mathcal{R}' mesurée par l'observateur de \mathcal{R} situé en O l'origine de \mathcal{R} : $\vec{A} = \vec{a}_{O'}$. Il n'y a pas de rotation car l'accélération est rectiligne : $\vec{\omega} = \vec{0}$. Les relations entre positions, vitesses et accélérations des différents référentiels sont donc très simples (voir les équations (9.2), (9.9) et (9.16), l'absence de rotation fait que les dérivées par rapport au temps sont indépendantes du référentiel) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{r}_{O'} \\ \vec{V} = \vec{v}_{O'} \\ \vec{A} = \vec{a}_{O'} \end{array} \right.$$

Le PFDC s'applique sans aucun problème dans \mathcal{R} qui est galiléen :

$$\vec{F}_T = m \vec{a} = m \vec{a}' + m \vec{A} \quad (9.19)$$

où \vec{F}_T est l'ensemble des forces s'appliquant à la masse m ($\vec{F}_T = \sum \vec{F}$).

On souhaite à présent savoir comment se transforme cette équation pour l'observateur O' . Cet observateur fait un bilan des forces s'appliquant à la masse m . Les expressions des forces peuvent dépendre ou non du référentiel. Pour nos propos actuels cette possible complication n'est pas importante, nous supposons donc que toutes les forces intervenant dans \vec{F}_T sont indépendantes du référentiel : $\vec{F}'_T = \vec{F}_T$. L'observateur O' mesure l'accélération \vec{a}' pour la masse m . En appliquant le PFDC, cet observateur souhaite maintenir la seconde loi de Newton sous la forme type $\sum \vec{F}'_I = m \vec{a}'$. La relation qui est vérifiée par la masse m est l'équation (9.19), c-à-d le PFDC exprimé dans \mathcal{R} . On en déduit donc que l'observateur O' doit appliquer la relation :

$$m \vec{a}' = m \vec{a} - m \vec{A} = \vec{F}_T - m \vec{A} = \vec{F}'_T + \vec{F}'_I \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{F}'_I = -m \vec{A}} \quad (9.20)$$

On voit apparaître la **force fictive** ou **force d'inertie** : $\vec{F}'_I = -m \vec{A}$. **L'observateur O' doit absolument prendre en compte cette force d'inertie dans son bilan des forces s'il ne veut pas avoir une interprétation erronée de ses mesures.**

Afin de mieux comprendre, reprenons l'exemple du passager d'un véhicule entrain d'accélérer. Quand le véhicule accélère, vers l'avant, on sent une force qui nous pousse au fond de notre siège, cette force est orientée vers l'arrière. Cette opposition de sens est la manifestation du signe négatif reliant \vec{F}'_I à \vec{A} . Pour le passager, cette force n'est absolument pas fictive, elle est bien réelle c'est une force d'inertie, elle peut même lui faire sérieusement mal si $\|\vec{A}\|$ est élevée! Le passager doit tenir compte de cette force dans son bilan des forces qu'il effectue dans son référentiel qui n'est pas galiléen.

En revanche, pour l'observateur \mathcal{O} qui n'est pas dans le véhicule, cette force n'existe pas, elle est fictive, il ne doit pas l'inclure dans son bilan des forces réalisé dans le référentiel galiléen \mathcal{R} . Cet observateur interprète le mouvement de recul du passager comme une manifestation du principe de l'inertie.

Dans un référentiel non galiléen, pour appliquer le PFDC l'observateur doit introduire une ou des forces d'inertie, qui sont fictives pour un autre observateur placé dans un référentiel galiléen.

• C9.1 – Inclinaison d'un pendule dans une voiture

On accroche au plafond d'une voiture un pendule constitué d'une bille de masse m suspendue à un fil. Soit \mathcal{R} le référentiel associé à un observateur au sol (référentiel terrestre supposé être galiléen). Soit \mathcal{R}' le référentiel associé à un observateur situé dans la voiture.

1) *La voiture possède un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse \vec{V} .*

a) *Faire le bilan des forces et décrire par un schéma la position du pendule.*

b) *Appliquer la seconde loi de Newton et calculer la tension du fil dans les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .*

2) *La voiture possède une accélération \vec{A} . Le pendule fait alors un angle θ par rapport à la verticale.*

a) *Dans le référentiel \mathcal{R} , faire le bilan des forces et décrire par un schéma la position du pendule. Appliquer la seconde loi de Newton et donner les expressions de la tension du fil et de l'angle θ .*

b) *Mêmes questions dans le référentiel \mathcal{R}' .*

Réponses

9.3.2 Cas général

À présent le référentiel \mathcal{R}' possède un mouvement quelconque par rapport au référentiel \mathcal{R} . Ce mouvement est caractérisé, à chaque instant t , par les quantités cinématiques de l'origine O' du système de coordonnées de \mathcal{R}' , c-à-d par $\vec{r}'_{O'}(t)$, $\vec{v}'_{O'}(t)$ et $\vec{a}'_{O'}(t)$, ainsi que par le vecteur rotation $\vec{\omega}(t)$.

Dans le référentiel \mathcal{R} qui est galiléen, le dynamique du point d'étude M est contrôlée par le PFDC qui s'applique sans ambiguïté :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_T = m \vec{a} = m \vec{a}' + m \vec{a}_e + m \vec{a}_{Co}$$

L'observateur \mathcal{O}' de \mathcal{R}' mesure l'accélération \vec{a}' pour le point M . La relation dynamique qu'il doit appliquer entre cette accélération et les forces qui s'appliquent sur M dans ce référentiel non galiléen, s'obtiennent grâce à l'éq.(9.16) :

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_{Co} = \vec{F}_T + \vec{F}'_e + \vec{F}'_{Co} = \vec{F}'_T$$

La somme totale des forces dans le référentiel \mathcal{R}' , \vec{F}'_T , est donc égale à la somme totale des forces usuelles obtenues dans le référentiel d'inertie \mathcal{R} plus deux nouvelles forces d'inertie appelées force d'entraînement et force de Coriolis :

Forces d'inertie / Forces fictives, générales

Force d'entraînement :

$$\vec{F}'_e = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_{\mathcal{O}'} - m\vec{\omega} \wedge \vec{r}' - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \quad (9.21)$$

$$\text{Force de Coriolis : } \vec{F}'_{Co} = -m\vec{a}_{Co} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \quad (9.22)$$

La force de Coriolis est non nulle uniquement si le point M possède un mouvement dans \mathcal{R}' (c-à-d si $\vec{v}' \neq \vec{0}$). La force d'entraînement est plus complexe. Elle se décompose en trois termes distincts. Le premier est simplement l'accélération relative entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Le second est non nul si la rotation entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' est non uniforme (c-à-d si $d\vec{\omega}/dt \neq \vec{0}$). Quant au troisième terme, bien que son expression soit plutôt barbare, en fait nous le connaissons tous, il correspond à la célèbre force centrifuge¹ :

$$\text{Force centrifuge : } \vec{F}'_{cfuge} = m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \quad (9.23)$$

Dans le référentiel d'inertie \mathcal{R} ces forces sont fictives, elles n'existent pas, l'observateur \mathcal{O} ne doit donc pas en tenir compte dans le bilan des forces. Les mouvements surprenants que peut avoir le point M ne sont que la manifestation du principe d'inertie. En revanche, dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}' l'observateur \mathcal{O}' doit absolument prendre en compte ces forces d'inertie dans l'application du PFDC.

Il est normal d'être surpris par les affirmations précédentes. Pour s'en convaincre, rien de mieux que de traiter quelques exemples en comparant les points de vue des différents observateurs \mathcal{O} et \mathcal{O}' . L'exercice de cours qui suit veut démystifier l'interprétation physique de la force centrifuge dans un exemple simple, le mouvement circulaire et uniforme.

Dans la section suivante, nous étudierons plus en détails la force centrifuge et la force de Coriolis en examinant les effets de la rotation de la Terre sur l'accélération de la pesanteur \vec{g} et sur un corps en chute libre. Nous verrons que la force centrifuge modifie \vec{g} en norme et en direction selon la latitude du lieu où nous sommes, et que la force de Coriolis décale vers le Sud et vers l'Est un objet qui tombe dans l'hémisphère Nord.

1. Selon l'origine choisie pour \mathcal{R}' la force centrifuge peut aussi être associée au terme $-m\vec{a}_{\mathcal{O}'}$, voir l'exercice de cours ci-dessous.

• C9.2 – Force centrifuge

Une masse m , située en M , est accrochée au bout d'un fil et tourne avec une vitesse angulaire uniforme ω autour du point d'attache O , centre de rotation du mouvement de M . Le mouvement a lieu sur un plan horizontal. On néglige les frottements. Soit \mathcal{R} le référentiel du laboratoire, ou référentiel terrestre, supposé être galiléen associé à un observateur \mathcal{O} situé en O et définissant deux axes, x et y , perpendiculaires et fixes. Soit \mathcal{R}' le référentiel associé à un observateur \mathcal{O}' situé en M et définissant deux axes, x' et y' , perpendiculaires et fixes pour \mathcal{O}' . \mathcal{R}' s'appelle le référentiel au repos de la masse m . Soit \mathcal{R}'' le référentiel associé à un observateur \mathcal{O}'' situé en $O'' = O$ et définissant deux axes, x'' et y'' , perpendiculaires et fixes pour \mathcal{O}'' .

1) Dans \mathcal{R} , donner les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération ; faire le bilan des forces et appliquer la seconde loi de Newton. En déduire l'expression de la force de tension du fil.

2) Reprendre les mêmes questions dans \mathcal{R}' afin d'en déduire l'expression de la force centrifuge.

3) Reprendre les mêmes questions dans \mathcal{R}'' afin de montrer qu'un changement d'origine modifie le calcul de la force d'entraînement sans affecter la dynamique ni l'expression de la force centrifuge.

4) Que se passe-t-il si le fil casse ? Décrire la situation pour chaque observateur.

5) Vous êtes sur un tourniquet que vos amis font tourner très vite à vitesse constante. Faites le bilan des forces et donner l'interprétation physique de chacune d'entre-elles.

6) Vous êtes dans l'espace, dans votre navette spatiale en orbite circulaire autour de la Terre. Faites le bilan des forces et donner l'interprétation physique de chacune d'entre-elles.

Réponses

9.4 Applications liées à la rotation de la Terre

9.4.1 C9.3 – \vec{g} et la rotation de la Terre

Soit \mathcal{R} le référentiel géocentrique supposé être galiléen, associé au système de coordonnées $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où O est le centre de la Terre supposée sphérique et \vec{u}_z est le long de l'axe de rotation de la Terre dans le sens Sud-Nord. Soit \mathcal{R}' un référentiel tournant avec la Terre, associé au système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$. La terre tourne sur elle-même en un jour sidéral de période $T_S = 86164$ s. On donne $R_T = 6378$ km. Une masse m assimilée à un point matériel M est située à la surface de la Terre à une latitude λ et reste à la même position sur la surface de la Terre.

1) Si on néglige la rotation de la Terre sur elle-même, exprimer l'attraction de la pesanteur \vec{g}_0 en fonction de G , M_T , R_T et \vec{u}_r un vecteur unitaire à définir précisément dans le système de coordonnées de chaque référentiel.

2) Définir le vecteur rotation de la Terre lié à la rotation sur elle-même. Déterminer la vitesse angulaire ω et la vitesse d'un point de la surface de la Terre à une latitude λ . Calculer cette valeur pour $\lambda = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Faire un dessin en perspective de la situation tridimensionnelle.

3) Expliquer qualitativement pourquoi la rotation de la Terre modifie \vec{g}_0 . Déterminer l'expression de la force d'entraînement.

4) Donner la relation entre le poids de la masse m , la force de gravitation et la force d'entraînement. Faire un dessin en coupe de la situation dans le plan contenant l'axe z et le point M . En déduire que \vec{g} diffère de \vec{g}_0 en norme et en direction.

5) Calculer l'expression de g , norme de \vec{g} , en fonction de g_0 et de a_e l'accélération d'entraînement.

6) Pour quelle latitude a_e est-elle maximale ? En déduire la valeur maximale du rapport F_e/F_G . Commenter cette valeur.

7) En utilisant un développement limité, déterminer l'erreur relative commise sur la valeur de g . Calculer cette valeur pour $\lambda = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Conclure sur la différence entre g et g_0 .

8) Exprimer à l'ordre le plus bas l'écart angulaire γ entre les directions de \vec{P} et \vec{F}_G . (Indication : calculer le produit vectoriel plutôt que le produit scalaire, entre \vec{F}_G et \vec{P} , afin de faire apparaître $\sin \gamma \approx \gamma$).

9) Commenter les effets de la rotation de la Terre sur \vec{g} .

Réponses

9.4.2 C9.4 – Force de Coriolis et rotation de la Terre

Soit \mathcal{R} le référentiel géocentrique supposé galiléen, associé au système de coordonnées $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où O est le centre de la Terre supposée sphérique et \vec{u}_z est le long de l'axe de rotation de la Terre dans le sens Sud-Nord. Soit \mathcal{R}' un référentiel terrestre tournant avec la Terre, appelé référentiel tangent associé au système de coordonnées $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$. O' est situé à la surface de la Terre à une latitude λ , $\vec{u}_{z'}$ est associé à la verticale du lieu où se trouve O ($\vec{u}_{z'} = \vec{u}_{OO'}$), $\vec{u}_{x'}$ est tangent au parallèle passant par O' dans le sens Ouest-Est, et $\vec{u}_{y'}$ est tangent au méridien passant par O' dans le sens Sud-Nord. La terre tourne sur elle-même en un jour sidéral de période $T_S = 86164$ s. Une masse m assimilée à un point matériel M a une position $\vec{O'M} = \vec{r}'$ et une vitesse \vec{v}' mesurées dans \mathcal{R}' .

1) Exprimer \vec{u}_z en fonction de λ et des vecteurs unitaires de \mathcal{R}' . En déduire l'expression du vecteur rotation associé au mouvement de la Terre.

2) Calculer l'expression générale de la force de Coriolis (\vec{F}'_{Co}) dans \mathcal{R}' (M étant dans l'hémisphère Nord).

3) **Mouvement « méridien »** – Un train de masse m se déplace du Nord au Sud le long d'un méridien à la vitesse v' . Calculer \vec{F}'_{Co} en fonction de m , v' , ω et λ . Représenter sur un schéma cette force. Évaluer sa valeur et son rapport avec le poids, pour $m = 20$ t, $v' = 300$ km/h et $\lambda = 45^\circ$.

4) **Mouvement « parallèle »** – Un avion de masse m se déplace d'Ouest en Est le long d'un parallèle à la vitesse v' . Calculer \vec{F}'_{Co} en fonction de m , v' , ω et λ . Représenter sur un schéma cette force. Évaluer sa valeur pour $m = 20$ t, $v' = 600$ km/h et $\lambda = 45^\circ$. Cette force dépend-elle de l'altitude de l'avion ?

5) **Déviations d'un corps en chute libre** – À $t = 0$ le point M est lâché sans vitesse initiale d'un point M_0 situé à l'altitude h . Au bout d'un certain temps de chute t_c , M touche le sol mais le point d'arrivée n'est pas à la verticale de M_0 à cause de la force de Coriolis. On supposera que \vec{g} est uniforme (on néglige les effets de la force centrifuge et de la variation avec l'altitude).

a) Écrire les trois équations différentielles du premier ordre reliant les évolutions des composantes de la position du point M : x' , y' et z' .

b) Déterminer l'équation différentielle du second ordre sur x' . Calculer $x'(t)$. En déduire $y'(t)$ et $z'(t)$.

c) Justifier pourquoi $\omega t \ll 1$. En réalisant des développements limités à différents ordres, calculer le temps de chute t_c (ordre 2), montrer que x' est proportionnel à t^3 (ordre 3) et que $y' \ll x'$ (ordre 4).

(Indication : $\sin \epsilon \approx \epsilon - \epsilon^3/6 + O(\epsilon^5)$ et $\cos \epsilon \approx 1 - \epsilon^2/2 + \epsilon^4/24 + O(\epsilon^6)$)

d) Déterminer les déviations $\Delta x'$ et $\Delta y'$ du point de chute par rapport à la verticale initiale, en fonction de g , ω , h et λ . A.N. : $h = 10$ km et $\lambda = 45^\circ$.

Réponses

9.5 Exercices

E9.1 – Pendule dans une voiture

On accroche au plafond d'une voiture un pendule constitué d'une bille de masse m suspendue à un fil. Que faut-il faire pour que le pendule soit incliné d'un angle $\theta = \pi/4$? Décrire clairement la situation pour un passager de la voiture et pour un observateur immobile regardant passer la voiture.

E9.2 – Tourniquet

Votre neveu est accroché au bord extérieur d'un tourniquet et vous demande de le faire tourner aussi vite que vous pouvez. Le rayon du tourniquet vaut $R = 2m$. Votre neveu a une masse $m = 40\text{ kg}$ et il est tout juste capable de se suspendre à une barre fixe. À chaque impulsion que vous donnez au tourniquet la vitesse angulaire augmente de $\Delta\omega = 2\text{ tr/min}$. Vous donnez une impulsion toute les $\Delta t = 10\text{ s}$.

- 1) Au bout de combien de temps votre neveu est-il éjecté du tourniquet?
- 2) Un déménageur très costaud passant par là vous demande de faire la même chose avec lui. Vous faudra-t-il le même temps pour l'éjecter à son tour?

E9.3 – Freinage ou évitement

Votre voiture arrive avec une vitesse v_0 à une distance d d'un mur. Vous voulez éviter le mur sans faire dérapier la voiture. Vous sera-t-il plus facile de freiner en ligne droite (avec une décélération constante) ou d'effectuer un virage de rayon d ? Décrire les forces que vous ressentez dans la voiture.

E9.4 – Centrifugeuse

Une centrifugeuse de fête foraine peut être assimilée à un cylindre de rayon R tournant avec une vitesse angulaire ω que l'on supposera uniforme. Vous êtes situé dans la centrifugeuse contre la paroi interne à une hauteur h du sol, soit μ le coefficient de friction entre la paroi et votre corps, et m votre masse.

En choisissant un référentiel tournant comme cadre d'étude, faire le bilan des forces et appliquer la relation fondamentale de la dynamique classique. En déduire la vitesse angulaire minimale de la centrifugeuse pour que vous ne glissiez pas vers le bas.

E9.5 – Impesanteur

On considère un satellite de masse M décrivant une trajectoire circulaire de rayon r par rapport à la Terre de masse M_T . On accroche un pendule de masse m dans le satellite. Soit \mathcal{R} le référentiel géocentrique supposé être galiléen. Soit \mathcal{R}' un référentiel associé au satellite. On constate que le pendule reste fixe dans le satellite : c'est l'état d'impesanteur !

- 1) Calculer l'accélération du système "satellite+pendule" dans \mathcal{R} , en fonction de G , M_T et r . En déduire la vitesse v du système.
- 2) On suppose que le pendule est tendu et aligné avec le centre de la Terre. Calculer l'accélération de la masse m , en fonction de G , M_T , r et T la tension du fil.
- 3) À partir du constat expérimental que déduisez-vous pour les deux accélérations précédentes ? En déduire la tension du fil du pendule. Que se passe-t-il si on coupe le fil ?
- 4) On change de référentiel en choisissant celui du satellite. Calculer la valeur de la tension du fil du pendule en appliquant naïvement (sans forces fictives) la RFDC. Conclusions ?
- 5) Appliquer le PFDC avec la force fictive adéquate afin de calculer la vitesse v du pendule. Comparer votre résultat à celui de la question 1.

E9.6 – Bloc et anneau

Un bloc de masse m est lancé avec une vitesse v_0 le long d'un anneau de rayon R posé horizontalement sur une table. Soit μ le coefficient de frottement entre le bloc et l'anneau. Soit \mathcal{R} le référentiel associé à un observateur au sol (référentiel terrestre supposé être galiléen). Soit \mathcal{R}' le référentiel associé à un observateur tournant avec le bloc. Les origines des systèmes de coordonnées des deux référentiels seront choisies au centre de l'anneau.

- 1) Dans \mathcal{R} , donner les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération ; faire le bilan des forces et appliquer le PFDC. En déduire que l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse angulaire est : $\dot{\omega} = -\mu\omega^2$.
- 2) Reprendre les mêmes questions dans \mathcal{R}' et comparer les expressions de la force fictive d'entraînement et de l'accélération calculée en 1.
- 3) Donner l'équation horaire de la vitesse du bloc mesurée dans \mathcal{R} et de la vitesse angulaire de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

E9.7 – Manège I

Un manège possède un plateau de rayon R tournant avec une vitesse angulaire uniforme ω . Soit \mathcal{R} le référentiel associé à un observateur au sol (référentiel terrestre supposé être galiléen). Soit \mathcal{R}' le référentiel associé à un observateur situé sur le manège. Les origines des systèmes de coordonnées des deux référentiels seront choisies au centre du manège. Un bloc de masse m , assujéti à se déplacer sur un segment de droite OA ($OA = R$), est animé d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0 , d'amplitude $R/2$, centré en I milieu de OA (à $t = 0$ on le suppose en I avec une vitesse dirigée vers A).

- 1) Dans \mathcal{R}' , calculer les expressions des vecteurs \vec{r}' , \vec{v}' et \vec{a}' .
- 2) En déduire l'expression des forces d'entraînement et de Coriolis subies par le bloc. Indiquer sur des schémas les directions et les sens de ces forces lorsque le bloc va de O vers A , puis l'inverse. Représenter graphiquement l'évolution

temporelle de ces forces pour $t \in [0; 2\pi/\omega_0]$, et les comparer aux évolutions de la position et de la vitesse du bloc.

E9.8 – Manège II

Un manège est constitué d'une tige (T) tournant autour d'un point fixe O situé au milieu de la tige. La tige a une longueur $2R = 10\text{ m}$ et effectue 5 tours par minute. On notera ω la vitesse angulaire du manège. Sur cette tige glisse un bloc de masse m , assimilé à un point matériel M , animé d'un mouvement rectiligne : la position du bloc sur la tige est repérée par la mesure algébrique $x = \overline{OM}$. Soit \mathcal{R} le référentiel associé à un observateur au sol (référentiel terrestre supposé être galiléen). Soit \mathcal{R}' le référentiel associé à un observateur situé sur le manège. Les origines des systèmes de coordonnées des deux référentiels seront choisies au centre du manège. Le bloc est animé d'un mouvement rectiligne sur la tige tel que $x = \overline{OM} = V_0 t$ avec $V_0 = 10\text{ km/h}$.

- 1) Dans \mathcal{R}' , exprimer les vecteurs position et vitesse du bloc. Calculer la vitesse d'entraînement \vec{v}_e de \mathcal{R}' et montrer qu'elle est perpendiculaire à \vec{v}' la vitesse du bloc mesurée dans \mathcal{R}' .
- 2) Déterminer la position du bloc dans \mathcal{R} . Donner l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires. Calculer sa vitesse par rapport au sol, et vérifier que $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$.
- 3) Au bout de combien de temps le bloc quitte-t-il la tige ? Quelle est alors sa vitesse ?

E9.9 – Manège III

Reprendre l'exercice précédent en supposant à présent que le bloc est animé d'un mouvement oscillant du type $x = \overline{OM} = R \sin \omega t$

- 1) Dans \mathcal{R}' , exprimer les vecteurs position et vitesse du bloc. Calculer la vitesse d'entraînement \vec{v}_e de \mathcal{R}' et montrer qu'elle est perpendiculaire à \vec{v}' la vitesse du bloc mesurée dans \mathcal{R}' .
- 2) Déterminer la position du bloc dans \mathcal{R} . En déduire sa vitesse par rapport au sol, et vérifier que $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$.
- 3) Déterminer l'équation de la trajectoire du bloc. Vérifier que le bloc se déplace sur un cercle à une vitesse angulaire constante ω_0 . On donnera les caractéristiques géométriques du cercle et la vitesse angulaire du déplacement. Vérifier enfin que la vitesse est tangente à la trajectoire.
- 4) Représenter sur un schéma la trajectoire du bloc et sa position lorsque la tige a effectué respectivement un sixième de tour, un quart de tour et un demi-tour. Dessiner aussi la base intrinsèque (\vec{u}_T, \vec{u}_N) à chacun de ces instants et expliciter les coordonnées de \vec{u}_T dans \mathcal{R} .
- 5) $s(T)$ est la longueur parcourue par le bloc lorsque le manège fait un tour. Expliciter $s(T)$ de deux façons :
 - En utilisant les caractéristiques géométriques de la trajectoire
 - En utilisant la formule générale : $s(T) = \int_0^T \|\vec{v}(t)\| dt$.

Annexe A

Formulaire mathématique

A.1 Fonctions usuelles

A.1.1 Puissances, racines et équation du second degré

Dans les formules qui suivent les variables x et y , ou les paramètres a et b peuvent être à valeurs dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} .

Puissances : $x^0 = 1$; $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$; $x^a x^b = x^{a+b}$; $(x^a)^b = x^{ab}$; $x^a y^a = (xy)^a$

Racines : $x = y^a \Leftrightarrow y = x^{1/a} = \sqrt[a]{x}$; $\sqrt[a]{x^a} = (\sqrt[a]{x})^a = |x|$; $\sqrt{x} = x^{1/2}$

Soit le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$. Ce polynôme peut être factorisé sous la forme $P(x) = a(x - x_+)(x - x_-)$ où x_+ et x_- sont les solutions de l'équation du second degré $P(x) = 0$, qu'on obtient à l'aide de la méthode du discriminant :

$$P(x) = a(x - x_+)(x - x_-) = ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{Si } \Delta > 0 \text{ alors } x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } \Delta = 0 \text{ alors } x_+ = x_- = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } \Delta < 0 \text{ alors } x_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{C}$$

A.1.2 Exponentielle et logarithme népérien

La fonction exponentielle e^x a exactement les mêmes propriétés que les puissances vues précédemment. Le point essentiel est que la variable x est un exposant d'un nombre irrationnel très particulier $e = 2,71828\dots$. L'exponentielle correspond à la fonction puissance dans la base e . La fonction réciproque de l'exponentielle est le logarithme népérien, noté $\ln(x)$. On peut définir la fonction puissance et la fonction logarithme dans la base que l'on veut. Un choix fait couramment est la base 10, on parle alors de puissance de dix et de logarithme décimal.

La raison profonde du choix de la base e est algébrique. On peut le voir aussi comme la seule base telle que la dérivée de l'exponentielle soit la fonction elle-même : $(e^x)' = e^x$. Pour toute autre base il faut rajouter une constante multiplicative, par exemple $(10^x)' = (\ln 10)10^x = 10^x / \log e$. Cela signifie que dans une base quelconque les opérations de dérivations et d'intégrations peuvent devenir relativement pénibles. Dans ce livre nous travaillerons exclusivement en base e .

Exponentielle : $e^0 = 1$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^x e^y = e^{x+y}$; $(e^x)^y = e^{xy}$

Logarithme népérien : $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(avec $x > 0$ et $y > 0$ dans \mathbb{R}) ; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$; $\ln(x^a) = a \ln x$

Ces formules restent valable pour toute autre base ($e \rightarrow 10$ ou $e \rightarrow a$, et $\ln \rightarrow \log$ ou $\ln \rightarrow \log_a$). La réciprocity des deux fonctions s'exprime ainsi :

$$\boxed{x = e^{\ln x} = \ln(e^x)} \quad \Rightarrow \quad a^x = e^{x \ln a} = 10^{x \log a}$$

Application : $(10^x)' = (e^{x \ln 10})' = (\ln 10) (e^{x \ln 10}) = (\ln 10) 10^x$.

L'exponentielle est une fonction essentielle dans tous les domaines de la physique, en particulier sous les formes $e^{-t/\tau}$ ou $e^{-x/\lambda}$ pour les phénomènes d'atténuation (temporel ou spatial), et sous la forme e^{-x^2} dès qu'on réalise des statistiques... Nous laissons au lecteur les études et représentations graphiques des fonctions fondamentales $\ln x$, e^x , e^{-x} et e^{-x^2} .

A.1.3 Fonctions trigonométriques

La figure A.1 représente la position d'un point M . On peut associer à ce point un couple de coordonnées cartésiennes x et y , ou un couple de coordonnées polaires ρ et ϕ . L'angle ϕ est un angle orienté, le sens positif, indiqué sur la figure, est le sens trigonométrique, le sens inverse des aiguilles d'une montre.

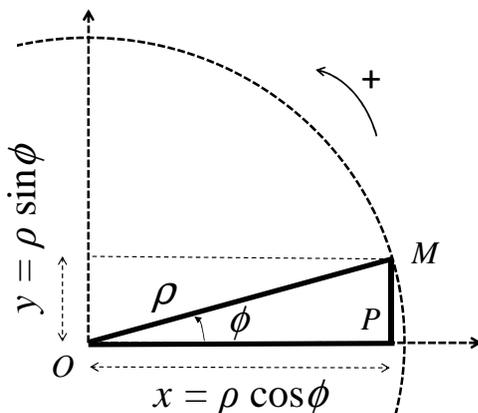


FIGURE A.1 – Définitions des fonctions sinus et cosinus

Dans le triangle rectangle OMP on relie chaque variable à un côté : $OM = \rho$ est l'hypoténuse, $OP = x$ est le côté adjacent et $PM = y$ est le côté opposé. On définit les fonctions trigonométrique cosinus et sinus :

$$\boxed{\cos \phi = \frac{x}{\rho} = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin \phi = \frac{y}{\rho} = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}}}$$

Le théorème de Pythagore implique :

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{et} \quad \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

On définit aussi la tangente : $\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$, et la cotangente : $\cotan \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$.

Ces fonctions sont périodiques, la période vaut 2π pour les fonctions $\sin \phi$ et $\cos \phi$ mais ne vaut que π pour les fonctions $\tan \phi$ et $\cotan \phi$. Les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sont données sur le figure A.2.

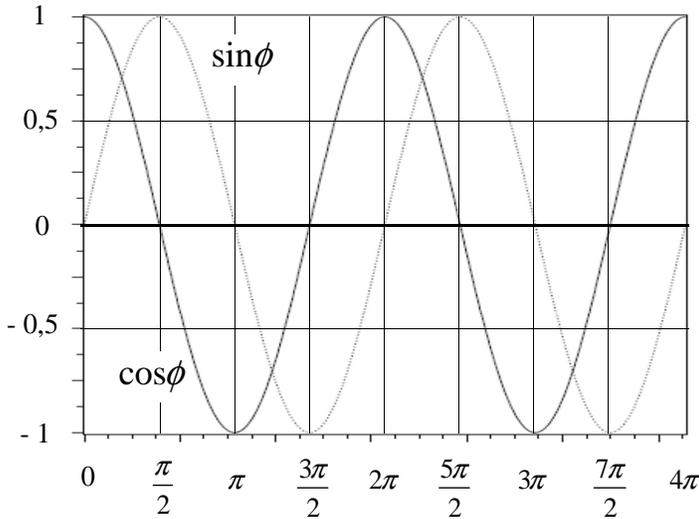


FIGURE A.2 – Fonctions sinus et cosinus sur deux périodes

De ces définitions on peut démontrer les propriétés suivantes.

- Relations entre angles différents :

$\phi + 2k\pi \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \phi$:	$\cos(\phi + 2k\pi) = \cos \phi$	et	$\sin(\phi + 2k\pi) = \sin \phi$
$-\phi \longrightarrow \phi$:	$\cos(-\phi) = +\cos \phi$	et	$\sin(-\phi) = -\sin \phi$
$\pi + \phi \longrightarrow \phi$:	$\cos(\pi + \phi) = -\cos \phi$	et	$\sin(\pi + \phi) = -\sin \phi$
$\pi - \phi \longrightarrow \phi$:	$\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$	et	$\sin(\pi - \phi) = +\sin \phi$
$\frac{\pi}{2} + \phi \longrightarrow \phi$:	$\cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = -\sin \phi$	et	$\sin(\frac{\pi}{2} + \phi) = +\cos \phi$
$\frac{\pi}{2} - \phi \longrightarrow \phi$:	$\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = +\sin \phi$	et	$\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = +\cos \phi$

- Sommes et différences

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \text{et} & & \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b & \text{et} & & \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \text{et} \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$$

- Valeurs remarquables :

$\theta(^{\circ})$	0	30	45	60	90	180
$\theta(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

- Autre formule utile : $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$

A.2 Nombres complexes

Le nombre complexe de base, ou nombre imaginaire, se note i et est tel que

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Tout nombre complexe z peut être écrit sous la forme cartésienne $z = x + iy$ ou sous la forme polaire $z = \rho e^{i\phi}$. $x = \mathcal{Re}(z)$ est la partie réelle de z , $y = \mathcal{Im}(z)$ est la partie imaginaire de z , $\rho = |z|$ se nomme le module de z et $\phi = \mathcal{Arg}(z)$ est l'argument de z . Le conjugué \bar{z} de z est tel que $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\phi}$.

Il est pratique d'avoir une représentation géométrique des nombres complexes. On peut associer au point M de la figure A.1 le nombre complexe z où l'axe des abscisses est appelé axe des réels et l'axe des ordonnées est l'axe des imaginaires.

L'ensemble de ces définitions permettent de démontrer les relations suivantes :

$$z\bar{z} = |z|^2 = \rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{Arg}(z) = \phi = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{\mathcal{Im}(z)}{\mathcal{Re}(z)}$$

ainsi que les formules d'Euler :

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi} \quad \Rightarrow \quad \cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$

Prenez quelques instants pour tenter de mesurer toute la profondeur de la relation relativement simple

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

faisant intervenir les cinq premiers « nombres magiques » des mathématiques : les entiers très particuliers 0 et 1 (à la base de l'arithmétique), les réels $\pi = 3,14159\dots$ (à la base de la géométrie) et $e = 2,71828\dots$ (essentiel en analyse), et le nombre imaginaire i (tel que $i^2 = -1$, essentiel en algèbre)...

A.3 Dérivées, différentielles et intégrales

A.3.1 Dérivées et différentielles

La dérivée d'une fonction $f(x)$ peut être soit un nombre soit une fonction. La dérivée en un point x_0 est un nombre, noté $f'(x_0)$, représentant la pente de la tangente à la courbe de la fonction $f(x)$ en ce point. La fonction dérivée $f'(x)$ donne l'ensemble des pentes des tangentes de $f(x)$ pour toutes les valeurs de x . Le signe de la dérivée indique donc si la fonction est croissante ou décroissante. La définition algébrique de la dérivée est la suivante :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} \quad (\text{A.1})$$

où $\Delta x = x_2 - x_1$ est la variation de la variable x entre les points M_1 et M_2 , $\Delta f = f_2 - f_1$ est la variation de la fonction f entre ces mêmes points. Les différentielles dx et df correspondent à ces variations lorsque M_1 et M_2 sont infiniment proches¹ :

$$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} (x_2 - x_1) \quad \text{et} \quad df = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{f_2 \rightarrow f_1} (f_2 - f_1)$$

Lorsque la fonction n'a qu'une variable, la dérivée peut être vue comme un rapport de différentielles. Cette correspondance est modifiée s'il y a plusieurs variables, ceci sera vu dans la dernière section de cette annexe.

À partir de la définition de la dérivée donnée par l'éq.(A.1) on peut démontrer les expressions des dérivées des fonctions usuelles :

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad ; \quad (e^x)' = e^x \quad ; \quad (\ln x)' = 1/x$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad ; \quad (\cos x)' = -\sin x$$

Cependant la portée de ces formules est très limitée car, en général, l'argument de la fonction à dériver est différent de la seule variable x . Les formules à retenir sont celles des dérivées des fonctions composées que nous appellerons « dérivées fonctionnelles » dans la suite. Une fonction composée est défini par l'opération successive de deux fonctions $f(x) = f(g(x)) = f \circ g(x)$, dont la dérivée est :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) g'(x) = [f' \circ g(x)] g'(x)$$

Cette formule abstraite permet de démontrer les expressions des dérivées des fonctions composées, qu'il faut connaître absolument :

Dérivées fonctionnelles

$$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f' \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad ; \quad (e^f)' = f' e^f \quad ; \quad (\ln f)' = f'/f$$

$$(\sin f)' = f' \cos f \quad ; \quad (\cos f)' = -f' \sin f$$

1. On définit ici une différentielle comme une quantité infinitésimale, pour une définition plus rigoureuse des différentielles voir un cours d'analyse mathématique.

Ces formules sont directement reliées aux propriétés des différentielles des fonctions usuelles que nous utilisons tout au long de ce livre. On obtient les mêmes formules pour les différentielles en remplaçant simplement le sigle « prime » par le symbole « d ». Rigoureusement, le sigle prime correspond à l'opérateur différentiel « dérivée par rapport à l'unique variable x » : $' = \frac{d}{dx}$, ou de façon analogue $df = f'dx$.

Prenons l'exemple de la fonction puissance :

$$\frac{d(f^\alpha)}{dx} = (f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f' = \alpha f^{\alpha-1} \frac{df}{dx} \quad \Rightarrow \quad d(f^\alpha) = \alpha f^{\alpha-1} df$$

La dernière égalité étant obtenue par la simple suppression du terme dx . *En fait, les formules pour les différentielles sont bien plus générales que les formules des dérivées, car elles restent valables quel que soit le nombre de variables intervenant dans la fonction f .* Les formules suivantes sont donc à retenir :

Différentielles des fonctions usuelles (A.2)

$$d(f^\alpha) = \alpha f^{\alpha-1} df \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad ; \quad d(e^f) = df e^f \quad ; \quad d(\ln f) = df / f$$

$$d(\sin f) = df \cos f \quad ; \quad d(\cos f) = -df \sin f$$

Les dernières formules à connaître concernent les opérations sur les dérivées, ou de façon équivalente, sur les différentielles :

Opérations sur les dérivées / différentielles

$$(kf)' = k f' \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \longleftrightarrow \quad d(kf) = k df \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(f + g)' = f' + g' \quad \longleftrightarrow \quad d(f + g) = df + dg$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \longleftrightarrow \quad d(fg) = g df + f dg$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \longleftrightarrow \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

A.3.2 Intégrales

L'intégrale d'une fonction $f(x)$ peut être soit un nombre soit une fonction. Une *intégrale définie* est un nombre, noté I , représentant l'aire délimité par la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ et par l'axe des x , entre deux valeurs de x , notées a et b , appelées bornes d'intégrations. On note $I = \int_a^b f(x) dx$.

Une *intégrale indéfinie* est une fonction, notée $F(x)$, appelée primitive de $f(x)$ et telle que $F'(x) = f(x)$. On note $F(x) = \int f(x) dx$. Ces deux définitions sont reliées quand on calcule une intégrale définie :

$$I = \int_a^b f(x) dx = \Delta F = F(b) - F(a)$$

Comme la dérivée d'une constante est nulle, les primitives sont définies à une constante près, qu'on nomme constante d'intégration. En physique, les conditions initiales ou les conditions limites du problème, permettent de fixer les constantes d'intégrations.

L'intégration est donc l'opération « réciproque » de la dérivation. Si on connaît les formules de dérivation, alors on peut déduire facilement les formules d'intégration. Pour les fonctions usuelles on a :

$\begin{aligned} \int f' f^\alpha dx &= \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} - -1) \quad ; \quad \int \frac{f'}{f} dx = \ln f + c \\ \int f' e^f dx &= e^f + c \quad ; \quad \int f' \ln f dx = f \ln f - f + c \\ \int f' \sin f dx &= -\cos f + c \quad ; \quad \int f' \cos f dx = \sin f + c \end{aligned}$	(A.3)
---	-------

où c est une constante d'intégration. La relation entre intégrale et différentielle est beaucoup plus simple, on a directement

$$\boxed{\int df = f + c}$$

À partir des différentielles données par les équations (A.2), ou des primitives usuelles des équations (A.3) en réalisant que $df = f' dx$, la relation précédente fournit les formules :

$$\begin{aligned} \int \alpha f^{\alpha-1} df &= \int d(f^\alpha) = f^\alpha + c \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*) \quad ; \quad \int \frac{df}{f} = \int d(\ln f) = \ln f + c \\ \int e^f df &= \int d(e^f) = e^f + c \quad ; \quad \int \ln f df = f \ln f - f + c \\ \int -\sin f df &= \int d(\cos f) = \cos f + c \quad ; \quad \int \cos f df = \int d(\sin f) = \sin f + c \end{aligned}$$

La définition de l'intégrale donne les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \quad ; \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b f(x) g'(x) dx &= [f(x)g(x)] \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx \quad (\text{intégration par parties}) \end{aligned}$$

A.4 Vecteurs

Un vecteur possède intrinsèquement trois informations : taille (norme), direction et sens. Un repère d'espace, ou système de coordonnées, nécessite de définir une origine, appelée O et une base qui est un ensemble de vecteurs unitaires permettant de repérer n'importe quel point de l'espace. Il faut autant de vecteurs unitaires qu'il y a de dimensions dans l'espace, nous les noterons \vec{u}_x , \vec{u}_y , \vec{u}_z . Par simplicité, nous choisissons une base « orthonormée directe » : les vecteurs unitaires sont perpendiculaires entre eux, on les associe à trois axes perpendiculaires notés x , y et z , et leurs sens sont tels qu'ils obéissent à la règle « des trois doigts » : le triplet $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forme un trièdre direct.

À partir de ces définitions on peut alors exprimer de manière algébrique les vecteurs de l'espace :

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

et les trois nombres (x, y, z) sont appelés coordonnées du vecteur \vec{r} . Si un point M a pour coordonnées le même ensemble (x, y, z) de nombres, alors la position du point M peut être associée au vecteur

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z = (x; y; z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où on a utilisé trois notations différentes mais équivalentes du vecteur \vec{r} , la notation algébrique en terme des vecteurs unitaires, la notation ligne et la notation colonne. Avec ces notations, les vecteurs unitaires ont pour coordonnées $\vec{u}_x = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_y = (0; 1; 0)$ et $\vec{u}_z = (0; 0; 1)$.

On peut construire un vecteur à partir de deux points :

$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Soit deux vecteurs $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{r}' = (x', y', z')$. On peut effectuer plusieurs opérations sur ces vecteurs :

- Norme : $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$

- Somme et multiplication par un scalaire :

$$a \vec{r} + b \vec{r}' = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bx' \\ ay + by' \\ az + bz' \end{pmatrix}$$

- Produit scalaire : $\vec{r} \cdot \vec{r}' = \|\vec{r}\| \|\vec{r}'\| \cos(\widehat{\vec{r}, \vec{r}'}) = xx' + yy' + zz'$

- Produit vectoriel : $\vec{r} \wedge \vec{r}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

$$\|\vec{r} \wedge \vec{r}'\| = \|\vec{r}\| \|\vec{r}'\| |\sin(\widehat{\vec{r}, \vec{r}'})|$$

A.5 Développements limités

La formule de Taylor permet de donner une approximation en un point x_0 de toute fonction $f(x)$ sous la forme d'un polynôme :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n$$

où $f^{(n)}(x_0)$ est la dérivée n -ième évaluée en x_0 et R_n est un reste d'ordre $(x - x_0)^{n+1}$ tendant vers 0 quand x tend vers x_0 .

À partir de cette formule, on peut montrer que les fonctions usuelles admettent les développements limités suivants :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$$

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-(n-1))}{n!}x^n$$

Le reste R_n a été négligé. Ces développements en série sont particulièrement utiles au voisinage de $x = 0$. On les obtient sans difficultés à partir de la formule de Taylor pour $x_0 = 0$. Cependant, on peut montrer que ces expressions sont valables non seulement pour $x \simeq x_0 = 0$ mais aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, et même $\forall x \in \mathbb{C}$, sauf pour les fonctions $\ln(1 + x)$ et $1/(1 - x)$ où les formules données ne sont valables que si $-1 < x < 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ (pas de restriction pour $x \in \mathbb{C}$).

A.6 Différentielles, opérateurs différentiels

A.6.1 Différentielles des fonctions à plusieurs variables

En physique, la plupart des quantités que l'on manipule sont des fonctions à plusieurs variables. Ce qu'on appelle « un champ » est une grandeur qui dépend de l'espace et du temps, $f = f(\vec{r}, t) = f(x, y, z, t) = f(\rho, \phi, z, t) = \dots$. Cette grandeur, le champ, peut être un scalaire ou un vecteur, dans ce dernier cas on parle de « champ vectoriel ». Les champs électriques et magnétiques sont des exemples de champs vectoriels².

Si la fonction f possède plusieurs variables, $f = f(x, y)$, il faut généraliser la plupart des définitions qui précèdent. On se limite dans cette section aux fonctions à deux variables pour alléger les formules, mais le principe est identique quel que soit le nombre de variables.

La dérivée est remplacée par la notion de « dérivée partielle », notée par exemple $\partial f / \partial x$, où l'on considère que les autres variables sont fixées. On limite l'étude de la fonction multidimensionnelle f au sous-espace associé à la variable dont on calcule la dérivée partielle. L'interprétation en terme de pente de la tangente peut être conservée mais se limite à ce sous-espace, qui n'est pas forcément facile à visualiser. Techniquement, toutes les formules vues pour les dérivées s'appliquent aux dérivées partielles, il n'y a donc aucune difficulté particulière à ce niveau là.

La différentielle de la fonction f prend une forme plus générale et est exprimée directement en fonction des dérivées partielles :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

On nomme aussi cette quantité « différentielle totale » afin de sous-entendre qu'elle résulte de la somme des accroissements associés à chaque variable qui la compose.

Si la fonction à plusieurs variables est de nature vectorielle, $f(x, y) \rightarrow \vec{E}(x, y)$, chaque composante de \vec{E} est une fonction scalaire à plusieurs variables. Les propriétés d'associativité et de distributivité de l'opérateur différentiel d permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(x, y) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y = E_x(x, y) \vec{u}_x + E_y(x, y) \vec{u}_y \\ \Rightarrow d\vec{E} &= dE_x \vec{u}_x + E_x d\vec{u}_x + dE_y \vec{u}_y + E_y d\vec{u}_y \quad \text{cas cartésien} = dE_x \vec{u}_x + dE_y \vec{u}_y \\ \Rightarrow d\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} dx + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} dx + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Le vecteur de ce type que nous utilisons couramment en physique est le vecteur déplacement différentiel $d\vec{r}$, à la base des divers systèmes de coordonnées et de la définition de la vitesse.

2. En fait, un champ est un objet physique et mathématique bien plus compliqué que cela : il possède un nombre infini de degré de liberté et il peut être associé à un tenseur, structure qui généralise la notion de vecteur, mais ceci est une autre histoire...

A.6.2 Opérateurs différentiels

• Gradient

On définit le gradient d'une fonction scalaire f par la relation :

$$\boxed{df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{r}}$$

On obtient les composantes du gradient en explicitant $d\vec{r}$ dans le système de coordonnées choisi. Dans le système cartésien :

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z \Rightarrow \\ df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= (\text{grad } f)_x dx + (\text{grad } f)_y dy + (\text{grad } f)_z dz \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

L'apparente simplicité du cas cartésien ne permet pas de saisir la subtilité du calcul. En coordonnées cylindriques le calcul relativement simple donne un résultat moins évident :

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z \Rightarrow \\ df &= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= (\text{grad } f)_\rho d\rho + (\text{grad } f)_\phi \rho d\phi + (\text{grad } f)_z dz \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}; \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}; \frac{\partial f}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques, le principe du calcul reste le même mais le résultat devient suffisamment compliqué pour ne plus pouvoir être retenu simplement :

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi \Rightarrow \\ df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi \\ &= (\text{grad } f)_r dr + (\text{grad } f)_\theta r d\theta + (\text{grad } f)_\phi r \sin \theta d\phi \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}; \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \end{aligned}$$

• Nabla

On déduit les composantes de l'opérateur différentiel vectoriel nabla à partir de l'expression du gradient car $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f)$:

$$\text{Cas cartésien : } \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Cas cylindrique : } \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}; \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Cas sphérique : } \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}; \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.6})$$

• Divergence

On définit l'opérateur différentiel « divergence » par la relation :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}$$

Cet opérateur s'applique à un champ de vecteur et fournit un nombre. Les composantes de l'opérateur divergence s'obtiennent directement en utilisant l'expression de l'opérateur nabla dans le système de coordonnées choisi.

Cependant, il faut faire attention dans les systèmes où les vecteurs unitaires sont mobiles car l'opérateur nabla agit aussi sur les vecteurs unitaires intervenant dans l'expression de \vec{E} . Pour cette raison dans l'écriture algébrique en ligne de l'opérateur nabla on positionne le vecteur unitaire avant l'opérateur dérivée partielle. Dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left(\vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z) \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Dans le système cylindrique :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left(\vec{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{u}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_\rho \vec{u}_\rho + E_\phi \vec{u}_\phi + E_z \vec{u}_z) \\ &= \vec{u}_\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (E_\rho \vec{u}_\rho + E_\phi \vec{u}_\phi + E_z \vec{u}_z) \\ &\quad + \vec{u}_\phi \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\rho \vec{u}_\rho + E_\phi \vec{u}_\phi + E_z \vec{u}_z) \\ &\quad + \vec{u}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (E_\rho \vec{u}_\rho + E_\phi \vec{u}_\phi + E_z \vec{u}_z) \\ &= \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} (\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\rho) + \text{termes nuls} \\ &\quad + \vec{u}_\phi \cdot \left[\frac{E_\rho}{\rho} \frac{\partial \vec{u}_\rho}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \vec{u}_\phi \right] + \text{termes nuls} \\ &\quad + \frac{\partial E_z}{\partial z} (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z) + \text{termes nuls} \\ &= \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Les termes nuls mentionnés dans une étape intermédiaire du calcul correspondent soit au produit scalaire entre deux vecteurs unitaires orthogonaux, soit au fait que les vecteurs unitaires \vec{u}_ρ et \vec{u}_ϕ ne dépendent que de la variable ϕ et que \vec{u}_z est fixe.

Les formules qui suivent sont données sans démonstration. Néanmoins, l'exemple détaillé précédent doit vous permettre de réussir ces démonstrations.

Pour le système sphérique on trouve :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(E_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.7})$$

• **Rotationnel**

On définit l'opérateur différentiel « rotationnel » par la relation :

$$\boxed{\vec{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}}$$

Cet opérateur s'applique à un champ de vecteur et fournit un vecteur. Comme précédemment on obtient les composantes du rotationnel en utilisant l'expression de l'opérateur nabla dans le système de coordonnées choisi et en faisant attention à dériver correctement les vecteurs unitaires mobiles.

$$\text{Cas cartésien : } \vec{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Cas cylindrique : } \vec{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix}$$

$$\text{Cas sphérique : } \vec{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(E_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\phi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

• **Applications**

L'annexe C donne des exemples d'utilisations des formules du gradient et du rotationnel pour démontrer qu'un champ de force est conservatif ou non, et pour déterminer l'énergie potentielle associée dans le cas conservatif. L'annexe F montre un exemple de calcul de divergence portant sur la gravitation et amenant à l'équation de Poisson. Ici nous donnons une rapide illustration des rotationnels et des divergences appliquées mouvement circulaire et uniforme.

Soit un disque en rotation uniforme ($\omega = \text{cste}$). Nous avons montré dans le chapitre 2 que les quantités cinématiques, position \vec{r} , vitesse \vec{v} et accélération

\vec{a} , d'un point quelconque du disque dépendent de sa position par rapport au centre de rotation (voir exercices C2.4, cas cartésien, et C2.6, cas polaire). Si on considère l'ensemble des points du disque on peut voir ces quantités cinématiques comme des « champs » vectoriels : les champs des positions, des vitesses et des accélérations. La quantité cinématique est associée à un point, le champ à l'ensemble des points du système. Bien que les expressions mathématiques soient identiques, l'interprétation ne l'est pas.

Ces champs dépendent de trois variables, (x, y, z) dans le système cartésien ou (ρ, ϕ, z) dans le système polaire. Le mouvement ayant lieu dans un plan, la variable z est nulle pour tous les points du disque. Les figures A.3a,b,c représentent ces trois champs pour quelques points du disques. Calculons le rotationnel et la divergence de ces champs vectoriels dans chaque système de coordonnées afin de vérifier que les résultats ne dépendent pas de ce choix, et de trouver une interprétation physique de ces deux opérateurs différentiels.

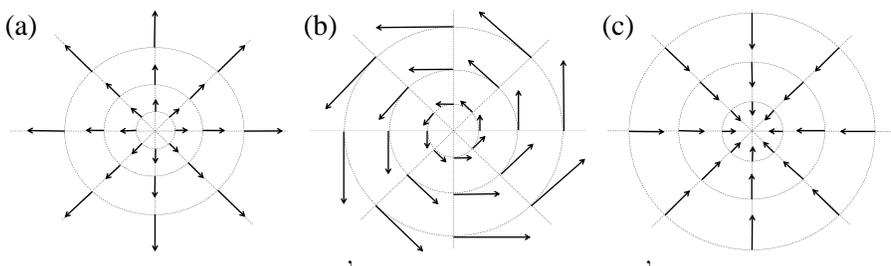


FIGURE A.3 – Mouvement circulaire et uniforme : (a) champ des positions ; (b) champ des vitesses ; (c) champ des accélérations

Champ des positions :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x = x \\ r_y = y \\ r_z = z = 0 \end{pmatrix}_{cart} = \begin{pmatrix} r_\rho = \rho \\ r_\phi = 0 \\ r_z = z = 0 \end{pmatrix}_{pol} \Rightarrow \begin{cases} \text{div}(\vec{r}) = 2 \\ \text{rot}(\vec{r}) = \vec{0} \end{cases}$$

Champ des vitesses :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = -y\omega \\ v_y = x\omega \\ v_z = 0 \end{pmatrix}_{cart} = \begin{pmatrix} v_\rho = 0 \\ v_\phi = \rho\omega \\ v_z = 0 \end{pmatrix}_{pol}$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix}_{cart} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \frac{1}{\rho} [2\rho\omega - 0] \end{pmatrix}_{pol} = 2\omega\vec{u}_z = 2\vec{\omega}$$

Champ des accélérations :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = -\omega^2 x \\ a_y = -\omega^2 y \\ a_z = 0 \end{pmatrix}_{cart} = \begin{pmatrix} a_\rho = -\omega^2 \rho \\ a_\phi = 0 \\ a_z = 0 \end{pmatrix}_{pol} \Rightarrow \begin{cases} \text{div}(\vec{a}) = -2\omega^2 \\ \text{rot}(\vec{a}) = \vec{0} \end{cases}$$

Annexe B

Équations différentielles linéaires, du second ordre et à coefficients constants

B.1 Définitions

- **Équation différentielle** : équation qui relie une fonction à ses dérivées.

Exemple¹ : soit t la variable de la fonction $x : x \equiv x(t)$. $x^{(n)} = d^n x/dt^n$ est la dérivée d'ordre n . On utilise des indices simplifiés pour les dérivées d'ordre 1 ($x' = x^{(1)} = dx/dt$) et d'ordre 2 ($x'' = x^{(2)} = d^2x/dt^2$).² Une équation différentielle générale peut donc s'écrire :

$$g(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}, \dots) = 0$$

où g est une fonction quelconque de la variable, de la fonction inconnue et de ses dérivées (par rapport à la variable).

- **Ordre** : c'est le niveau n de la plus haute dérivée.

Exemple : une équation différentielle d'ordre 2 est une équation faisant intervenir au maximum la dérivée seconde x'' de la fonction inconnue $x(t)$ que l'on cherche à déterminer.

- **Linéaire** : une équation différentielle est dite linéaire si il n'y a aucun produit entre la fonction et ses dérivées et les dérivées entre elles. En d'autres mots, chaque fonction $x, x' \dots x^{(n)}$, à une puissance égale à 0 ou 1.

Exemple : $x'' + 3x'x' - (5t - 2)x^2 + 3t - 2 = 0$ est une équation différentielle non-linéaire. Lorsque l'équation différentielle est non-linéaire, en général, il faut effectuer une résolution numérique car il n'y a pas d'expression « analytique » pour les solutions qui sont fortement dépendantes des conditions initiales du problème. Les « systèmes dynamiques » et la « théorie du chaos » sont les domaines de la physique et des mathématiques qui s'intéressent à ce genre d'équations. « Effet papillon » : une infime variation des conditions initiales amène à une solution radicalement différente.

- **Coefficients constants** : Dans l'équation différentielle, x et ses dérivées sont précédées par des nombres uniquement.

Exemple : $ax'' + bx' + cx = f(t)$ est une équation différentielle linéaire, du

1. Les noms des variables et des fonctions n'a aucune importance. On a choisi t comme variable car en physique le temps l'est souvent mais pas toujours ! Vous devez être capable de faire la distinction entre la « structure » de l'équation et les symboles utilisés pour représenter cette structure. En d'autres mots, vous devez être capable de remplacer les noms des variables et des fonctions.

2. En physique, t symbolise le temps et on note alors $x' = \dot{x}$ et $x'' = \ddot{x}$. Dans cette annexe mathématique, t est une variable quelconque, nous n'utiliserons donc pas la notation avec des points.

second ordre et à coefficients constants si a , b et c ne sont pas dépendantes de la variable t , c'est-à-dire si ce sont des nombres.

- **Homogène/Inhomogène** : L'équation différentielle est dite homogène si $f(t) = 0$, inhomogène dans le cas contraire.

Dans cette annexe les équations différentielles traitées sont linéaires et à coefficients constants, du premier ou du second ordre, car il existe une méthodologie générale que nous vous présentons à présent. Nous limitons notre étude au cas où la fonction $f(t)$ est un polynôme. Les résultats vous ont été indiqués dans le formulaire, mais il est indispensable que vous sachiez faire le raisonnement et les calculs. Une simple application des formules ne suffit pas.

Les propriétés fondamentales des équations différentielles linéaires à coefficients constants sont que :

- La forme de l'équation différentielle fixe la forme de la solution homogène,
- La forme du second membre fixe la forme de la solution particulière,
- Les conditions initiales fixent les constantes d'intégration.

B.2 Équations différentielles du premier ordre

B.2.1 Méthode générale

Les équations différentielles du premier ordre (linéaires et à coefficients constants) inhomogènes ont la forme générale suivante :

$$\boxed{bx' + cx = f(t)} \quad (\text{B.1})$$

La résolution de cette équation afin de déterminer la fonction inconnue $x(t)$ se fait en quatre étapes :

- **Étape 1** – Calcul de la solution homogène $x_h(t)$.
- **Étape 2** – Calcul de la solution particulière $x_p(t)$.
- **Étape 3** – Construction de la solution générale $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.
- **Étape 4** – Étude de la condition initiale, ou d'une condition limite, afin de déterminer la constante d'intégration.

Si $f(t) = 0$, c-à-d si l'équation différentielle est homogène, seules les étapes 1 et 4 sont à réaliser ($x_p = 0$ et $x = x_h$).

• Étape 1 – Solution homogène

La solution homogène $x_h(t)$ est la solution de l'équation différentielle homogène obtenue en posant $f(t) = 0$:

$$bx'_h + cx_h = 0 \quad (\text{B.2})$$

La seule fonction que l'on connaisse qui est proportionnelle à sa dérivée, est la fonction exponentielle. En effet, le cas particulier $b = 1$ et $c = -1$ implique $x'_h = x_h$ dont la solution est $x_h(t) = Ke^t$, où K est une constante d'intégration. (C'est une définition de la fonction exponentielle, mais on peut aussi faire le calcul : $x'_h = dx_h/dt = x_h \Rightarrow dx_h/x_h = dt \Rightarrow \int dx_h/x_h = \int dt \Rightarrow \ln(x_h) = t + c_I$ ($x_h > 0$) $\Rightarrow x_h = Ke^t$ avec $K = e^{c_I}$).

Lorsque b et c sont quelconques, le plus simple est de poser que $x_h(t) = Ke^{rt}$ où r est la racine du « polynôme caractéristique » que l'on obtient ainsi : $x_h(t) = Ke^{rt} \Rightarrow x'_h(t) = Kre^{rt}$, on injecte ces expressions dans l'équation homogène (B.2) ce qui donne :

$$bKr e^{rt} + cK e^{rt} = 0 \Rightarrow \boxed{br + c = 0 : \text{polynôme caractéristique}}$$

On en déduit la racine $r = -c/b$ fournissant la solution homogène :

$$\boxed{x_h(t) = K e^{-\frac{c}{b}t}} \quad (\text{B.3})$$

La forme de la solution homogène est directement reliée à la forme de l'équation différentielle de départ. Cette équation différentielle étant du premier ordre, il n'y a qu'une seule constante d'intégration. Il ne faut surtout pas la calculer maintenant car la condition initiale correspond à la solution générale et non à la solution homogène (*attention, c'est une erreur très fréquente!*)

Remarques :

- Le passage du polynôme caractéristique à la racine $r = -c/b$ nécessite que $b \neq 0$. C'est normal, car si $b = 0$, les équations (B.1) et (B.2), ne sont pas des équations différentielles! $x = f(t)/c$ n'est pas une fonction inconnue.
- Si $c = 0$, on voit que $x_h(t) = K$ mais surtout que l'équation différentielle est très simple, l'éq.(B.1) devient : $bx' = f(t)$ dont la solution est $x = F(t)/b + c_I$ où $F(t)$ est la primitive de $f(t)$ et c_I une constante d'intégration. Il n'y a pas besoin d'introduire les notions de solutions homogène et particulière! C'est ce qui a été fait en début de semestre pour les études cinématiques et en particulier pour la balistique.
- Si $c \neq 0$ et $b \neq 0$ les seules solutions possibles d'une équation différentielle du premier ordre sont soit une exponentielle croissante ($-c/b > 0$), soit une exponentielle décroissante ($-c/b < 0$).

• Étape 2 – Solution particulière

La solution particulière $x_p(t)$ est une solution de l'équation différentielle inhomogène de départ (éq.(B.1)). La méthode la plus simple permettant de la trouver est la « méthode des coefficients indéterminés » mais elle ne fonctionne qu'à la condition que $f(t)$ soit un polynôme³. Il existe une autre méthode, plus générale, appelée « variation des constantes », qui fonctionne encore même si les coefficients ne sont pas constants.

3. Elle marche encore si $f(t)$ est un polynôme $g(t)$ fois une exponentielle $e^{\gamma t}$ (c-à-d $f(t) = g(t)e^{\gamma t}$), alors on pose $x(t) = y(t)e^{\gamma t}$ afin d'obtenir une équation différentielle en y qui se ramène au cas précédent.

→ **Méthode des coefficients indéterminés (méthode conseillée)**

On pose que $x_p(t)$ est un polynôme de même degré que la fonction polynôme $f(t)$. Si p est le degré de $f(t)$ alors on pose que :

$$x_p(t) = k_0 + k_1t + k_2t^2 \dots + k_pt^p \Rightarrow x'_p(t) = k_1 + 2k_2t + \dots + pk_pt^{p-1}$$

On injecte alors ces expressions dans l'équation inhomogène (B.1) puis on identifie chaque terme associé aux puissances différentes de t . On obtient un système de $p + 1$ équations à $p + 1$ inconnues, on en déduit les k_i et ainsi $x_p(t)$.

Les exemples donnés en fin de section vous aideront à mieux comprendre.

→ **Méthode de la variation des constantes**

On suppose que la constante obtenue dans l'expression de la solution homogène, n'est pas une constante mais une fonction de la variable t :

$$x_p(t) = K(t)e^{-\frac{c}{b}t} \Rightarrow x'_p(t) = K'(t)e^{-\frac{c}{b}t} - \frac{c}{b}K(t)e^{-\frac{c}{b}t}$$

On injecte alors ces expressions dans l'équation inhomogène (B.1) ce qui donne :

$$bK'e^{-\frac{c}{b}t} = f(t) \Rightarrow K(t) = \int \frac{f(t)}{b} e^{\frac{c}{b}t} dt$$

Si $f(t)$ est un polynôme, l'intégrale est calculable analytiquement, en général à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par partie. C'est à cause de cette difficulté technique que nous vous conseillons d'utiliser la méthode des coefficients indéterminés.

• **Étape 3 – Construction de la solution générale**

C'est l'étape la plus simple, il suffit d'additionner les deux termes précédents :

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

• **Étape 4 – Constante d'intégration**

On détermine la constante K de l'équation (B.3) grâce à une condition initiale ou à une condition limite.

B.2.2 Exemples

• **Exemple 1** – Trouver les solutions de l'équation différentielle $x' - 2x = 1$ sachant que $x(0) = 0$.

Réponse

1 - *Solution homogène* : l'équation homogène est $x'_h - 2x_h = 0$. On pose $x_h(t) = Ke^{rt} \Rightarrow x'_h(t) = Kre^{rt}$, on injecte ces expressions dans l'équation homogène $\Rightarrow Kre^{rt} - 2Ke^{rt} = 0 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow x_h(t) = Ke^{2t}$.

2 - *Solution particulière* : on a $f(t) = 1$, donc x_p est une constante. Posons $x_p = k_0$ d'où $x'_p = 0 \Rightarrow -2k_0 = 1 \Rightarrow x_p = k_0 = -\frac{1}{2}$.

3 - *Solution générale* : $x(t) = x_h + x_p = Ke^{2t} - \frac{1}{2}$

4 - *Constante d'intégration* : $x(0) = 0 \Rightarrow K - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

La solution est donc $x(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)$.

• **Exemple 2** - Trouver les solutions de l'équation différentielle $x' - 2x = 4t + 1$ sachant que $x(0) = 0$.

Réponse

1 - *Solution homogène* : idem cas précédent $x_h(t) = Ke^{2t}$.

2 - *Solution particulière* : On a $f(t) = 4t + 1$, c'est un polynôme de degré 1, donc x_p est un polynôme de même degré. Posons $x_p = k_0 + k_1t$ d'où $x'_p = k_1$. On injecte ces expressions dans l'équation différentielle, ce qui donne :

$$k_1 - 2k_0 - 2k_1t = 1 + 4t \Rightarrow \begin{pmatrix} -2k_1 = 4 & (\text{terme en } t) \\ k_1 - 2k_0 = 1 & (\text{constante}) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 = -2 \\ k_0 = -3/2 \end{pmatrix}$$

Donc la solution particulière vaut $x_p(t) = -2t - 3/2$.

3 - *Solution générale* : $x(t) = x_h + x_p = Ke^{2t} - 2t - 3/2$

4 - *Constante d'intégration* : $x(0) = 0 \Rightarrow K - 3/2 = 0 \Rightarrow K = 3/2$

La solution est donc $x(t) = 3(e^{2t} - 1)/2 - 2t$.

B.2.3 Méthode des variables séparables

Si le membre de droite de l'éq.(B.1), $f(t)$, est une constante, ou s'il est possible de factoriser l'équation différentielle sous la forme :

$$x' = \frac{dx}{dt} = g(x)h(t)$$

on peut obtenir plus simplement la solution $x(t)$ en réalisant le calcul de deux primitives :

$$x' = \frac{dx}{dt} = g(x)h(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = h(t)dt \Rightarrow \int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t)dt$$

Pour voir comment cela fonctionne, reprenons l'exemple 1 :

$$\begin{aligned} x' - 2x = 1 &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2x + 1 \Rightarrow \frac{dx}{2x + 1} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{2x + 1} = \int dt \\ &\Rightarrow \frac{\ln(2x + 1)}{2} = t + c_I \quad (x > -\frac{1}{2}) \Rightarrow \ln(2x + 1) = 2t + 2c_I \\ &\Rightarrow 2x + 1 = e^{2t + 2c_I} \Rightarrow x = Ke^{2t} - \frac{1}{2} \quad \text{avec } K = \frac{1}{2}e^{2c_I} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

On retrouve bien la solution générale obtenue avec la méthode générale. Avec l'habitude on a tendance à utiliser cette méthode car elle est plus rapide.

• Exemple de la goutte de pluie (C3.4)

Dans l'exercice C3.4 on obtient l'équation différentielle $\dot{v} + \frac{\eta}{m}v = -g$. Il faut isoler les termes en v d'un côté et les termes en t de l'autre :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} - g \quad (\text{avec } \tau = \frac{m}{\eta}) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}(v + g\tau) \\ \Rightarrow \frac{dv}{(v + g\tau)} &= -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int \frac{dv}{(v + g\tau)} = \int -\frac{dt}{\tau} \\ \Rightarrow \ln(v + g\tau) &= -\frac{t}{\tau} + c_I \quad (v > -g\tau) \Rightarrow (v + g\tau) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \\ \Rightarrow v &= Ke^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau \end{aligned}$$

On retrouve simultanément la solution homogène et la solution particulière obtenues par la méthode générale.

• Équation non linéaire

Les frottements visqueux à haute vitesse sont associés à une force en v^2 : $\vec{f} = -bv^2 \vec{u}_T$ où $\vec{u}_T = \vec{v}/\|\vec{v}\|$. Cela implique, par exemple, de remplacer le terme en v dans l'équation différentielle précédente par un terme en v^2 :

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v^2 = -g \quad (\text{B.5})$$

Cette équation différentielle du premier ordre est non linéaire. La solution n'est pas du type exponentielle, donc la méthode générale où on pose une solution homogène de la forme Ke^{rt} ne fonctionne pas. La solution de l'éq.(B.5) fait intervenir la fonction arc-tangente à cause de la présence du second membre. Afin de montrer la puissance de la méthode des variables séparables nous simplifions cet exemple en supprimant le second membre (cela correspond alors à l'exercice E3.11), soit à résoudre l'équation :

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \dot{v} &= \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v^2 \Rightarrow \frac{b}{m}dt = -\frac{dv}{v^2} = d\left(\frac{1}{v}\right) \Rightarrow \int d\left(\frac{1}{v}\right) = \int \frac{b}{m}dt \\ \Rightarrow \frac{1}{v} &= \frac{b}{m}t + k \Rightarrow v(t) = \frac{1}{\frac{b}{m}t + k} \end{aligned}$$

Soit v_0 la vitesse initiale, d'où $v_0 = 1/k$ ce qui donne :

$$v(t) = \frac{1}{\frac{b}{m}t + \frac{1}{v_0}} = \frac{v_0}{\frac{b}{m}v_0t + 1}$$

La solution obtenue $v(t) \approx 1/t$ est bien décroissante mais n'est pas du type exponentiel.

B.3 Équations différentielles du second ordre

Les équations différentielles du second ordre (linéaires et à coefficients constants) inhomogènes ont la forme générale suivante :

$$\boxed{ax'' + bx' + cx = f(t)} \quad (\text{B.6})$$

La résolution de cette équation afin de déterminer la fonction inconnue $x(t)$ se fait en suivant les 4 étapes définies précédemment. Seule la première étape, le calcul de la solution homogène, est plus complexe.

B.3.1 Solution homogène

La solution homogène $x_h(t)$ est la solution de l'équation différentielle homogène obtenue en posant $f(t) = 0$:

$$\boxed{ax_h'' + bx_h' + cx_h = 0} \quad (\text{B.7})$$

À nouveau on suppose que la solution est une fonction exponentielle $x_h(t) = Ke^{rt}$, où K est une constante d'intégration. On peut remarquer dès à présent que la présence d'une dérivée seconde va nécessiter deux intégrations (imaginons que b et c soient nuls comme en balistique) et donc on devrait avoir deux constantes d'intégrations. Elles vont apparaître naturellement : $x_h(t) = Ke^{rt} \Rightarrow x_h'(t) = Kre^{rt} \Rightarrow x_h''(t) = Kr^2e^{rt}$, on injecte ces expressions dans l'équation homogène ce qui donne : $aKr^2e^{rt} + bKr e^{rt} + cK e^{rt} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\text{polynôme caractéristique : } ar^2 + br + c = 0}$$

Le polynôme caractéristique est maintenant de degré 2. Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ détermine trois familles distinctes de solutions.

• **Cas $\Delta > 0 \Rightarrow 2$ racines réelles**

Les racines sont $r_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$ et $r_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$ ce qui nous fournit la solution homogène :

$$\boxed{x_h(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}} \quad (\text{B.8})$$

La forme de la solution homogène est directement reliée à la forme de l'équation différentielle de départ. Il y a bien deux constantes d'intégration qu'il ne faut surtout pas calculer maintenant. Il faut le faire avec la solution générale. On appelle chaque terme « mode », et selon les signes de r_1 et r_2 , on peut avoir deux modes croissants (l'un domine l'autre), deux modes décroissants, ou un croissant et un autre décroissant.

Exemple 3 – Trouver les solutions de l'équation différentielle $x'' - 4x' + 3x = 0$ sachant que $x(0) = 0$ et $x'(0) = 2$.

Réponse

L'équation est homogène : $x \equiv x_h$. On pose $x(t) = Ke^{rt} \Rightarrow x'(t) = Kre^{rt} \Rightarrow x''(t) = Kr^2e^{rt}$, on injecte ces expressions dans l'équation différentielle (homogène) ce qui donne :

$$\begin{aligned} Kr^2 e^{rt} - 4Kr e^{rt} + 3K e^{rt} = 0 &\Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0 \\ \Rightarrow \Delta = 4 > 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 3 &\Rightarrow x(t) = K_1 e^t + K_2 e^{3t} \end{aligned}$$

On calcule alors les constantes d'intégration K_1 et K_2 :

$$\begin{pmatrix} x(0) = K_1 + K_2 = 0 \\ x'(0) = K_1 + 3K_2 = 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} K_1 = -K_2 \\ 2K_2 = 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} K_1 = -1 \\ K_2 = 1 \end{pmatrix}$$

La solution est donc $x(t) = e^{3t} - e^t$. Les deux modes sont croissants.

Si $t > 0$, le terme e^{3t} domine le terme e^t : $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$.

• **Cas $\Delta = 0 \Rightarrow$ une racine réelle (double)**

La racine est $r = -b/2a$ ce qui fournit la solution homogène :

$$x_h(t) = K e^{rt}$$

On constate immédiatement un problème : on n'a qu'une constante d'intégration, ce qui nous suggère que K est en fait une fonction du temps⁴. Posons :

$$\begin{aligned} x_h(t) = K(t) e^{rt} &\Rightarrow x'_h(t) = K' e^{rt} + Kr e^{rt} \\ \Rightarrow x''_h(t) &= K'' e^{rt} + 2K' r e^{rt} + Kr^2 e^{rt} \end{aligned}$$

Injectons ces expressions dans l'éq.(B.7) afin trouver l'expression de $K(t)$:

$$\begin{aligned} aK'' + 2aK'r + aKr^2 + bK' + bKr + cK = 0 &\Rightarrow \\ aK'' + K'(2ar + b) + K(ar^2 + br + c) = 0 &\Rightarrow aK'' = 0 \Rightarrow K'' = 0 \\ \Rightarrow K(t) = K_0 + K_1 t \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété du polynôme caractéristique ($ar^2 + br + c = 0$) et la valeur de la racine ($r = -b/2a \Rightarrow 2ar + b = 0$). On constate donc que $K(t)$ est une fonction linéaire en temps, ce qui est normal si on ne voulait voir apparaître que deux constantes d'intégration. La solution homogène quand $\Delta = 0$ est donc :

$$\boxed{x_h(t) = (K_0 + K_1 t) e^{\frac{-b}{2a} t}} \quad (\text{B.9})$$

Si le coefficient c n'apparaît pas dans la solution homogène, c'est parce qu'il est fixé par la condition $\Delta = 0 \Rightarrow c = b^2/4a$.

Il n'est pas indispensable de démontrer à chaque fois que $K(t) = K_0 + K_1 t$. Il faut se souvenir que c'est l'expression la plus simple avec deux constantes.

4. Une démonstration rigoureuse peut être vue dans un cours de mathématiques. On utilise en fait la méthode de variation des constantes.

Si lors d'un examen vous avez oublié ce résultat ou si vous avez un doute, souvenez-vous de la méthode de la variation des constantes (« les constantes ne sont pas constantes » !) et retrouvez le.

Exemple 4 – Trouver les solutions de l'équation différentielle : $x'' + 4x' + 4x = 0$ sachant que $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

Réponse

L'équation est homogène : $x \equiv x_h$. On pose $x(t) = Ke^{rt} \Rightarrow x'(t) = Kre^{rt} \Rightarrow x''(t) = Kr^2e^{rt}$, on injecte ces expressions dans l'équation différentielle (homogène) ce qui donne :

$$\begin{aligned} Kr^2 e^{rt} + 4Kr e^{rt} + 4K e^{rt} &= 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \\ \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow x(t) &= (K_0 + K_1 t) e^{-2t} \end{aligned}$$

On calcule alors les constantes d'intégration K_0 et K_1 , sachant que $x(t) = (K_0 + K_1 t) e^{-2t} \Rightarrow x'(t) = -2(K_0 + K_1 t) e^{-2t} + K_1 e^{-2t}$, on a :

$$\left(\begin{array}{l} x(0) = K_0 = 1 \\ x'(0) = -2K_0 + K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 2 \end{array} \right) \Rightarrow x(t) = (1 + 2t) e^{-2t}$$

Le terme e^{-2t} domine le terme $2t$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

• **Cas $\Delta < 0 \Rightarrow$ deux racines complexes**

Les racines sont $r_1 = (-b + i\sqrt{-\Delta})/2a$ et $r_2 = (-b - i\sqrt{-\Delta})/2a = \bar{r}_1$ ce qui nous fournit la solution homogène :

$$x_h(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} \quad (\text{B.10})$$

On a deux constantes d'intégration, on est content, mais les arguments des exponentielles ont une partie imaginaire ce qui demande de l'attention :

On sait par la formule d'Euler que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, or dans un problème de physique il est indispensable que la solution de l'équation différentielle soit une fonction réelle : $x_h(t) \in \mathbb{R}$; cela va entraîner des contraintes sur K_1 et K_2 , et en particulier que ce sont des nombres complexes tels que $K_2 = \bar{K}_1$.

La présence d'exponentielles imaginaires indique l'apparition des fonctions « circulaires » cosinus et sinus, et donc une certaine périodicité dans les solutions.

Il existe trois écritures différentes pour la solution homogène. Deux sont plutôt mathématiques :

$$x_h(t) = K e^{r_1 t} + \bar{K} e^{r_2 t} = e^{\alpha t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

et une troisième formulation, qui est la plus utilisée en physique :

$$\boxed{x_h(t) = x_M e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)} \quad (\text{B.11})$$

L'avantage de cette dernière formulation est que l'on peut interpréter directement chaque paramètre de cette expression : x_M est l'amplitude maximale,

ϕ est la phase (ou déphasage), ω est la pulsation ou fréquence angulaire, α est le facteur d'amortissement.

x_M et ϕ dépendent exclusivement des conditions initiales. En revanche, α et ω dépendent directement de la forme de l'équation différentielle (c-à-d des coefficients a , b et c) :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad (\text{B.12})$$

Les racines du polynôme caractéristique sont reliés à α et ω par $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$.

Démonstration et équivalence entre formulations

Posons $r_1 = \alpha + i\omega$, ce qui implique $r_2 = \alpha - i\omega$ et que α et ω sont donnés par les équations (B.12). Injectons ces expressions dans l'éq.(B.10) :

$$\begin{aligned} x_h(t) &= K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} \\ &= K_1 e^{\alpha t} e^{i\omega t} + K_2 e^{\alpha t} e^{-i\omega t} \\ &= e^{\alpha t} (K_1 e^{i\omega t} + K_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{\alpha t} [K_1 \cos(\omega t) + iK_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t) - iK_2 \sin(\omega t)] \\ &= e^{\alpha t} [(K_1 + K_2) \cos(\omega t) + i(K_1 - K_2) \sin(\omega t)] \\ &= e^{\alpha t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

La condition $x_h(t) \in \mathbb{R}$ impose que $(K_1 + K_2)$ soit un nombre réel et que $(K_1 - K_2)$ soit un imaginaire pur⁵. Ces conditions sont satisfaites naturellement si on écrit les nombres complexes K_1 et K_2 sous la forme :

$$K_1 = K = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2} \quad \text{et} \quad K_2 = \bar{K} = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$$

permettant d'obtenir les relations inverses :

$$A = (K_1 + K_2) = 2\text{Re}(K) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad B = i(K_1 - K_2) = -2\text{Im}(K) \in \mathbb{R}$$

qui injectées dans l'éq.(B.13) montrent que :

$$\begin{aligned} x_h(t) &= K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} \\ &= K e^{r_1 t} + \bar{K} e^{r_2 t} \\ &= e^{\alpha t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer l'équivalence de la formulation (B.11) avec les formulations précédentes :

$$\begin{aligned} x_h(t) &= x_M e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi) \\ &= x_M e^{\alpha t} [\cos(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \sin \phi] \\ &= e^{\alpha t} [x_M \cos \phi \cos(\omega t) - x_M \sin \phi \sin(\omega t)] \\ &= e^{\alpha t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

5. Attention à l'approche naïve (fausse dans C) d'imposer simplement $K_1 = K_2$, ce qui nous fait perdre la forme générale de la solution.

ce qui nous permet de relier A et B à x_M et ϕ :

$$A = x_M \cos \phi \quad \text{et} \quad B = -x_M \sin \phi$$

ou inversement $x_M = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan \phi = -B/A$

Exemple 5 – Oscillateur harmonique

Trouver les solutions de l'équation différentielle $x'' + 4x = 0$ sachant que $x(0) = 0$ et $x'(0) = 2$.

Réponse

L'équation est homogène : $x \equiv x_h$. On pose $x(t) = Ke^{rt} \Rightarrow x'(t) = Kre^{rt} \Rightarrow x''(t) = Kr^2e^{rt}$, on injecte ces expressions dans l'équation différentielle (homogène) ce qui donne :

$$Kr^2 e^{rt} + 4K e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = -16 < 0 \Rightarrow r_1 = 2i \quad \text{et} \quad r_2 = -2i$$

On constate donc que le facteur d'amortissement est nul : $\alpha = 0 \Rightarrow e^{\alpha t} = 1$, et que $\omega = 2$ (rad/s). La solution est donc de la forme :

$$x(t) = x_M \cos(2t + \phi)$$

ce qui implique $x'(t) = -2x_M \sin(2t + \phi)$. On calcule alors les constantes d'intégration x_M et ϕ :

$$\left(\begin{array}{l} x(0) = x_M \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm \frac{\pi}{2} \\ x'(0) = -2x_M \sin \phi = 2 \Rightarrow x_M = \mp 1 \end{array} \right)$$

Si on choisit $\phi = +\pi/2$ on a $x_M = -1$, inversement si $\phi = -\pi/2$ implique $x_M = +1$. En fait ce choix est totalement arbitraire et ne change rien à la forme de la solution. En général, on préfère définir x_M positif. La solution est donc $x(t) = \cos(2t - \pi/2) = \sin(2t)$.

Exemple 6 – Oscillateur amorti

Trouver les solutions de l'équation différentielle $x'' + 2x' + 5x = 0$ sachant que $x(0) = 0$ et $x'(0) = 2$.

Réponse

L'équation est homogène : $x \equiv x_h$. On pose $x(t) = Ke^{rt} \Rightarrow x'(t) = Kre^{rt} \Rightarrow x''(t) = Kr^2e^{rt}$, on injecte ces expressions dans l'équation différentielle (homogène) ce qui donne :

$$Kr^2 e^{rt} + 2Kr e^{rt} + 5K e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -16 < 0$$

$$\Rightarrow r_{1/2} = -1 \pm 2i$$

On constate donc que $\alpha = -1$ (s^{-1}), et que $\omega = 2$ (rad/s). La solution est donc de la forme :

$$x(t) = x_M e^{-t} \cos(2t + \phi)$$

ce qui implique $x'(t) = -2x_M e^{-t} \sin(2t + \phi) - x_M e^{-t} \cos(2t + \phi)$. On calcule alors les constantes d'intégration x_M et ϕ :

$$\left(\begin{array}{l} x(0) = x_M \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm \frac{\pi}{2} \\ x'(0) = -2x_M \sin \phi - x_M \cos \phi = 2 \Rightarrow x_M = \mp 1 \end{array} \right)$$

La solution est donc $x(t) = e^{-t} \cos(2t - \pi/2) = e^{-t} \sin(2t)$.

B.3.2 Solution particulière

Pour le calcul de la solution particulière, la méthode des coefficients indéterminés, vue dans la section B.2.1, reste parfaitement valable si $f(t)$ est un polynôme, nous ne la répéterons pas. La plupart des équations différentielles inhomogènes traitées dans ce livre possèdent des solutions particulières constantes. Pour un exemple corrigé où ça n'est pas le cas, voir l'exercice de cours C9.4.

Concernant l'utilisation de la méthode de la variation des constantes, au second ordre il est nécessaire d'imposer une condition sur les fonctions inconnues $K_1(t)$ et $K_2(t)$ définies par :

$$x_p(t) = K_1(t) e^{r_1 t} + K_2(t) e^{r_2 t}$$

La condition à imposer la plus simple (mais ça n'est pas la seule possible) est :

$$K_1' e^{r_1 t} + K_2' e^{r_2 t} = 0$$

B.3.3 Équations différentielles couplées

Lorsqu'une force fait intervenir un produit vectoriel impliquant une variable cinématique, comme la force de Lorentz, $q \vec{v} \wedge \vec{B}$, ou la force de Coriolis, $-2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$, il apparaît un mélange des composantes, on dit que les équations différentielles sont « couplées ». De telles équations différentielles ne sont pas solvables directement. Pour les résoudre il faut tout d'abord les manipuler afin d'obtenir une équation différentielle ne dépendant que d'une unique variable. En général cette opération élève l'ordre de l'équation différentielle. Ce problème est abordé de façon détaillée dans l'exercice de cours C9.4.

Annexe C

Comment savoir si une force est conservative ?

Rotationnel, potentiel et circulations

Les calculs de circulations, c-à-d d'intégrales curvilignes, présentés dans cette annexe sont difficiles. Les calculs du rotationnel et du potentiel, via la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles, le sont un peu moins. Vous n'aurez pas de calculs de ce type dans le reste de cet ouvrage mais on les retrouve dès que l'on étudie l'électromagnétisme ou la gravitation plus en détails que le bref aperçu du chapitre 8. L'intérêt de vous les présenter est, d'une part, de vous montrer comment les physiciens déterminent si une force est conservative ou non, et d'autre part, d'introduire des techniques mathématiques qui vont bien au-delà du simple test de la nature de la force considérée.

Il existe trois méthodes pour répondre à la question du titre de cet annexe.

Une force est conservative si :

- Le rotationnel de \vec{F} est nul : $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$
- Il existe une fonction énergie potentielle U telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(U)$
- Le travail de la force est indépendant du chemin suivi.

La première méthode, le calcul de rotationnel, est de loin la plus facile. Bien qu'il faille calculer un produit vectoriel faisant intervenir l'opérateur différentiel nabla, le calcul est rapide et sans surprise. En coordonnées cylindriques ou sphériques le calcul peut prendre plus de temps, mais il sera toujours plus rapide et plus simple qu'avec les deux autres possibilités. Les problèmes de cette méthode c'est que la nullité du rotationnel ne fait que répondre à la question posée dans le titre, et qu'elle ne fonctionne pas toujours¹.

La seconde méthode, le calcul du potentiel dont dérive la force, va bien au-delà du simple test de la nature de la force. En effet, toute la dynamique de la force est contenue dans le potentiel. La compréhension d'un phénomène physique passe par la connaissance et l'étude des propriétés du potentiel. L'étude de la gravitation dans le chapitre 8 en est l'exemple le plus clair.

La troisième méthode, le calcul de circulations, n'est vraiment pas la plus facile. Ça n'est pas celle qu'on utilise en pratique pour déterminer la nature, conservative ou non, d'une force. Cependant, il est parfois nécessaire de calculer le travail d'une force sur un chemin bien précis, ce qui requiert les techniques présentées dans cette annexe. Les calculs d'intégrales curvilignes vont vous

1. Selon la nature du problème, on peut être confronté à une force conservative possédant un rotationnel non nul. La topologie de l'espace, et en particulier sa nature « connexe » ou non, détermine l'équivalence entre les trois méthodes proposées...

montrer qu'il est possible d'intégrer un vecteur sur un chemin quelconque qui n'est pas une droite car jusqu'à présent vous n'avez intégré que des fonctions scalaires ($f(x)$) sur une ligne droite (axe x). Bien-entendu l'art du physicien est toujours de se ramener à une situation simple afin de faciliter les calculs, et ainsi la plupart du temps vous n'aurez pas besoin de cette technique...

Lisez l'exercice de cours qui suit et retenez simplement qu'il est possible de faire ce genre de calculs, conservez cet exemple au cas où. En général, une fois qu'on comprend un tel exercice on fait un grand pas dans la rigueur et la maîtrise des techniques mathématiques.

• **C4.5 – Une force est-elle conservative ou non ?**

Considérons le champ de forces $\vec{F}(x, y) = (x - ky)\vec{u}_x + (3y - 2x)\vec{u}_y$.

1) **Méthode du rotationnel**

Pour quelle valeur de k la force \vec{F} est-elle conservative pour tout point M ?

2) **Méthode du potentiel**

Pour une valeur précise de k il est possible de calculer l'énergie potentielle U dont dérive la force \vec{F} . Calculer cette valeur de k et le potentiel $U(x, y)$.

3) **Méthode des circulations**

Calculer le travail de \vec{F} lors du déplacement de O à M de coordonnées (p, q) le long des chemins $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 où Γ_4 est l'arc de parabole $y = qx^2/p^2$ donnés sur la figure C.1. Si $k = 1, p = 3$ et $q = 2$, quelle conclusion en tirez-vous ? Pour quelle valeur de k la force \vec{F} est-elle conservative pour tout point M ?

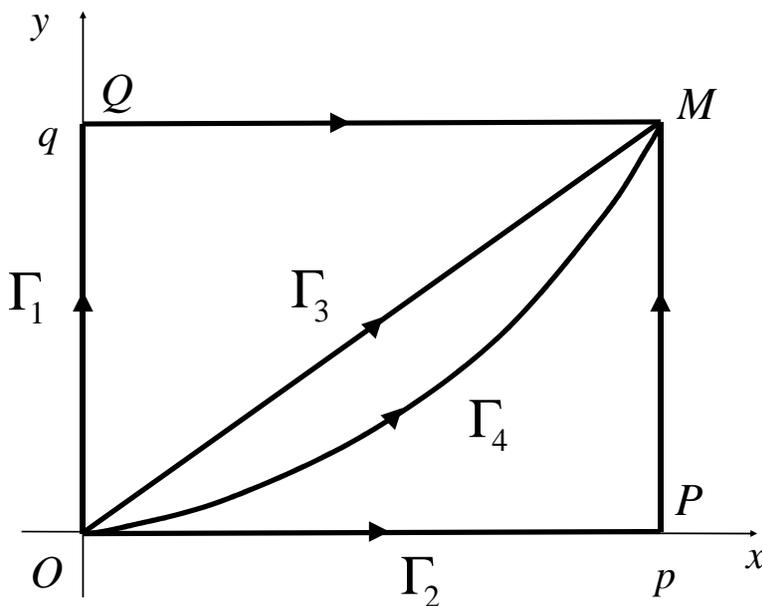


FIGURE C.1 – Calculs de circulations

Réponses

Annexe D

Diagramme d'espace – temps : effet Doppler

Dans cette annexe nous tentons de vous montrer toute la richesse du raisonnement physique basé sur les diagrammes d'espace-temps. À l'aide de la simple définition de la vitesse moyenne $v = \Delta x / \Delta t$ nous allons montrer comment la fréquence d'un signal périodique est modifiée lorsqu'il existe une vitesse relative entre la source du signal et le récepteur, ce que l'on nomme « effet Doppler ».

• Définitions

On utilise un diagramme d'espace-temps pour représenter l'équation horaire des positions d'un système physique. La courbe associée est appelée « ligne d'univers ». **Chaque point du diagramme est appelé « évènement ».** En mécanique classique, l'ensemble des points d'une ligne d'univers représente *un ensemble d'évènements liés par une relation de cause à effet.*

• Cadre de l'étude

La difficulté ici n'est pas calculatoire mais conceptuelle. Notre étude est menée dans le cadre classique (non relativiste) où toutes les horloges de chaque référentiel sont synchronisées. L'étude relativiste nécessite quelques subtilités supplémentaires mais ne change pas la nature des résultats qui vont être obtenus. Afin de simplifier la situation nous travaillerons à une dimension. Toutes les vitesses considérées étant constantes, il n'y a pas de distinction entre vitesse moyenne et vitesse instantanée, aucune intégration ou dérivation, ni équation différentielle à résoudre.

Soit E l'émetteur d'un signal périodique de période T_E . La nature de ce signal importe peu, il peut correspondre à une onde, sonore ou lumineuse, ou, par exemple, à la position d'une des aiguilles d'une montre. Toutes les quantités physiques associées à l'émetteur posséderont un indice E . On choisit l'origine des temps au début de l'émission du signal ($t_{Ei} = 0$), ce qui définit l'évènement Ei . Au bout d'une période, il s'est écoulé le temps t_{Ef} tel que $\Delta t_E = t_{Ef} - t_{Ei} = t_{Ef} = T_E$ où **T_E est la période du signal « au niveau de l'émetteur ».** L'évènement Ef correspond à l'émission du signal à la fin de sa première période. Les évènements Ei et Ef sont reliés par une ligne d'univers, notée E , associée à l'équation horaire des positions de l'émetteur.

Soit R le récepteur du signal périodique, qui peut être une oreille, un œil ou tout autre appareil permettant de détecter le signal émis par l'émetteur. Toutes les quantités physiques associées au récepteur posséderont un indice R . Le début du signal est détecté à l'instant t_{Ri} , ce qui définit l'évènement Ri . La fin de la première période du signal (et le début de la seconde période) est détectée à l'instant t_{Rf} , correspondant à l'évènement Rf . Par définition

$\Delta t_R = t_{Rf} - t_{Ri} = T_R$ où T_R est la période du signal « au niveau du récepteur ». Les événements Ri et Rf sont reliés par une ligne d'univers, notée R , associée à l'équation horaire des positions du récepteur.

Afin de simplifier l'analyse, nous effectuons l'étude uniquement dans le référentiel du récepteur, supposé galiléen et où le récepteur est au repos. Soit L la distance séparant initialement l'émetteur du récepteur. On supposera que le mouvement entre émetteur et récepteur est unidimensionnel. On appelle x la direction du mouvement. La position du récepteur est prise pour origine.

Nous appellerons Si l'information associée au début du signal qui est transmise de l'émetteur vers le récepteur, et Sf l'information associée à la fin de la première période du signal. Par exemple, si le phénomène périodique est la rotation de l'aiguille des secondes d'une montre, on peut définir le début du signal périodique, Si , au moment où l'aiguille quitte la verticale, l'émetteur envoyant alors une brève information¹ sonore ou lumineuse vers le récepteur. La seconde information, Sf , est émise lorsque l'aiguille retourne à la position verticale. Autre exemple, si le signal périodique est une onde directement, les informations Si et Sf peuvent être associées aux deux crêtes successives de l'onde. **On notera c la vitesse du signal, de l'onde, appelée « célérité ».**

• Absence de vitesse relative – Nuance entre pente et tangente

Émetteur et récepteur restent à une distance fixe, il n'y a pas de vitesse relative.

1) Représenter sur un diagramme d'espace-temps l'évolution des positions du récepteur (ligne d'univers R), de l'émetteur (ligne d'univers E) et du signal périodique au début (ligne d'univers Si) et à la fin de la première période (ligne d'univers Sf).

2) Montrer que les périodes du signal au niveau de l'émetteur et du détecteur sont identiques : $T_R = T_E$

3) Soit $\alpha \in [0; +\pi/2]$ l'angle entre l'axe des abscisses t et la ligne d'univers Si . Déterminer la pente de la droite Si et discuter la relation entre cette pente et la tangente de l'angle α .

Réponses

1. Cette « brève information » est elle-même un signal périodique sous la forme d'une onde, cependant il n'est pas nécessaire de savoir ce qu'est une onde pour comprendre les propos de cette annexe...

- Effet Doppler

Émetteur et récepteur sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

4) *Si l'émetteur s'éloigne du récepteur avec la vitesse V montrer à l'aide d'un diagramme d'espace-temps que la période à la réception est plus*

grande que la période à l'émission : $T_R = T_E (1 + V/c)$

5) *Si l'émetteur se rapproche du récepteur avec la vitesse V montrer à l'aide d'un diagramme d'espace-temps que la période à la réception est plus*

petite que la période à l'émission : $T_R = T_E (1 - V/c)$

Réponses

Annexe E

Coniques

Historiquement les coniques ont été étudiées à partir de leurs propriétés géométriques. Elles décrivent les différentes situations de l'intersection d'un plan avec un cône. Vous pouvez trouver dans de nombreux manuels de mathématiques l'étude de leurs propriétés, qu'il est inutile de répéter ici. Une brève description géométrique peut même être trouvée sur wikipedia directement (« [http://fr.wikipedia.org/wiki/Cône_\(géométrie\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Cône_(géométrie)) »).

Ici, nous adoptons une autre approche qui se base sur l'analyse de l'équation des coniques en coordonnées polaires. Sans démonstration, nous donnons aussi les équations algébriques des coniques en coordonnées cartésiennes.

L'équation de la trajectoire d'une conique en coordonnées polaires est :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + e \cos \phi} \quad (\text{E.1})$$

où e est l'excentricité et ρ_0 est le paramètre de la conique (ou l'ordonnée à l'origine) tel que $\phi = \pi/2$ et $x = 0$. Le minimum de cette fonction est obtenue quand le dénominateur est maximum. Comme $e \geq 0$ cela arrive pour $\cos \phi = 1$, et donc $\rho = \rho_{min} = \rho_0/(1 + e)$ pour $\phi = 0$ et ce quelle que soit la valeur de e .

On rappelle que la correspondance entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires est donnée par (voir chapitre 2, section 2.3.6) :

$$x = \rho \cos \phi \text{ et } y = \rho \sin \phi \Leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \tan \phi = y/x \quad (\text{E.2})$$

• $e = 0$

Si $e = 0$ l'éq.(E.1) devient : $\rho = \rho_0 \equiv R$. Quel que soit ϕ , ρ est constant : c'est l'équation d'un cercle de rayon R . L'équation cartésienne s'obtient directement à partir de l'éq.(E.2) : $x^2 + y^2 = R^2$.

• $0 < e < 1$

Étudions la fonction $\rho(\phi)$ donnée par l'éq.(E.1). La fonction possède un dénominateur où intervient la fonction $\cos \phi$ qui peut être positive ou négative quand la coordonnée polaire ϕ parcourt son domaine de variation $[0; 2\pi[$. La fonction $\rho(\phi)$ peut sans-doute diverger pour certaines valeurs de ϕ , appelées « pôles » et notées ϕ_p , qui annulent le dénominateur :

$$1 + e \cos \phi_p = 0 \Leftrightarrow \cos \phi_p = -\frac{1}{e}$$

$$\text{or } 0 < e < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{e} < +\infty \Rightarrow -\infty < -\frac{1}{e} < -1$$

et comme $\cos \phi_p$ ne peut pas être inférieur à -1 on en déduit qu'il n'y a pas de pôle (ϕ_p n'existe pas), le dénominateur de la fonction $\rho(\phi)$ ne s'annule jamais, ϕ peut parcourir l'ensemble de son domaine de définition.

À présent, calculons la dérivée de $\rho(\phi)$:

$$\rho'(\phi) = \frac{d\rho}{d\phi} = -\frac{\rho_0(-e \sin \phi)}{(1 + e \cos \phi)^2} = \frac{\rho_0 e \sin \phi}{(1 + e \cos \phi)^2} \quad (\text{E.3})$$

Le dénominateur est toujours positif. Le signe de $\rho'(\phi)$ est identique à celui de $\sin \phi$. On en déduit donc le tableau de variation suivant :

ϕ	0	π	2π
$\rho'(\phi)$	+	0	-
$\rho(\phi)$	ρ_{min}	\nearrow	ρ_{max}
		\searrow	ρ_{min}

où les valeurs extrémales de $\rho(\phi)$ s'obtiennent directement :

$$\rho(\phi = 0) = \rho_{min} = \frac{\rho_0}{1 + e} \quad \text{et} \quad \rho(\phi = \pi) = \rho_{max} = \frac{\rho_0}{1 - e} \quad (\text{E.4})$$

Si on trace la courbe représentative de cette fonction on obtient une ellipse comme le montre la figure E.1.

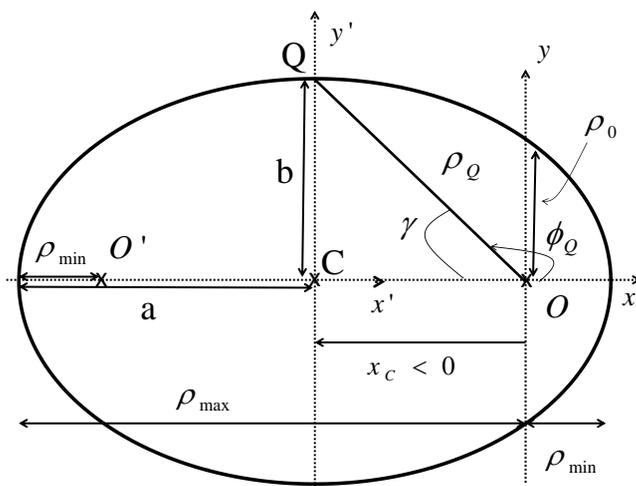


FIGURE E.1 – Propriétés d'une ellipse

Le centre du système de coordonnées polaires O est un des deux foyers de l'ellipse. Le second foyer de l'ellipse O' est le symétrique du foyer O par rapport à C le centre de l'ellipse. La figure E.2 donne les ellipses associées à des excentricités différentes pour le même paramètre ρ_0 . On réalise que cet ensemble de courbes est très différent de celui de la figure 8.8 période T fixée et donc un grand axe $2a$ fixé. On en déduit que les courbes de la figure E.2 ayant ρ_0 fixé correspondent à des énergies différentes et donc des périodes différentes.

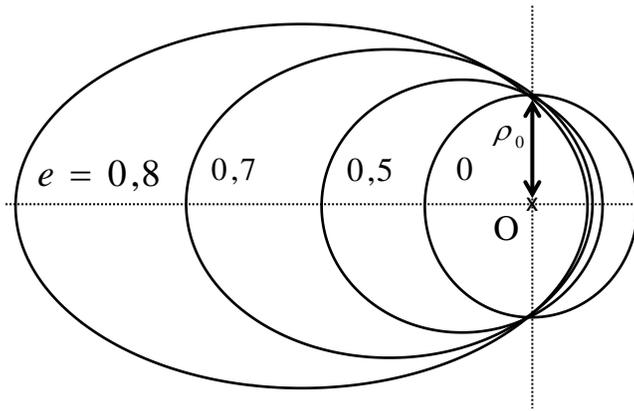


FIGURE E.2 – Ellipses avec $e = 0,5 | 0,7 | 0,8$ avec ρ_0 fixé, et comparaison au cas circulaire ($e = 0$).

Si on note a le demi grand axe de l'ellipse, on obtient plusieurs relations utiles entre a , e , ρ_0 (qui porte à présent le nom de « paramètre de l'ellipse ») et les valeurs extrémales de ρ : $2a = \rho_{min} + \rho_{max} = \frac{\rho_0}{1+e} + \frac{\rho_0}{1-e} = \frac{2\rho_0}{1-e^2}$. Ce qui donne : $\rho_{min} = a(1-e)$ et $\rho_{max} = a(1+e)$.

Le centre de l'ellipse, noté C , est situé au milieu du grand axe. Sa position par rapport au foyer O de l'ellipse qui est aussi le centre des systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes, est telle que :

$$x_C = \rho_{min} - a (= -\rho_{max} + a) = \frac{\rho_0}{1+e} - \frac{\rho_0}{1-e^2} = -\frac{\rho_0 e}{1-e^2} = -ae$$

x_C est négatif si on l'interprète comme la coordonnée cartésienne du point C par rapport au centre du système de coordonnée O (et cela vient de notre choix de l'origine des angles ϕ).

Le demi petit axe b de l'ellipse, défini à partir du centre C , a pour expression $b = a\sqrt{1-e^2} = \rho_0(1-e^2)^{-1/2}$. On peut démontrer cette expression ainsi :

Soit Q le point de l'ellipse situé à la verticale de C (voir figure E.1). On a $CQ = b$. Le point Q a pour coordonnées polaires $\rho_Q = OQ$ et $\phi_Q = \pi - \gamma$ où $\gamma = (\widehat{OC; OQ})$. On voit que $\sin \gamma = b/\rho_Q$ et $\cos \gamma = |x_C|/\rho_Q$. On calcule ρ_Q en utilisant l'équation de la trajectoire pour le point Q :

$$\rho_Q = \frac{\rho_0}{1+e \cos \phi_Q} = \frac{\rho_0}{1+e \cos(\pi - \gamma)} = \frac{\rho_0}{1-e \cos \gamma} = \frac{\rho_0}{1-e \frac{|x_C|}{\rho_Q}} = \frac{\rho_0 \rho_Q}{\rho_Q - e|x_C|}$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \rho_Q - e|x_C| \Rightarrow \rho_Q = \rho_0 + e|x_C| = \rho_0 + \frac{\rho_0 e^2}{1-e^2} = \frac{\rho_0}{1-e^2} = a$$

$$\text{D'où } \cos \gamma = \frac{|x_C|}{\rho_Q} = \frac{|x_C|}{a} = e \Rightarrow \sin \gamma = \frac{b}{\rho_Q} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - e^2}$$

Par conséquent : $b = a\sqrt{1-e^2} = \rho_0(1-e^2)^{-1/2}$.

En coordonnées cartésiennes (de centre O et d'axe x et y comme indiqué sur la figure E.1), l'équation de l'ellipse est de la forme : $\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Si on choisit un système de coordonnées cartésiennes de centre C et d'axes x' et y' comme indiqué sur la figure E.1, l'équation de l'ellipse prend une forme plus simple : $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Le changement de coordonnées est assuré par la transformation $x' = x - x_C$ et $y' = y$, où $x_C < 0$ dans le cas de la figure E.1.

• $e = 1$

Si $e = 1$, la fonction $\rho(\phi)$ devient : $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \cos \phi}$. Cette fonction possède un pôle en $\phi_p = \pi$. Cette valeur de ϕ est donc à exclure du domaine de variation des angles ϕ . La dérivée $\rho'(\phi)$ reste identique et est donc proportionnelle à la fonction $\sin \phi$ (voir éq.(E.3)). La présence du pôle en $\phi_p = \pi$ implique que $\rho \rightarrow +\infty$ autour du pôle (la fonction $1 + \cos \phi$ est toujours positive). La courbe représentative n'est plus fermée. On obtient le tableau de variation suivant :

ϕ	0		π		2π
$\rho'(\phi)$		+			-
$\rho(\phi)$	ρ_{min}	\nearrow	$+\infty$		$+\infty \searrow \rho_{min}$

où la valeur minimale de $\rho(\phi)$ s'obtient directement :

$$\rho(\phi = 0) = \rho(\phi = 2\pi) = \rho_{min} = \frac{\rho_0}{2} (= \rho_{min2})$$

Si on trace la courbe représentative de cette fonction on obtient une parabole comme le montre la figure E.3. Le centre du système de coordonnées polaires O est le foyer de la parabole.

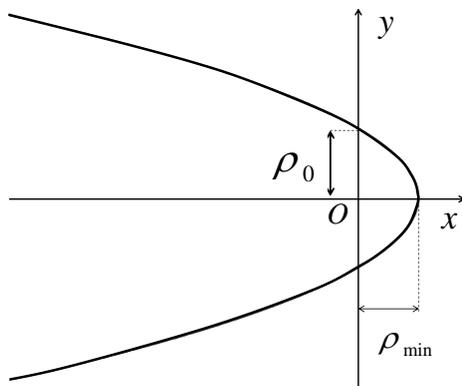


FIGURE E.3 – Cas $e = 1$: parabole

En coordonnées cartésiennes, l'équation de la parabole est de la forme :

$$x = -\frac{y^2}{2\rho_0} + \rho_{min} \quad \text{ou} \quad y = \pm \sqrt{-2\rho_0(x - \rho_{min})}$$

• $e > 1$

Si $e > 1$, la fonction $\rho(\phi)$ peut diverger pour plusieurs valeurs de ϕ :

$$1 + e \cos \phi_p = 0 \Leftrightarrow \cos \phi_p = -\frac{1}{e}$$

or $1 < e < +\infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{1}{e} < 0 \Rightarrow -1 < \cos \phi_p < 0$

La contrainte étant sur la fonction $\cos \phi_p$, la symétrie de la fonction cosinus implique que les angles ϕ_p et $2\pi - \phi_p$ sont des pôles de la fonction $\rho(\phi)$.

Le signe négatif de $\cos \phi_p$ implique que $\phi_p \in]\pi/2; \pi[$ (la borne π correspond au cas $e = 1$ étudié plus haut, et la borne $\pi/2$ au cas où $e \rightarrow +\infty$).

À présent, il est fondamental de remarquer que les angles $\phi \in [\phi_p; 2\pi - \phi_p]$ posent un problème de définition pour la fonction $\rho(\phi)$. En effet, pour cet intervalle de valeurs de ϕ on constate que $\rho(\phi) < 0$, ce qui est contraire à la définition de la coordonnée polaire ρ , qui doit être positive ou nulle. Par conséquent, les valeurs de ϕ dans l'intervalle $[\phi_p; 2\pi - \phi_p]$ sont purement et simplement interdites !

La dérivée $\rho'(\phi)$ est toujours la même (éq.(E.3)) et est donc proportionnelle à la fonction $\sin \phi$. Les limites près des pôles, dans la zone valide des angles ϕ tendent vers $+\infty$:

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_p^-} \rho(\phi) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\phi \rightarrow 2\pi - \phi_p^-} \rho(\phi) = +\infty$$

On obtient le tableau de variation suivant :

ϕ	0		ϕ_p		$2\pi - \phi_p$		2π
$\rho'(\phi)$	+			///			-
$\rho(\phi)$	ρ_{min}	↗	$+\infty$		///		$+\infty$ ↘ ρ_{min}

où la valeur minimale de $\rho(\phi)$ s'obtient directement :

$$\rho(\phi = 0) = \rho(\phi = 2\pi) = \rho_{min} = \frac{\rho_0}{1 + e} (= \rho_{min3})$$

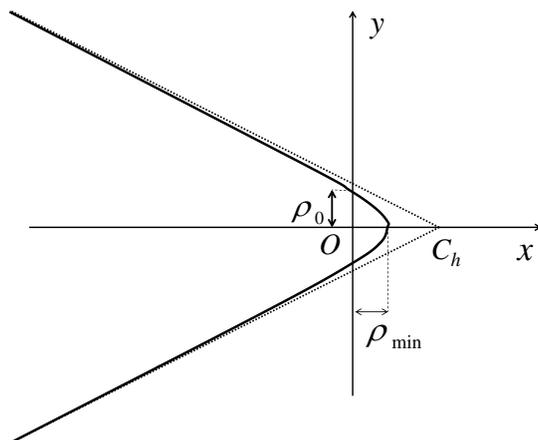
Si on trace la courbe représentative de cette fonction on obtient une hyperbole (ou plutôt, une branche d'hyperbole) comme le montre la figure E.4. Le centre du système de coordonnées polaires O est le foyer de l'hyperbole.

En coordonnées cartésiennes l'équation de l'hyperbole est de la forme :

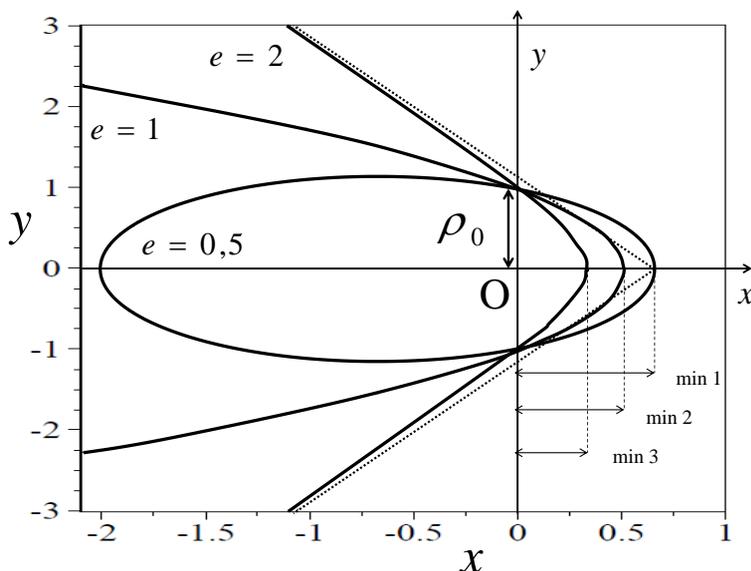
$$\frac{(x - x_{C_h})^2}{a_h^2} - \frac{y^2}{b_h^2} = 1 \tag{E.5}$$

où $x_{C_h} = \rho_0 e / (e^2 - 1)$, $a_h = \rho_0 (e^2 - 1)^{-1}$ et $b_h = \rho_0 (e^2 - 1)^{-1/2}$. Les asymptotes ont pour équations $y = \pm \sqrt{e^2 - 1} (x - x_{C_h})$.

Les courbes représentatives avec ρ_0 fixé pour trois valeurs distinctes de l'excentricité e illustrant chaque type de conique sont données sur la figure

FIGURE E.4 – Cas $e > 1$: hyperbole

E.5. Les échelles, arbitraires, ont été obtenues avec $\rho_0 = 1$ et $e = 0,5 | 1 | 2$. Avec ces valeurs on obtient les valeurs de $\rho_{min} = \rho_0 / (1 + e)$: ellipse ($e = 0,5$) : $\rho_{min1} = 2/3$; parabole ($e = 1$) : $\rho_{min2} = 1/2$; hyperbole ($e = 2$) : $\rho_{min3} = 1/3$. Pour ρ_0 fixé, on a $\rho_{min1} > \rho_{min2} > \rho_{min3}$. Notons que l'égalité $x_{C_h} = \rho_0 e / (e^2 - 1) = 2/3$ et $\rho_{min1} = 2/3$ est purement fortuite et résulte de nos choix arbitraires $e = 0,5$ pour l'ellipse et $e = 2$ pour l'hyperbole.

FIGURE E.5 – Les trois types de coniques avec ρ_0 fixé. Les échelles, arbitraires, ont été obtenues avec $\rho_0 = 1$ et $e = 0,5 | 1 | 2$.

Annexe F

Gravitation pour une sphère homogène

L'objectif de cette annexe est de montrer que la force de gravitation exercée par un objet à symétrie sphérique sur un objet *extérieur*, est équivalente à la force exercée par un point matériel situé au centre de symétrie où se concentre toute la masse. Les calculs, présentés sous la forme d'un exercice de cours, sont relativement compliqués et font appel aux propriétés du système de coordonnées sphériques. Avant de débiter la résolution de cet exercice nous vous conseillons de relire la section 2.3.9 du chapitre 2, afin de maîtriser le système sphérique. Cette propriété se retrouve en électromagnétisme et peut-être démontrée de manière bien plus élégante à l'aide du « théorème de Gauss ».

En fin d'annexe nous présentons le calcul de la divergence du champ gravitationnel pour des points extérieurs et intérieurs à la sphère. De ces résultats on dérive ensuite la fameuse « équation de Poisson » qui joue un rôle important dans les théories de la gravitation et de l'électromagnétisme.

• C8.5 – Coquille sphérique et sphère homogène

On considère une coquille sphérique de centre O , de rayon R , de masse M et ayant une épaisseur e très faible ($e \ll R$). Soit P un point, de masse m , extérieur à la coquille et situé à la distance r du centre O de la coquille sphérique.

1) Si on considère que toute la masse de la coquille est concentrée en son centre, donner l'expression de la force de gravitation en P s'appliquant à la masse m .

2) Si on néglige l'épaisseur de la coquille, on peut introduire la distribution surfacique de masse notée σ . Donner la définition de σ en fonction de la quantité élémentaire de masse dM et de l'élément de surface dS . Si on considère que la répartition de masse est homogène, en déduire les expressions de σ en fonction de M et S , puis de M et R .

3) à présent, on tient compte de l'épaisseur e de la coquille sphérique. Soit ρ la distribution volumique de masse. Donner la définition de ρ en fonction de la quantité élémentaire de masse dM et de l'élément de volume dV . Si $e \ll R$, donner la relation entre dV et dS . En déduire la relation entre ρ et σ .

On considère le système de coordonnées sphérique de centre O et dont l'axe z passe par P . Soit N un point de la coquille autour duquel on définit un élément de surface dS . Soit θ l'angle repérant la position de N , $\theta = (\vec{OP}; \vec{ON})$, et $\alpha = (\vec{PN}; \vec{PO})$. On notera $OP = r$ et $PN = x$. On peut associer à dS une masse élémentaire dM qui exerce une force gravitationnelle élémentaire $d\vec{F}$ sur la masse m . L'objectif des 7 prochaines questions est de calculer la force totale en P due à la coquille sphérique dans son ensemble.

4) Faire un schéma (en perspective) de la situation. Faites un zoom du triangle PNO en indiquant les différentes données du problème. En déduire, les quantités qui peuvent être considérées comme paramètres et celles qui sont des

variables lorsque l'élément de surface dS associé à N parcourt toute la coquille. Combien y a-t-il de variables indépendantes ?

5) Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_N$ créée par l'élément de masse dM de surface dS situé autour du point N , au niveau de la masse m située en P .

6) à partir de la symétrie du problème, trouver la direction finale de la force élémentaire $d\vec{F}_a$ créée sur m par un anneau (de coquille) sphérique repéré par l'angle θ et ayant une largeur associée à la variation élémentaire $d\theta$.

7) Donner l'expression élémentaire de dS (autour du point N) en fonction de R , $d\theta$ et $d\phi$. En déduire l'expression de la surface élémentaire dS_a de l'anneau décrit à la question précédente.

8) En déduire l'expression de dF_a , norme de $d\vec{F}_a$. (En fonction de G , M , m , x , θ , $d\theta$ et α .)

9) à partir du triangle PNO trouver les relations liants les angles θ et α aux longueurs x , r et R du problème. En déduire la relation entre dx et $d\theta$.

10) Donner les expressions de dF pour la seule variable θ , puis pour la seule variable x .

11) Intégrer l'expression de dF afin de montrer que la force en P est identique à celle créée par une masse M ponctuelle située en O .

12) Que se passe-t-il si P est à l'intérieur de la coquille sphérique ?

13) Refaire la démonstration en raisonnant sur le potentiel et non la force.

Réponses

• Divergence du champ et équation de Poisson

Dans la section 8.2.2 nous avons introduit le potentiel gravitationnel Φ défini comme l'énergie potentielle par unité de masse $\Phi = U/m$, et le champ gravitationnel \vec{G} comme la force par unité de masse $\vec{G} = \vec{F}_G/m$. Pour une sphère homogène ces quantités deviennent :

$$\text{Cas extérieur : } \vec{G}^{ext} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \Phi^{ext} = -\frac{GM}{r}$$

$$\text{Cas intérieur : } \vec{G}^{int} = -\frac{GM}{R^3} r \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \Phi^{int} = \frac{GM}{2R^3} r^2 - \frac{2GM}{3R}$$

Dans la section précédente nous avons montré que le cas extérieur est identique au cas où la masse M est ponctuelle. Cette propriété est alors utilisée pour obtenir les expressions du cas intérieur (à faire avec l'exercice E8.17).

On peut relier le potentiel gravitationnel au champ gravitationnel grâce à la notion de gradient : $\vec{G} = -\overrightarrow{grad}\Phi$. Cette relation est vérifiée quelle que soit la position du point d'étude. Calculons à présent la divergence du champ gravitationnel \vec{G} dans les deux cas. Pour cela on a besoin de l'expression de

l'opérateur divergence, soit en coordonnées cartésiennes soit en coordonnées sphériques (voir annexe A). On trouve :

$$\text{cas extérieur : } \operatorname{div}(\vec{G}^{ext}) = 0 ; \text{ cas intérieur : } \operatorname{div}(\vec{G}^{int}) = -\frac{3GM}{R^3} = -4\pi G \rho$$

où ρ est la densité en masse (masse volumique) de la sphère homogène.

On obtient des équations similaires pour le potentiel Φ où intervient l'opérateur différentiel « laplacien », noté¹ Δ , et tel que $\Delta = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$. On peut même se contenter d'une seule équation, appelée

$$\text{« équation de Poisson » : } \quad \Delta\Phi = 4\pi G \rho$$

où ρ est à présent la densité en masse du milieu où se trouve le point d'étude P , c-à-d $\rho = 0$ à l'extérieur de la sphère et $\rho = \rho_{sphère} = M_{sphère}/V_{sphère}$ à l'intérieur. En fait, toute la théorie de la gravitation classique est contenue dans cette simple équation.

Remarques :

- En électromagnétisme, l'équation de Poisson associée au potentiel électrique prend la forme simple : $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$ où ρ est à présent la densité de charge électrique du milieu où se trouve le point d'étude P . Cette équation est équivalente à une des quatre équations de Maxwell contrôlant la dynamique des champs électromagnétiques : $\operatorname{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0 (= -\Delta V)$

- On peut être surpris de la nullité de la divergence du champ gravitationnel à l'extérieur de la sphère, c-à-d dans le vide quelle que soit la nature ponctuelle ou non de la masse attractive M . En effet, à la fin de l'annexe A nous avons vu qu'un champ radial avait une divergence non nulle (et un rotationnel nul). La masse attractive M est associée à un champ central, elle « rayonne » dans toutes les directions sa capacité à interagir, ceci pourrait être représenté par une figure similaire à la figure A.3c (de l'annexe A) mais à trois dimensions. En effet, une force radiale est telle que :

$$\begin{aligned} \vec{F} \text{ est radiale} &\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = r^n \vec{r} = r^{n+1} \vec{u}_r = F_r \vec{u}_r \\ &\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{F}) \stackrel{(A.7)}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^{n+3})}{\partial r} \\ &= (n+3) r^n \end{aligned}$$

La divergence est nulle uniquement si $n = -3$ c-à-d si $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{k}{r^3} \vec{r} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r$.

Seules les forces centrales en $1/r^2$ comme la gravitation et l'électromagnétisme possèdent cette propriété qui est directement reliée à la dimension de l'espace et au théorème de Gauss, et donc à ce qu'on a montré dans la première partie de cette annexe : force et potentiel à l'extérieur d'une sphère sont équivalents à ceux d'une charge ponctuelle !

1. Il ne faut pas confondre cet opérateur différentiel avec le symbole identique exprimant une « différence » ($\Delta x = x^f - x^i$).

Index

- A**
- abscisse curviligne.....56
 - accélération
 - angulaire.....69
 - centripète.....60, 61, 69, 78
 - d'entraînement.....300
 - de Coriolis.....300
 - de la pesanteur.....101, 309
 - instantanée.....50, 59
 - loi de composition.....300
 - moyenne.....50, 59
 - normale..... voir centripète
 - tangentielle.....60, 77
 - amplitude maximale.....346
 - analyse dimensionnelle.....20
 - angle, dimension et unités.....25
 - apesanteur..... voir impesanteur
 - Archimède, poussée d'.....109
 - atome.....27, 29, 253
 - Avogadro.....17, 29, 33
- B**
- ballistique.....62
 - Bohr.....253
 - boson.....238
- C**
- Cavendish.....289
 - célérité.....356
 - centre de masse.....216, 258
 - champ
 - électrique.....104, 260, 374
 - gravitationnel.....260, 373
 - magnétique.....104
 - chemin.....143, 146, 153, 157, 349
 - choc.....211
 - cinématique.....45
 - circulation.....144, 349
 - coefficients indéterminés, méthode340
- collision
 - élastique.....220
 - inélastique.....219
- complexe, nombre.....326
 - coniques.....269, 273, 286, 361
 - paramètre.....273, 361
 - conservation
 - énergie.....139, 153, 269
 - impulsion.....209, 214
 - lois de.....139
 - moment cinétique..237, 243, 269
 - constante d'Avogadro.....17, 29, 33
 - conversion (entre unités).....23
 - Coriolis.....300, 304, 314
 - cosinus.....324
 - cotangente.....325
 - Coulomb, loi de/force de.....103
- D**
- degré de liberté.....219, 220
 - déphasage.....346
 - déplacement élémentaire...56, 72, 79
 - dérivée.....327
 - Descartes, lois de.....84
 - développements limités.....331
 - diagramme d'espace-temps...48, 355
 - différentielle
 - définition.....48, 327
 - équation.....337
 - opérateurs.....333
 - opérations.....328
 - dimension
 - analyse.....21, 24
 - espace.....45, 374
 - divergence.....153, 334, 373
 - Doppler, effet.....355, 358
 - dynamique.....99, 111

- E**
- effet Doppler 355, 358
 - Einstein 15, 19, 26
 - électromagnétisme 17, 102
 - ellipse 247, 272, 361
 - demi grand axe 273, 363
 - demi petit axe 363
 - énergie
 - cinétique 144
 - conservation 139
 - diagramme 154
 - mécanique 153
 - potentielle 145, 156, 349
 - effective 270
 - gravitationnelle 259
 - travail 140, 143
 - équation (de)
 - différentielle 337
 - différentielle couplée 348
 - différentielle non linéaire 342
 - Euler-Lagrange 161
 - Friedman 264
 - horaire 47, 48, 355
 - la dynamique 111, 159
 - Poisson 374
 - second degré 323
 - équilibre 112, 155, 241
 - équipotentielle, surface/ligne 152
 - espace
 - homogénéité 209
 - isotropie 237
 - état
 - libre 263, 274, 275
 - lié 263, 272
 - étoile 35, 37
 - Euler 161, 326
 - évènement 355
 - excentricité 273, 361
 - exponentielle 323
- F**
- Fermat, principe de 84
 - fermion 238
 - fonctions à plusieurs variables 332
 - force (de) 99
 - Archimède 109
 - centrale 100, 257, 374
 - centrifuge 114, 304, 305
 - choc 211
 - conservative 144, 145, 151, 349
 - Coriolis 304, 314
 - électrique 102–104
 - électromagnétique 17, 104
 - entraînement 304
 - fictive 114, 295, 301
 - frottements fluides 109
 - frottements solides 107
 - frottements visqueux 109
 - gravitationnelle.. *voir* gravitation
 - inertie 114, 295, 301
 - Laplace 104
 - Lorentz 104
 - magnétique 102, 104
 - non conservative 144, 157
 - nucléaire faible 17, 106
 - nucléaire forte 17, 105
 - pesanteur *voir* poids
 - rappel élastique 107
 - réaction 106
 - tension 106
 - foyer 273, 362
 - fréquence 55
 - fréquence angulaire ... *voir* pulsation,
voir vitesse angulaire
 - Frenet, base de 77
 - fréquence 171
 - friction, coefficient de 108
 - Friedman, équation de 264
- G**
- galaxie 38, 40, 42
 - Galilée, transformation .. 68, 218, 298
 - Gauss, théorème de 374
 - géostationnaire, satellite 288
 - gluon 238
 - gradient 151, 333
 - gravitation 17
 - champ 260, 373
 - énergie potentielle 259
 - force 100, 257
 - marées 289
 - potentiel 260, 373
- H**
- Halley, comète 288

- Heisenberg 20
Higgs, boson de 33
Hubble, loi de/constante de... 38, 264
hyperbole 275, 365
- I**
- imaginaire, nombre 326
impesanteur 321
impulsion 111, 209
incertitude 22
intégrale 328
interaction *voir* force
- K**
- Kepler
1^e loi 247, 273
2^e loi 245
3^e loi 35, 38, 283
- L**
- Lagrange 84, 161
Laplace, force de 104
ligne d'univers 355
logarithme 323
Lorentz, force de 104
- M**
- marées 289
Maupertuis 84
méthode
coefficients indéterminés 340
variables séparables 341
variation des constantes 340, 344
moment
cinétique 237, 242
d'inertie 243
d'une force 238, 240
mouvement
caractéristique du 50, 60
circulaire 68, 75, 266, 361
périodique *voir* oscillateur
- N**
- nabla 151, 333
neutrino 106
neutron 18, 28
Newton, lois de 110, 257
Noether, théorème de 139
- noyau 28, 32
- O**
- orbite 273, 276
oscillateur harmonique 172
amorti 180
forcé 188
libre 55, 174
- P**
- parabole 274, 364
Pauli 237
pendule 202, 251, 320
pente 48, 356
période 55, 69, 171, 355
PFDC. *voir* principe de la dynamique
phase 346
photon 238
planète 34, 37
Planck, constante de 20
poids 100
Poisson, équation de 374
polynôme caractéristique 339, 343
potentiel
électrique 260, 374
gravitationnel 260, 373
principe (de)
Einstein 19
équivalence 259
Fermat 84
indiscernabilité 134
inertie 110
l'action-réaction 112
la dynamique (PFDC) 111
Maupertuis 84
moindre action 84, 147
Pauli 237
relativité 114
produit
scalaire 330
vectoriel 57, 330
projectile *voir* balistique
proton 18, 28, 33
puissance 144
pulsation 171, 346
- Q**
- quantité de mouvement *voir* impulsion

quasi-isolé.....210

R

rayon de courbure..... 61
référentiel..... 45, 113, 218, 258, 295
réflexion, loi de la 84
réfraction, loi de la 85
régime
 libre.....174
repos.....110
résonance 188
ressort 107
rotation 237, 243, 247
 de la Terre.....309, 314
rotationnel 153, 335, 349

S

satellite 266, 276, 288
sinus 324
sonde 261
spin 237
stabilité, critères 155
système de coordonnées
 cartésiennes 45, 72
 cylindriques 79
 polaires.....70
 sphériques 81
système
 isolé..... 110, 210
 quasi-isolé 210

T

tangente..... 48, 325, 356
Taylor, développements de 331
temps
 caractéristique.....212
 homogénéité du.....139
 mesure du..... 171
théorème
 de l'énergie cinétique 145
 de l'énergie mécanique..... 157
 de Noether 139
 du moment cinétique 242
travail.....140, 143
trou noir 266, 287

U

univers 38, 41

expansion de l' 38, 264
ligne d' 355

V

variables séparables (méthode) ... 341
variation des constantes 340, 344
vecteur 45, 330
 rotation 69
 unitaire binormal..... 77
 unitaire normal 77
 unitaire tangent.....56, 77
vibrations 188
vitesse
 angulaire 68
 aréolaire.....283
 célérité 356
 d'entraînement 298
 d'un satellite 247
 de libération.....261
 instantanée 47, 59
 loi de composition...68, 218, 298
 moyenne 47, 59
 relative 67

Y

Yukawa, potentiel de 105

Table des matières

Avant-propos	5
1 Physique et mécanique, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur	13
1.1 Introduction	15
1.1.1 Physique et démarche scientifique	15
1.1.2 Les mécaniques	15
1.2 Un aperçu de physique fondamentale	16
1.3 Analyse dimensionnelle, ordres de grandeur	20
1.3.1 Unités, dimensions et présentation des résultats	20
1.3.2 Angle : dimension et unités	25
1.3.3 Exercice de cours C1.3 – Forces, énergies, actions	26
1.3.4 Exercice de cours C1.4 – Atomes et noyaux	27
1.3.5 Exercice de cours C1.5 – Planètes et étoiles	34
1.3.6 Exercice de cours C1.6 – Galaxies et Univers	38
1.4 Conclusion / À retenir	42
2 Cinématique	43
2.1 Introduction	45
2.2 Cinématique à une dimension	47
2.2.1 Position et vitesses	47
2.2.2 Accélérations	50
2.2.3 Exercices de cours – Équations horaires	51
2.2.4 Oscillateur harmonique	55
2.2.5 Abscisse curviligne et vecteur déplacement différentiel élémentaire	56
2.3 Cinématique 2d et 3d	57
2.3.1 Opérations sur les vecteurs	57
2.3.2 Vitesses et accélérations	59
2.3.3 Balistique sans frottements	62
2.3.4 Notion de vitesse relative	67
2.3.5 Mouvement circulaire	68
2.3.6 Système de coordonnées polaires	70
2.3.7 Base de Frenet	77
2.3.8 Système de coordonnées cylindriques (3d)	79
2.3.9 Système de coordonnées sphériques (3d)	81
2.4 Principe de Fermat et lois de Descartes	84
2.5 Exercices	89

2.5.1	Cinématique 1d	89
2.5.2	Cinématique 2d et 3d	92
3	Dynamique - Forces et lois de Newton	97
3.1	Forces	99
3.1.1	Interactions fondamentales et forces à distance	100
3.1.2	Forces de contact normales	106
3.1.3	Forces de contact tangentiels	107
3.2	Lois de Newton	110
3.2.1	Les lois de Newton	110
3.2.2	Référentiels	113
3.2.3	Applications des lois de Newton – Exercices de cours	115
3.3	Exercices	130
3.3.1	Bilan des forces, PFDC avec forces constantes	130
3.3.2	Forces variables et équations différentielles	133
4	Énergie et loi de conservation 1	137
4.1	Introduction	139
4.2	Travail et énergie cinétique	140
4.2.1	Travail	140
4.2.2	Énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique	144
4.3	Énergie potentielle, forces conservatives et conservation de l'énergie	145
4.3.1	Définition de l'énergie potentielle	145
4.3.2	Exemples d'énergies potentielles	147
4.3.3	Forces conservatives	151
4.3.4	Conservation de l'énergie mécanique	153
4.3.5	Critères d'équilibre et de stabilité	155
4.4	Forces non-conservatives	157
4.5	Équation de la dynamique	159
4.6	Formulations de la physique moderne	160
4.7	Exercices	162
5	Oscillateurs et mouvements périodiques	169
5.1	Introduction et mesure du temps	171
5.2	Oscillateur harmonique simple : régime libre	174
5.3	Oscillateur harmonique amorti	180
5.4	Oscillateur harmonique forcé : résonance	188
5.5	Exercices	201
6	Impulsion et loi de conservation 2	207
6.1	Introduction	209
6.2	Chocs	211
6.3	Conservation de l'impulsion	214
6.4	Centre de masse	216
6.4.1	Définition du centre de masse	216
6.4.2	Référentiel du centre de masse	218
6.5	Collisions	219
6.5.1	Collisions inélastiques : $Q = -\Delta T$	219

6.5.2	Collisions élastiques	220
6.6	Exercices	230
7	Rotation, moment cinétique et loi de conservation 3	235
7.1	Introduction	237
7.2	Moment d'une force	238
7.2.1	Intuition et définition	238
7.2.2	Propriétés du moment d'une force	240
7.2.3	C7.1 – Couple de forces et équilibre	241
7.3	Moment cinétique	242
7.3.1	Définition	242
7.3.2	Théorème du moment cinétique	242
7.3.3	Conservation du moment cinétique	243
7.3.4	Liens translation \longleftrightarrow rotation, moment d'inertie	243
7.3.5	C7.2 – Rotation du patineur	244
7.4	Applications	245
7.4.1	Loi des aires (2^{nde} loi de Kepler)	245
7.4.2	Mouvement sur une ellipse	247
7.5	Formulations mathématiques des rotations	247
7.6	Exercices	250
8	Gravitation	255
8.1	Introduction	257
8.1.1	Définition	257
8.1.2	Complications	257
8.2	Énergie potentielle et applications	259
8.2.1	Énergie potentielle gravitationnelle	259
8.2.2	Potentiel gravitationnel et champ gravitationnel	260
8.2.3	Vitesse de libération, états libres et états liés	261
8.2.4	Expansion de l'Univers	264
8.2.5	Trous noirs	266
8.3	Mouvements avec une force en $1/r^2$	266
8.3.1	C8.3 – Satellite en mouvement circulaire	266
8.3.2	Conservation de l'énergie et du moment cinétique	268
8.3.3	Étude de l'énergie potentielle effective U^{eff}	270
8.3.4	Mise en orbite d'un satellite	276
8.3.5	Dépendance temporelle et troisième loi de Kepler	283
8.3.6	Équation polaire de la trajectoire	285
8.4	Exercices	287
9	Forces d'inertie et changement de référentiel	293
9.1	Introduction	295
9.2	Cinématique	296
9.2.1	Positions et notations	296
9.2.2	Vitesses	297
9.2.3	Accélérations	299
9.3	Dynamique	301
9.3.1	Translation rectiligne non uniforme	301

9.3.2	Cas général	303
9.4	Applications liées à la rotation de la Terre	309
9.4.1	C9.3 – g et la rotation de la Terre	309
9.4.2	C9.4 – Force de Coriolis et rotation de la Terre	314
9.5	Exercices	320
ANNEXES		323
A Formulaire mathématique		323
A.1	Fonctions usuelles	323
A.1.1	Puissances, racines et équation du second degré	323
A.1.2	Exponentielle et logarithme népérien	323
A.1.3	Fonctions trigonométriques	324
A.2	Nombres complexes	326
A.3	Dérivées, différentielles et intégrales	327
A.3.1	Dérivées et différentielles	327
A.3.2	Intégrales	328
A.4	Vecteurs	330
A.5	Développements limités	331
A.6	Différentielles, opérateurs différentiels	332
A.6.1	Différentielles des fonctions à plusieurs variables	332
A.6.2	Opérateurs différentiels	333
B Équations différentielles		337
B.1	Définitions	337
B.2	Équations différentielles du premier ordre	338
B.2.1	Méthode générale	338
B.2.2	Exemples	340
B.2.3	Méthode des variables séparables	341
B.3	Équations différentielles du second ordre	343
B.3.1	Solution homogène	343
B.3.2	Solution particulière	348
B.3.3	Équations différentielles couplées	348
C Comment savoir si une force est conservative ? Rotationnel, potentiel et circulations		349
D Diagramme d'espace-temps : effet Doppler		355
E Coniques		361
F Gravitation pour une sphère homogène		367
Index		375
Table des matières		379