

1^{ère} édition de l'Ecole de Statistique pour la physique
School of Statistics 2008

IPHC Strasbourg, 30 Juin - 04 Juillet 2008

Thématiques traitées

Probabilité et incertitude	Imad LAKTINEH
Statistiques et tests d'hypothèses	Pierre LUTZ
Les analyses discriminantes multivariées	Harrison PROSPER
Les réseaux de neurones	Jerome SCHWINDLING
Les arbres de décision	Yann COADOU
L'utilisation de TMVA	Andreas HOECKER
L'utilisation de RooFit	Wouter VERKERKE
Combinaison des observables en physique des saveurs	Jerome CHARLES
Combinaison des observables en cosmologie	Jean-Marc VIREY

Comité organisateur

Jerome Baudot (IPHC)	Corinne Bérat (LPSC)
Gautier Hamel de Monchenault (IRFU)	Imad Laktineh (IPNL)
Olivier Leroy (CPPM)	Arnaud Lucotte (LPSC)

Table des matières

I	Concepts fondamentaux	5
	Imad LAKTINEH : <i>Concepts de probabilités et incertitudes</i>	7
1.1	Introduction à la notion de Probabilité	7
1.2	Variable aléatoire et probabilité	9
1.3	Cas de plusieurs variables aléatoires réelles	12
1.4	Les distributions de probabilité	14
1.5	Théorème central-limite	19
1.6	Techniques de simulation - Monte Carlo	19
II	Les analyses discriminantes Multivariées	23
	Harrison B. PROSPER : <i>Multivariate discriminants</i>	25
2.1	Introduction	25
2.2	Part 1	25
2.3	Part 2	31
2.4	Outstanding Issues	42
2.5	Conclusion	43
	Jerome SCHWINDLING : <i>Les réseaux de neurones</i>	45
3.1	Introduction	45
3.2	La vision neurobiologique	45
3.3	La vision mathématique	48
3.4	Conseils pour l'utilisation d'un perceptron multi-couches	54
3.5	Conclusion	59
	Yann COADOU : <i>Les arbres de décision — Decision trees</i>	61
4.1	Introduction	61
4.2	Growing a tree	61
4.3	Tree (in)stability	66
4.4	Boosting	68
4.5	Other averaging techniques	75
4.6	Conclusion	75
4.7	Software	76
4.8	Acknowledgements	76
	Andreas Hoecker and Helge Voss : <i>Multivariate Data Analysis with TMVA</i>	79
5.1	Introduction	79
5.2	Multivariate Data Analysis with TMVA	81
5.3	Data Preprocessing	90
5.4	Probability Density Functions	95
5.5	Optimisation and Fitting	95
5.6	Boosting and Bagging	97
5.7	The TMVA Methods	100

5.8	Combining MVA Methods	127
5.9	Which MVA method should I use for my problem?	129
5.10	TMVA implementation status summary for classification and regression	133
5.11	Conclusions and Plans	133
	Acknowledgements	137
	Bibliography	137

Wouter VERKERKE : *RooFit* 141

6.1	Introduction and Overview	141
6.2	Object-oriented data modeling	141
6.3	Creating basic probability density functions	142
6.4	Fitting, Plotting and Toy Generation from p.d.f.s	144
6.5	Adding shapes into composite models	147
6.6	Convolution	148
6.7	Building Multi-Dimensional Model	152
6.8	Data modeling with discrete observables	155
6.9	Practical aspects of Maximum Likelihood estimation	158

III Application à l'analyse et interprétation des résultats 165

Jean-Marc VIREY : *Combinaison des observables en cosmologie* 167

7.1	Introduction	167
7.2	Le Modèle Cosmologique Standard	169
7.3	Les Sondes Cosmiques	175
7.4	Analyses combinées	179

Combinaison des observables en cosmologie

Jean-Marc VIREY

Centre de Physique Théorique, Marseille

7.1 Introduction

La recherche d'une unité cachée derrière l'immense diversité de la Nature a toujours passionné les physiciens. Aujourd'hui nous avançons de plus en plus vers une compréhension unifiée des lois de la physique gouvernant à la fois les grandes structures de l'Univers, comme les étoiles, les galaxies et les amas, et la structure intime de la matière, comme les atomes, les noyaux et les nucléons.

La précision expérimentale obtenue par les nombreuses expériences en physique des particules a permis de valider le Modèle Standard des interactions fortes et électro-faibles décrit dans le cadre de la théorie quantique des champs. Cependant de nombreuses questions restent encore ouvertes et on attend avec impatience les premiers résultats du LHC, d'ici deux à trois ans, pour connaître quelles manifestations de nouvelle physique permettent de décrire la voie que la Nature a choisie. A titre d'exemple de ce jeu fin entre expériences, modèles et théories, à la base de toute démarche scientifique, citons les prédictions du modèle standard électro-faible concernant les propriétés des bosons W^\pm et Z^0 . Celles-ci sont vérifiées par les expériences jusqu'au niveau des corrections radiatives, mais elles nécessitent l'introduction du boson de Higgs, une particule "scalaire" fondamentale, qu'il reste encore à découvrir. D'un point de vue théorique ce "modèle" pose de nombreux problèmes car la théorie quantique des champs fournit en général des prédictions divergentes en présence d'un champ scalaire fondamental (problèmes hiérarchique et de non-naturalité). On introduit alors des modèles ou théories allant au-delà du modèle standard permettant de s'affranchir des difficultés liées à la présence de ce champ scalaire. Les deux grandes possibilités sont l'existence soit d'une sous-structure (pour le Higgs et/ou les fermions fondamentaux (leptons, quarks)) soit d'une nouvelle symétrie liant bosons et fermions, appelée "supersymétrie" et qui peut intervenir dans le cadre plus général de la supergravité ou des théories des cordes. Avec ces dernières théories on entre dans une troisième voie qui tente d'élargir le cadre de la théorie des champs afin de pouvoir décrire l'interaction gravitationnelle. Les théories des cordes, ainsi que ses concurrents comme la géométrie non commutative ou la gravité quantique à boucles, établissent alors un lien naturel entre le monde microscopique et les plus grandes échelles de l'Univers.

Il est passionnant de s'intéresser à ces questions particulièrement théoriques mais qui semblent plus mathématiques que physiques. Il est excitant de réaliser que les résultats du LHC ainsi que la grande précision des nombreuses observations qui vont être entreprises dans la prochaine décennie dans le domaine de la cosmologie vont permettre de tester certains modèles dérivés de ces différentes théories.

En effet, l'étude globale des caractéristiques de l'Univers a enregistré des progrès impressionnants depuis ces vingt dernières années et les projets observationnels en cours de discussions laissent entrevoir des perspectives très alléchantes. La cosmologie moderne repose sur plusieurs piliers : la compréhension de l'expansion, la nucléosynthèse primordiale, la prédiction et l'observation du rayonnement cosmologique micro-onde ainsi que des oscillations acoustiques baryoniques. Le cadre théorique est celui de la Relativité Générale et des lois de la physique microscopique et macroscopique. Ces diverses lois sont vérifiées à un très haut degré de précision localement, mais la cosmologie extrapole leurs applications à des distances très grandes et à des instants très lointains.

La première découverte fondamentale sur laquelle repose le modèle du big bang chaud, est le mouvement de fuite des galaxies découvert par E. Hubble dans les années 1920[1]. En effet, l'ensemble des galaxies s'éloignent de nous avec une vitesse qui est proportionnelle à la distance ($v = H_0 r$, où le coefficient de proportionnalité H_0 est la constante de Hubble). Ce phénomène s'appelle "l'expansion", il est caractérisé par le facteur d'échelle $a(t)$ représentant la "dilatation" des distances avec le temps, et que l'on mesure par le décalage des longueurs d'ondes des spectres des divers éléments constituant l'univers.

Le second pilier est la nucléosynthèse primordiale qui correspond à une interprétation cohérente de l'origine des abondances des éléments légers (H , D , ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$) à partir des propriétés nucléaires et thermodynamiques de la matière dans un cadre spatio-temporel en expansion [2]. La nucléosynthèse primordiale fournit des informations cruciales sur le contenu en baryons et en photons de l'univers primordial [3].

Le troisième pilier est le rayonnement de fond micro-onde ou CMB, découvert fortuitement en 1964 par A. Penzias et R. Wilson [4] mais qui avait été prédit théoriquement plusieurs années plus tôt. Son origine vient de la transition d'une phase où l'univers est sous la forme d'un plasma d'électrons et protons, à une phase neutre qui résulte du refroidissement global dû à l'expansion où on assiste à l'apparition des atomes à une échelle de l'ordre de l'électron-Volt et les photons libres peuvent alors se propager librement. Cette transition de phase est appelée "découplage" ou découplage rayonnement-matière. C'est cette mesure du CMB qui a éliminée la plupart des concurrents du modèle de big bang chaud. La très grande isotropie du rayonnement reçue confirma la justesse des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie du modèle cosmologique standard, au moins au moment du découplage (il y a environ 13,5 milliard d'années, 380 000 ans après "le bang" ou plutôt "le temps de Planck" ($t \approx 10^{-43} s$), temps caractéristique à partir duquel nos théories ne sont plus valides).

Cependant, la présence des galaxies nous indique qu'il devait y avoir de très légères inhomogénéités dans la distribution spatiale de la matière. Les surdensités primordiales ayant 14 milliard d'années pour évoluer et créer les structures que nous voyons aujourd'hui. Dans un univers chaud à multi-composantes où photons et baryons sont couplés électromagnétiquement et où baryons et matière noire (cf voir plus bas) sont couplés gravitationnellement, on prédit théoriquement l'apparition d'un nouveau phénomène appelé "oscillations acoustiques baryoniques" (BAO). Dans un univers dominé par la radiation, la forte pression radiative éloigne les photons des surdensités primordiales. Le couplage des baryons (et électrons) aux photons fait que la matière ordinaire suit les photons : c'est une onde acoustique possédant une vitesse $c_s = c/\sqrt{3}$. Au moment du découplage, électrons et baryons s'assemblent pour constituer les atomes légers qui ne couplent plus aux photons : la propagation des ondes acoustiques s'arrête, les photons se propagent librement (c'est le CMB) et les baryons (ie les atomes) restent sur place à une distance d'une centaine de Mpc des surdensités de matière noire initiales. Il vient de se passer environ $4 \cdot 10^5$ ans. Les 500 millions d'années suivantes, sous l'action de la gravité, les distributions de baryons et de matière noire deviennent homogènes. 14 Milliards d'années après on s'attend à ce que la distribution (spatiale) statistique des galaxies, ainsi que celles des photons du CMB, gardent une trace de ce phénomène. En 1992, la collaboration du satellite COBE découvre les premières anisotropies du CMB et mesure la position du premier pic acoustique. En 2001, la collaboration 2dF mesure une indication de pic acoustique dans la distribution des galaxies. En 2005, WMAP fournit une mesure du troisième pic acoustique du CMB, et SDSS confirme le premier pic acoustique des galaxies. L'ère de la cosmologie inhomogène commence ...

Le Modèle Standard cosmologique repose sur de solides bases théoriques mais nécessite l'introduction de nouvelles composantes pour être en accord avec les diverses observations. Plus précisément, dans le modèle dit de "concordance", la matière ordinaire ne représente qu'environ 5% du contenu total de l'Univers qui semble posséder une géométrie plate. La matière noire entre dans une proportion de 25% et joue un rôle clé dans la dynamique des galaxies et des amas ainsi que dans les modèles de croissance des structures à partir des fluctuations primordiales de densité. L'énergie noire représente 70% du contenu énergétique et rend compte de l'accélération récente de l'expansion.

Les contraintes sur la matière noire indiquent que le fluide associé est sans collisions avec la matière ordinaire et donc que l'interaction serait purement gravitationnelle. Les modèles de microphysique, comme la supersymétrie, fournissent des candidats naturels que l'on cherche à détecter par des méthodes très diverses allant de la physique des collisionneurs à celles des astroparticules via l'étude des rayonnements cosmiques. Une autre possibilité, radicalement différente mais de plus en plus critiquée dans la communauté, serait de changer les lois de la dynamique gravitationnelle à l'échelle des galaxies et des amas. La critique la plus dure, est que la nouvelle formulation de l'attraction gravitationnelle doit rendre compte du phénomène complexe des BAO, mesuré précisément et où la matière noire joue un rôle fondamental. On espère que les futures données expérimentales et observationnelles permettront de séparer ces deux classes d'interprétation, et en particulier la nature (micro-)physique de la matière noire.

Concernant l'énergie noire, la situation est bien plus dramatique (ou intéressante!) car, d'une part, cela concerne la composante aujourd'hui dominante, et d'autre part, que de très nombreuses et diverses explications sont possibles. Les astronomes et les "relativistes" vont préférer une constante cosmologique qui peut être introduite naturellement dans les équations d'Einstein mais qui souffre alors du problème de "coïncidence" (pourquoi matière et énergie noire sont elles du même ordre de grandeur aujourd'hui bien que leurs dynamiques soient très différentes?). Les "physiciens" vont alors proposer une origine microphysique à cette constante cosmologique en l'associant à l'énergie du vide. Ils sont alors confrontés au problème de son estimation qui est divergente en théorie quantique des champs : c'est le "problème de la constante cosmologique". Afin de résoudre ces problèmes, deux scénarios distincts sont envisagés : soit il faut effectivement rajouter une nouvelle composante, soit les équations de la dynamique sont à changer. Dans le premier cas et si on veut résoudre (partiellement) le problème de coïncidence, on introduit alors un champ scalaire (eg les modèles de quintessence). Dans le second cas on modifie ou on étend le cadre de la relativité générale (ou des seules équations de Friedmann).

Un autre aspect très incertain de la cosmologie standard concerne la période d'inflation dans l'Univers primordial qui rendrait compte du problème de causalité mis en évidence par la très grande uniformité du fond diffus cosmologique, ainsi que de l'apparente platitude spatiale de l'Univers, et enfin, qui devrait être à l'origine des fluctuations primordiales de densités. Les propriétés statistiques du champ de surdensité sont très utiles pour distinguer les divers modèles d'inflation.

On peut donc noter une certaine similitude entre ces trois grandes énigmes du modèle cosmologique standard que sont la matière noire, l'énergie noire et l'inflation. Il faut cependant remarquer que les domaines d'application de ces trois composantes sont extrêmement différents dans l'espace et dans le temps. Néanmoins, les physiciens théoriciens imaginent de nombreuses connexions possibles amenant à une très grande diversité des modèles. Observationnellement certaines quantités mesurées ne dépendent que d'une (ou deux) de ces composantes, mais il est intéressant de réaliser que les modèles de formation de structures sont sensibles à l'ensemble de ces inconnues dont une meilleure connaissance est indispensable pour obtenir une vision plus complète et une meilleure compréhension.

Les nombreuses données de sources différentes et de très bonne qualité vont ainsi permettre de relier des problèmes aux frontières de la physique théorique, de la physique des particules, des astroparticules, de la cosmologie et de l'astrophysique, en espérant qu'une vision plus unifiée des diverses interactions fondamentales et des différentes échelles de l'Univers en résulte.

Dans ce cours, très général, nous allons passer en revue les divers outils de la cosmologie, à la fois théorique et observationnel, en insistant particulièrement sur les grandeurs physiques et statistiques et peu sur les méthodes statistiques qui ont été revues dans les cours précédents. Après avoir défini les paramètres cosmologiques, nous montrerons que leur détermination nécessite de combiner différents observables mesurés par diverses sondes cosmologiques.

7.2 Le Modèle Cosmologique Standard

7.2.1 Les équations de base

Le modèle cosmologique standard repose sur la théorie de la relativité générale et sur le principe cosmologique. Ce dernier stipule que l'on peut considérer l'univers comme homogène et isotrope aux grandes échelles. L'origine de cette hypothèse, du point de vue théorique, remonte à Copernic et au refus de supposer l'existence d'une région (et d'une direction) particulière dans l'univers, et a été rendu populaire par Einstein au début du XX^{ème} siècle. Du point de vue observationnel, il est confirmé par l'apparente homogénéité de la distribution spatiale des galaxies, constatée à des échelles supérieures à 100 *Mpc* ainsi que par le CMB qui est isotrope jusqu'à une résolution de 10^{-5} .

Si on considère un univers maximalelement symétrique on est alors amené à utiliser la métrique de

Friedmann-Robertson-Walker (FRW) donnée par ($c = 1$) :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{d^2r}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (7.1)$$

où k , l'indice de courbure, est tel que $k = 1, 0, -1$ correspond à un univers ouvert, plat et fermé, respectivement. $a(t)$ est le facteur d'échelle, qui peut être considéré comme "étalon de longueur", et dont la valeur aujourd'hui a_0 est normalisée à 1 pour un univers plat, ou telle que $a_0^2 = k/(H_0^2|\Omega_T - 1|)$ pour une courbure non-nulle (H_0 et Ω_T sont des paramètres cosmologiques mesurables dont les définitions suivent). Les variations du facteur d'échelle sont mesurables grâce à la mesure du redshift z qui est une mesure relative de la dilatation de l'espace entre deux instants, et qui est associé, pour un phénomène lumineux, à la variation de la longueur d'onde du photon. On a ainsi la relation :

$$\frac{a(t)}{a_0} = \frac{\lambda(t)}{\lambda_0} \equiv \frac{1}{1+z} \quad (7.2)$$

Le paramètre de Hubble $H(t)$ décrit l'expansion et est défini par :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d \ln a}{dt} \quad (7.3)$$

Au temps présent on définit $H_0 = 100 h \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ avec la contrainte observationnelle $h \approx 0.7$.

La dérivée seconde du facteur d'échelle est relié au paramètre de décélération $q(t)$:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (7.4)$$

La valeur de ce paramètre aujourd'hui, q_0 , est négative ce qui implique la présence d'une énergie noire lorsque l'on tient compte de la dynamique tirée des équations d'Einstein. Avant de rentrer dans ces détails, continuons la description de la cinématique en introduisant les diverses notions de distances spécifiques à la cosmologie.

La distance comobile est donnée par :

$$r(z) = a_0 \mathcal{S}_k \left(\frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz' \right) \quad (7.5)$$

où $\mathcal{S}_k(x) = \sinh(x)$, x , $\sin(x)$ pour $k = 1, 0, -1$, respectivement.

Cette distance va servir de base à la définition d'autres distances en cosmologie dont les interprétations sont beaucoup plus intuitives et qui vont être reliées à des observables. La mesure de ces distances est au coeur de la détermination des paramètres cosmologiques détaillée dans ce cours.

La distance lumineuse $d_L(z)$ relie le flux L émis par un objet de redshift z au flux observé par unité de surface aujourd'hui Φ :

$$\Phi \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (7.6)$$

On peut alors montrer que :

$$d_L(z) = r(z)(1+z) \quad (7.7)$$

La distance angulaire $d_A(z)$ relie la distance propre d'un objet prise perpendiculairement à la direction radiale (de propagation des photons) δl_\perp , à l'angle sous-tendu $\delta\theta$:

$$\delta l_\perp \equiv d_A \delta\theta \quad (7.8)$$

De cette définition on obtient :

$$d_A(z) = \frac{r(z)}{(1+z)} = d_L(z)/(1+z)^2 \quad (7.9)$$

A présent, nous allons tenir compte de la dynamique décrite par les équations d'Einstein¹ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (7.10)$$

Ces équations relient la dynamique de la métrique (et donc du facteur d'échelle $a(t)$) via le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et le scalaire de Ricci R , au contenu énergétique de l'univers (représenté par le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$). En utilisant la métrique FRW et en supposant que les éléments constitutifs de l'univers peuvent être décrits par un fluide parfait, nous obtenons les équations de Friedmann :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2} \quad (7.11)$$

et

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i) \quad (7.12)$$

où ρ_i et p_i sont les densité et pression du fluide de nature i .

La première équation relie le facteur d'échelle et la courbure aux densités des divers éléments de l'univers. On introduit alors la densité critique $\rho_c = 8\pi G/3H^2$ qui permet de définir les paramètres cosmologiques $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ qui sont des rapports de densités. La première équation de Friedmann se simplifie alors grandement :

$$\Omega_T = \sum_i \Omega_i = 1 - \Omega_k, \quad (7.13)$$

ce qui permet de définir le paramètre $\Omega_k = -k/(a^2H^2)$ pour représenter le terme de courbure.

En général, on considère 3 composantes distinctes, la matière ($i \equiv M$, qui peut se décomposer en baryons et matière noire), la radiation ($i \equiv R$, qui peut se décomposer en photon et neutrino, *i.e.* les particules relativistes), et l'énergie noire ($i \equiv X$). Ces trois composantes ont des évolutions temporelles radicalement différentes. L'évolution d'un fluide parfait dans un univers en expansion est soumise à l'équation suivante :

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0 \quad (7.14)$$

qui donne la relation intégrale suivante :

$$\frac{\rho_i(z)}{\rho_i(0)} = \exp \left[3 \int_0^z (1 + w_i(z')) d \ln(1 + z') \right] \quad (7.15)$$

où $w_i = p_i/\rho_i$ est l'équation d'état du fluide i . On peut alors définir le paramètre de Hubble en fonction des valeurs actuelles des paramètres Ω_i et de l'équation d'état de l'énergie noire $w_X(z)$:

$$E^2(z) = \left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = (1+z)^3 \Omega_m + \frac{\rho_X(z)}{\rho_X(0)} \Omega_X + (1+z)^2 \Omega_k \quad (7.16)$$

On a utilisé le fait que la matière est telle que $w_M = 0$ (impliquant une évolution de la densité en a^{-3}), et que la radiation correspond à $w_R = 1/3$ ($\rho_R \simeq a^{-4}$). Ceci implique que la radiation a dominé la dynamique de l'univers avant celle de la matière et que l'énergie noire la domine aujourd'hui. Le destin de l'univers est donc contrôlé par cette composante inconnue. L'énergie noire possède une équation d'état à déterminer mais si elle est associée à une constante cosmologique alors $w_X = w_\Lambda = -1$ et la densité ρ_Λ est une constante.

7.2.2 Description inhomogène et formation des structures

Le modèle présenté jusqu'à présent est parfaitement homogène et isotrope, il ne permet donc qu'une description simplifiée de l'Univers, on parle de description du "fond". Si on veut tenter d'expliquer l'origine

¹L'éventuelle présence d'une constante cosmologique sera discutée dans la section 2.3.

des différentes structures peuplant l'univers, il faut aller plus loin dans notre description. Les modèles de formation des structures nécessitent de perturber les équations d'Einstein afin d'étudier la croissance des fluctuations de densité.

De nombreuses sondes cosmiques sont sensibles à cette physique, et l'obtention d'informations fiables sur les propriétés de l'énergie noire nécessitent la prise en considération de ces sondes comme par exemple le CMB, l'analyse du spectre de puissance des galaxies ou encore les effets de cisaillement gravitationnel.

La description qui suit reste très succincte et le lecteur intéressé pourra consulter les références suivantes [5].

Statistique du champ cosmique de densité

Soit $\rho(\mathbf{x})$ le champ de densité de la matière (noire + baryons) qui est une fonction continue du vecteur position \mathbf{x} . Soit $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$ sa valeur moyenne calculée sur un volume suffisamment grand de l'univers. La quantité de base est le contraste de densité :

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (7.17)$$

Par définition $\bar{\delta} = 0$ et $\delta(\mathbf{x}) \geq -1$. On définit alors sa transformée de Fourier :

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (7.18)$$

ainsi que la fonction de corrélation à 2 points :

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (7.19)$$

qui ne dépend que de la norme de la position relative $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, sous l'hypothèse d'isotropie statistique. On peut interpréter la fonction de corrélation comme "l'excès de probabilité" par rapport à une distribution aléatoire, de trouver deux fluctuations définies dans les volumes dV_1 et dV_2 , et séparées de la distance r :

$$dP = \bar{\rho}^2 (1 + \xi(r)) dV_1 dV_2. \quad (7.20)$$

On appelle "spectre de puissance" la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à 2 points :

$$P(k) = \langle |\tilde{\delta}(\mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int dr r^2 \xi(r) \frac{\sin kr}{kr}, \quad (7.21)$$

qui ne dépend que du module du vecteur d'onde \mathbf{k} .

Afin de décrire la formation d'une structure de masse M provenant du collapse d'une perturbation initiale de taille $R \propto (M/\bar{\rho})^{1/3}$, il est commode d'introduire un champ de densité "lissé" par une certaine fonction fenêtre W_R :

$$\delta_R(\mathbf{x}) = \delta_M(\mathbf{x}) = \int \delta(\mathbf{y}) W_R(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mathbf{y}. \quad (7.22)$$

On peut alors définir la variance du champ de densité lissé à l'échelle R :

$$\sigma_R^2 = \sigma_M^2 = \langle \delta_R^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P(k) \tilde{W}_R^2(k), \quad (7.23)$$

où $\tilde{W}_R(k)$ est la transformée de Fourier de la fonction fenêtre.

La fonction fenêtre filtre les modes de longueurs d'onde $\lesssim R$ et définit la relation exacte entre M et R . En général, on choisit une fonction "top-hat" :

$$W_R(r) = 1 \quad (0 \leq r \leq R) \quad (r > R) \quad (7.24)$$

telle que $M = (4\pi/3)R^3\bar{\rho}$ et

$$\tilde{W}_R(k) = \frac{3[\sin(kR) - kR \cos(kR)]}{(kR)^3} \quad (7.25)$$

Techniquement, on travaille dans l'espace de Fourier car les modes k sont décorrélés (pour des perturbations linéaires), ce qui "facilite" les calculs et l'interprétation. D'un point de vue théorique il faut définir le spectre initial des fluctuations de densité. Pour ce faire, on paramétrise le spectre de puissance initial :

$$P_{ini}(k) = Ak^n \quad (7.26)$$

où A est un facteur de normalisation et n l'indice spectral. Des arguments généraux développés par Zel'dovich dans les années 1970 penchent pour un spectre invariant d'échelle où $n \approx 1$, revenant à supposer qu'aucune échelle n'est privilégiée initialement et donc à imaginer une distribution fractale de l'univers primordial. Un spectre invariant d'échelle est aussi une des caractéristiques des modèles d'inflation. Ce paramètre n permet de séparer diverses classes de modèles, et fait donc partie des paramètres cosmologiques de base à estimer. En revanche la normalisation n'est pas prédite, et elle doit être fixée par les observations. Cependant, elle est universelle et doit donc être identique/cohérente pour toutes les observations. L'usage est de définir la normalisation par le paramètre cosmologique σ_8 , qui est la variance de la fonction de corrélation du champ de densité lissé par une fonction "top-hat" pour un rayon comobile de $R = 8 h^{-1} \text{Mpc}$. La raison historique de ce choix est que le premier sondage en redshift de galaxies (en 1983) a montré que la variance du comptage du nombre de galaxies dans des sphères de ce rayon vaut 1. La relation entre A et σ_8 est donnée par l'éq.(7.23) mais il faut tenir compte que A est défini à un temps primordial (z_{ini} correspondant à la fin de l'inflation) alors que σ_8 est mesuré aujourd'hui ... En effet, toutes les quantités introduites dans cette section, et en particulier δ , dépendent du temps : $\delta \equiv \delta(\mathbf{x}, z)$, $\sigma_8 \equiv \sigma_8(z)$

Evolution temporelle linéaire du champ de densité

L'évolution temporelle du contraste de densité δ est gouvernée dans le régime linéaire ($\delta \ll 1$) par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H(t) \frac{\partial \delta}{\partial t} - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0, \quad (7.27)$$

qui résulte de la linéarisation des équations de continuité (conservation de la masse), d'Euler (relation entre l'accélération d'un élément du fluide et le champ gravitationnel) et de Poisson (relation entre le champ gravitationnel et le contraste de densité). La solution de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \delta_+(\mathbf{x}, t_i) D_+(t) + \delta_-(\mathbf{x}, t_i) D_-(t), \quad (7.28)$$

où D_+ et D_- sont les modes croissant et décroissant de la perturbation de densité. Le mode décroissant ne joue pas de rôle important dans la dynamique de la surdensité. La fonction $\delta_+(\mathbf{x}, t_i) \equiv \delta(\mathbf{x})$ qui représente la distribution spatiale au temps initial t_i , a été discutée lors de la section précédente. Pour des modèles sans énergie noire ou avec constante cosmologique, le "facteur de croissance" D_+ peut se calculer analytiquement :

$$D(z) = D_+(z) = \frac{5}{2} \Omega_m E(z) \int_z^\infty \frac{1+z'}{E(z')^3} dz' \quad (7.29)$$

Pour les modèles d'énergie noire avec une équation d'état w quelconque, il faut résoudre numériquement l'équation (7.27) ou utiliser des expressions approchées. Certains observables sont directement sensibles à la dérivée temporelle du facteur de croissance, qu'on appelle "taux de croissance" :

$$f = \frac{d \ln D}{d \ln a} \quad (7.30)$$

Les sondes cosmiques sensibles à la croissance des structures vont donc fournir des contraintes à la fois sur les paramètres qui gouvernent l'expansion de l'univers (via l'éq.(7.29)) et sur les paramètres contrôlant la distribution statistique des surdensités de matière (via l'éq.(7.23)).

7.2.3 Modèles d'énergie noire

La nouvelle composante "énergie noire" doit rendre compte de l'accélération de l'expansion (pour des revues consulter [6, 7, 8]). Si on suppose qu'un seul fluide est présent, il doit être tel que $w_X < -1/3$ (si on néglige la radiation mais en tenant compte de la matière cette relation devient $w_X < -\Omega_T/(3\Omega_X)$). On constate donc que l'énergie noire doit avoir une équation d'état négative, ce qui correspond à un fluide relativement exotique.

Le candidat le plus simple est une constante cosmologique ou l'énergie du vide, selon le point de vue adopté. Le modèle de concordance, en accord avec les données, correspond à cette hypothèse. Cependant, il souffre de deux difficultés : le problème de la constante cosmologique, fondamental pour les physiciens des particules mais négligeable ou infondé pour les astronomes, ainsi que le problème de coïncidence.

Une constante cosmologique est un terme supplémentaire dans les équations d'Einstein qui deviennent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (7.31)$$

Historiquement, ce terme a été introduit par Einstein pour construire un univers statique. Supprimée par la suite grâce à la découverte de l'expansion et de la notion d'un univers dynamique, elle fut réintroduite récemment pour expliquer l'apparente platitude de l'univers et l'accélération récente. Dans les équations de Friedmann on voit apparaître alors le terme $\Lambda/3$ dans le membre de droite, nous permettant de définir le paramètre Ω_Λ . Les contraintes observationnelles actuelles indiquent $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ ce qui se traduit en terme de densité d'énergie par $\rho_\Lambda^{1/4} \approx 10^{-3} eV$.

Pour les astronomes et les spécialistes de la relativité générale ce terme est de nature géométrique et il n'est pas nécessaire de lui trouver une origine plus fondamentale. Cependant, pour les physiciens des particules et les experts de théorie quantique des champs, il apparaît que l'état fondamental de la théorie, qu'on appelle aussi le vide, est un invariant de Lorentz. Sa description mathématique est équivalente à la présence d'un fluide parfait dont l'équation d'état vaut $w_{vide} = -1$. On obtient alors une correspondance entre cette énergie du vide et la constante cosmologique ($\Lambda = 8\pi G \rho_{vide}$). Pour la cosmologie, la différence est surtout technique et il importe peu de savoir si on ajoute dans les équations d'Einstein un terme à gauche (partie géométrique) ou à droite (partie constitutive). Du point de vue physique, la différence est fondamentale, mais la distinction est-elle possible ? Aujourd'hui il est difficile de répondre à cette question

...

Le problème de la constante cosmologique [8, 9] apparaît lorsqu'on essaye d'estimer la densité d'énergie du vide dans le cadre de la théorie quantique des champs. En fait, le vide souffre des mêmes problèmes que les particules scalaires à savoir que les corrections radiatives sont quadratiquement divergentes. Pour la densité d'énergie du vide on obtient $\rho_{vide} \approx M_{cut}^4$, on parle aussi de catastrophe ultraviolette. Vu les échelles impliquées en physique des particules ($M_{EW} \approx 100 GeV$, $M_{SUSY} \geq 1 TeV$ ou $M_P \approx 10^{19} GeV$) on constate que les estimations de $\rho_{vide}^{1/4}$ sont entre 10^{15} et 10^{30} trop élevées par rapport à $\rho_\Lambda^{1/4}$. Moralité, de grands progrès restent à faire pour calculer la densité d'énergie du vide en théorie quantique des champs. Peut-être la solution sortira-t-elle des théories quantique de la gravitation, mais nous n'en sommes pas encore là !

Nous adopterons donc le point de vue de l'astronome par la suite en faisant abstraction de ce problème et en parlant de constante cosmologique et non d'énergie du vide.

Venons en à présent au problème de coïncidence qui est à l'origine d'un grand nombre de modèles d'énergie noire : on constate que les densités de matière (noire) et de constante cosmologique sont du même ordre de grandeur aujourd'hui ($\rho_\Lambda \approx 0.7\rho_c$ et $\rho_M \approx 0.3\rho_c$) alors que les évolutions temporelles de ces deux composantes sont très différentes ($\rho_\Lambda = cste$ et $\rho_M \approx a^{-3}$). C'est donc une coïncidence très surprenante qui a motivé la construction d'un grand nombre de modèles d'énergie noire tentant de donner une origine dynamique à ce phénomène.

Les modèles d'énergie noire se décomposent en deux grandes classes. Soit on considère que nos hypothèses de travail sont justes, et il est alors indispensable de rajouter une nouvelle composante dans

l'univers, l'énergie noire proprement dite qui est en général décrite par un nouveau champ scalaire (classique). Soit on considère qu'une de nos hypothèses est fautive ce qui se traduit par une modification de nos équations de base (équation d'Einstein (eq.(7.10)) et/ou équation de Friedmann (eq.(7.11))). Il n'est alors plus nécessaire d'introduire une nouvelle composante, mais la nouvelle dynamique interprétée dans un cadre standard se traduit par un nouveau fluide "effectif", que l'on nomme toujours énergie noire.

La dynamique de l'énergie noire (réelle ou effective) peut alors se résumer à la connaissance des trois quantités suivantes [7] : Ω_X , $w_X(z)$ et $w'_X(z) = dw_X/d\ln a$. Les deux dernières fonctions permettent de définir un espace des phases pour la dynamique de l'énergie noire, où chaque modèle théorique est associé à une trajectoire particulière. La détermination de l'équation d'état de l'énergie noire ainsi que de sa dépendance temporelle semble donc une bonne voie pour comprendre l'origine de l'accélération cosmique.

7.3 Les Sondes Cosmiques

Dans cette section nous allons présenter les principales sondes cosmiques qui sont utilisées pour l'extraction des paramètres cosmologiques, en insistant particulièrement sur les sondes sensibles à l'accélération ou dont les observables sont directement reliés à la distribution statistique de la matière.

• Les SNIa :

L'étude des SNIa donne des contraintes fortes sur le phénomène d'accélération. Les SNIa sont des objets rares ($\approx 1/\text{siècle}/\text{galaxie}$) mais très brillants. On les considère comme des chandelles standard car il apparaît que leurs luminosités (intrinsèques) sont comparables. Théoriquement, on le comprend en associant aux SNIa un mécanisme d'explosion qui change peu d'une SN à l'autre. Plus précisément, on suppose qu'une SNIa résulte de l'implosion d'une naine blanche qui vient juste d'atteindre la masse de Chandrasekhar ($\approx 1.4M_\odot$). On imagine un système double où une étoile, devenue une naine blanche, accrète la matière de son étoile compagnon jusqu'à l'instant critique du début de la supernovae.

Observationnellement, on distingue les SNIa des autres types de SN grâce à leurs propriétés photométriques et spectrales. En effet, la courbe de lumière (évolution de la luminosité dans le temps) des SNIa est caractérisée par une croissance initiale relativement lente, et le spectre présente une raie d'absorption pour le Silicium à $\approx 600\text{nm}$. Concrètement, les SNIa peuvent avoir des variations en luminosité importantes, mais il existe plusieurs procédures expérimentales dites de "standardisation" qui permettent de réduire fortement la dispersion de l'échantillon (au maximum de 15% aujourd'hui).

Une fois ces étapes franchies, on peut alors construire un diagramme de Hubble qui relie la magnitude effective de la SNIa à son redshift. La magnitude apparente effective, m , est reliée à la magnitude absolue des SNIa, M , et à la distance lumineuse d_L par :

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (7.32)$$

où les facteurs numériques viennent des conventions choisies pour définir m et M en astronomie. Techniquement, pour ne pas trop détériorer la détermination des paramètres cosmologiques, on définit un paramètre de normalisation (ou de nuisance) M_S qui englobe les incertitudes sur M et sur H_0 :

$$m(z) = 5 \log_{10}(D_L) + M - 5 \log_{10}(H_0/c) + 25 = M_S + 5 \log_{10}(D_L) \quad (7.33)$$

où $D_L(z) \equiv (H_0/c) d_L(z)$ est la distance lumineuse indépendante de H_0 . La figure 7.1 donne le diagramme de Hubble avec les données les plus récentes. De ce diagramme, via la distance lumineuse, on extrait des contraintes sur les paramètres cosmologiques.

• Les anisotropies du CMB :

La mesure des anisotropies du fond diffus, réalisées par COBE en 1992 puis par WMAP depuis 2003, et bientôt par Planck, permet de contraindre un grand nombre de paramètres associés à des physiques très différentes (expansion/géométrie, inflation, réionisation, normalisation du spectre de puissance des

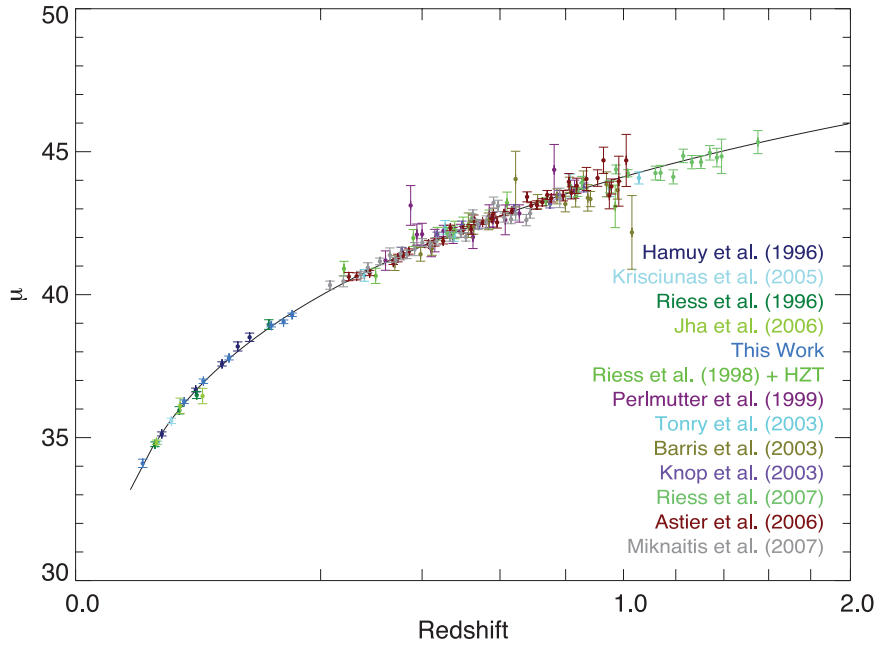


FIG. 7.1: Diagramme de Hubble à partir des SNIa les plus récentes [21]. La courbe en pointillée correspond au best-fit en supposant un univers plat.

grandes structures ...). L'observable de base reconstruit par les observations est la fonction de corrélation à deux points des températures $\langle \delta T(\vec{n}) / \bar{T} \delta T(\vec{n}') / \bar{T} \rangle$ moyennée sur toute les paires (\vec{n}, \vec{n}') avec une séparation angulaire fixe (*i.e.* $\vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos \theta$). Le CMB fournit d'excellentes contraintes sur la courbure de l'Univers (paramètre Ω_T), mais n'est sensible qu'à une moyenne de l'équation d'état de l'énergie noire. Concernant l'univers inhomogène, les contraintes sont fortes sur l'indice spectral et sur la normalisation du spectre de puissance [10]. La figure 7.2 donne les contraintes obtenues sur le spectre de puissance directement.

- **Le spectre de puissance des galaxies :**

Les sondages massifs de galaxies, tels que les sondages 2dF ou SDSS qui mesurent les positions de plusieurs centaines de milliers de galaxies, permettent la reconstruction du spectre de puissance sur une grande gamme de mode k . Pour cela, il faut estimer la fonction de corrélation à 2 points de la position relative entre paires de galaxies. Revenant à la définition première de la fonction de corrélation à 2 points comme l'excès de probabilité de la distribution mesurée par rapport à une distribution aléatoire, on construit par exemple les estimateurs suivants :

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1 \quad \text{ou} \quad \hat{\xi}(r) = \frac{DD(r) - 2DR(r) + RR(r)}{RR(r)} \quad (7.34)$$

où on définit la quantité "AB(r)" comme :

$$AB(r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \int_{\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 n_A(\vec{r}_1) n_B(\vec{r}_2) W_{TH}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (7.35)$$

$n_I(\vec{r})$ est la densité en nombre de galaxies à la distance \vec{r} pour le catalogue I , avec $I = D$ pour le catalogue des données réelles et $I = R$ pour le catalogue simulé ayant exactement les mêmes propriétés que le catalogue des données mais où les galaxies ont été distribuées de façon aléatoire. $W_{TH}(r)$ est une fonction "top-hat" centrée sur r et de largeur Δr définissant le volume élémentaire $dV = 4\pi \Delta r^3 / 3$.

Les mesures du spectre de puissance réalisées par SDSS[11] sont données sur la figure 7.2.

Si maintenant on s'intéresse à l'échelle particulière du spectre de puissance ($\lambda \approx 150 Mpc$) où on s'attend à avoir le premier pic dû aux oscillations acoustiques baryoniques, et que l'on compare cette

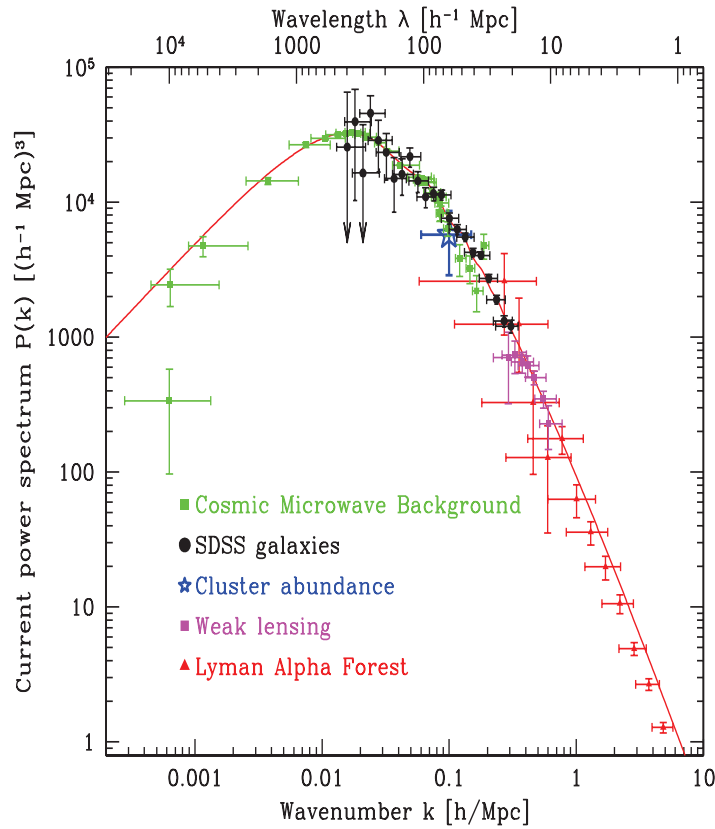


FIG. 7.2: Mesures du spectre de puissance de la matière [11].

distance à celle de l'horizon sonore déduit des anisotropies du CMB, on obtient des contraintes très fortes sur l'expansion de fond et en particulier sur Ω_M et $w(z)$. A nouveau le catalogue SDSS a permis une telle mesure, représentée sur la figure 7.3, qui se traduit pour les paramètres cosmologiques par la contrainte suivante [12] :

$$A = \frac{\sqrt{\Omega_m}}{E(z_{BAO})^{1/3}} \left[\frac{1}{z_{BAO} \sqrt{|\Omega_k|}} \mathcal{S} \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^{z_{BAO}} \frac{1}{E(z')} dz' \right) \right]^{2/3} = 0.469 \pm 0.017 \quad (7.36)$$

avec $z_{BAO} = 0.35$.

- **Les vitesses particulières des galaxies :**

Dans un amas de galaxies chaque galaxie possède une vitesse particulière dont la composante radiale introduit une modification de la mesure du redshift. La fonction de corrélation à deux points construite à partir des distances transverses et radiales subit alors une distorsion selon la direction radiale. Cette distorsion est proportionnelle à la fonction $\beta = f/b$ où f est le taux de croissance (voir éq.(7.30)) et b le biais entre matière (noire) et galaxies. Le biais doit être introduit car la théorie traite des surdensités de matière noire alors que les observations mesurent les positions et les vitesses des galaxies identifiées grâce à leur lumière (et non leur masse).

Jusqu'à présent les contraintes obtenus sur f ou sur les paramètres cosmologiques par cette méthode restent relativement modestes, mais ce test semble prometteur avec les futurs sondages massifs de galaxies pour tester directement la théorie de la gravitation.

- **Les amas de galaxies :**

Le nombre d'amas contenu dans un certain volume dépend de la masse et du redshift considérés. Press

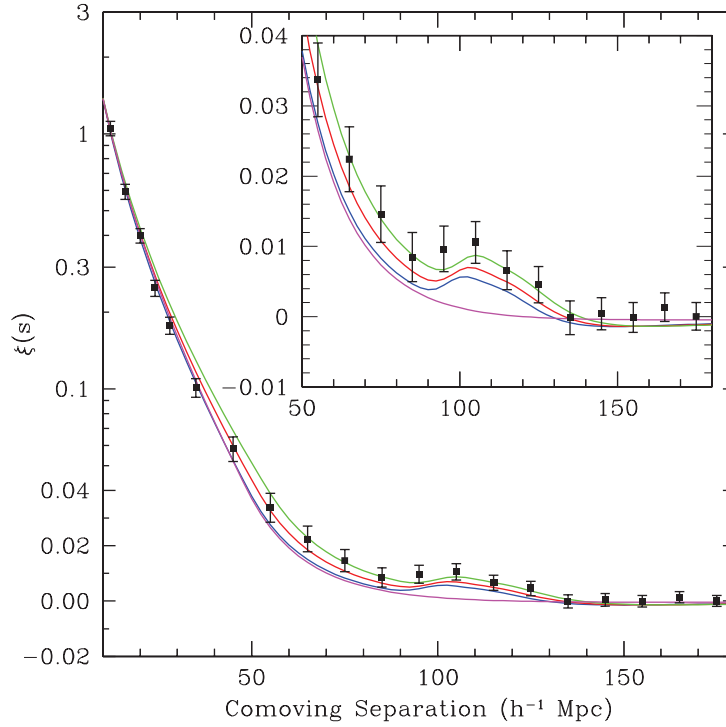


FIG. 7.3: Mesure du premier pic BAO de la fonction de corrélation à deux points [12].

et Schechter [13] ont développé un modèle théorique permettant de faire des prédictions :

$$\frac{dn(M, z)}{dM} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{\delta_c}{\sigma_M(z)} \left| \frac{d \log \sigma_M(z)}{d \log M} \right| \exp \left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M(z)^2} \right). \quad (7.37)$$

où $\delta_c \approx 1.69$ est une constante peut dépendante de la cosmologie, et $\sigma_M(z) = D(z)\sigma_M$ avec σ_M donné par l'éq.(7.23). On voit que cet observable est dépendant à la fois de la distribution statistique initiale de matière (*i.e.* du spectre de puissance) mais aussi du taux de croissance des perturbations en fonction du temps. Malheureusement cette prédiction théorique nécessite de nombreuses hypothèses et approximations. Les simulations à N-corps permettent alors de corriger les prédictions théoriques.

Durant les années 1980, le comptage d'amas indiquait que $\Omega_M < 1$. Aujourd'hui, les contraintes concernent essentiellement les paramètres σ_8 et Ω_M : $\sigma_8 = 0.8 \pm 0.1$ et $\Omega_M = 0.3 \pm 0.1$. Une plus grande précision peut être obtenue si on combine le comptage d'amas avec d'autres sondes cosmiques. Dans un futur proche, avec les sondages massifs de galaxies et/ou avec les mesures précises du CMB par Planck permettant une nouvelle façon de détecter les amas, on s'attend à de fortes contraintes cosmologiques même si un effort important devra être consenti sur le contrôle des erreurs systématiques.

Avec les mesures d'un grand nombre d'amas, il sera alors possible d'étudier leur distribution spatiale et donc de reconstruire le spectre de puissance des amas. Des informations sur la gaussianité ou non de la distribution initiale des surdensités (via les fonctions de corrélation à 3 points) pourra être obtenue et ainsi contraindre les modèles d'inflation.

• Les effets de lensing :

En relativité générale la présence d'une masse modifie le parcours des rayons lumineux. Les amas de galaxies possèdent des masses suffisamment élevées pour que ces modifications soient observables.

Le "strong lensing" correspond à des modifications très fortes de l'image d'une galaxie source. Les effets de déformation sont proportionnels aux distances séparant l'observateur, le déflecteur et la source. Si un déflecteur produit plusieurs images de plusieurs sources différentes alors on peut déterminer les paramètres cosmologiques de manière géométrique.

Le "weal lensing" correspond à des modifications faibles des images des galaxies. En particulier, l'orientation des galaxies va dépendre des propriétés du déflecteur. Cependant comme l'effet est faible, il faut moyenner sur l'ensemble des galaxies observées. On construit alors plusieurs types de fonctions de corrél-

lations à deux points qui dépendent à la fois des distances des divers objets et du spectre de puissance des fluctuations de densité. La mesure de ces observables a été réalisé récemment et les mesures du spectre de puissance sont donnés sur la figure 7.2. Ces sondes cosmiques semblent très prometteuses.

7.4 Analyses combinées

7.4.1 Méthodes statistiques

Pour estimer les paramètres cosmologiques et leurs erreurs plusieurs méthodes différentes d'inférence statistique sont utilisées en cosmologie que l'on classe en deux grandes catégories, les "fréquentistes" et les "bayésiennes", qui diffèrent par l'interprétation que l'on donne aux probabilités. Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients, et notre objectif ici n'est pas d'en faire une comparaison ni d'émettre une quelconque préférence, mais plutôt de montrer où sont appliquées les diverses méthodes statistiques qui ont été évoquées dans les cours précédents de cette école.

Pour les méthodes fréquentistes, la probabilité correspond à la fréquence d'un résultat pour une expérience répétable (cf cours d'I. Laktineh) : *la probabilité d'un évènement est le rapport du nombre de fois où l'évènement se produit sur le nombre total d'essais, lorsque ce dernier temps vers l'infini*. En pratique, on utilise la méthode du maximum de vraisemblance basée sur la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\vec{p}) = \prod_{i=1}^N f(x_i; \vec{p})$ qui est le produit des fonctions de distributions des probabilités (pdf) $f(x_i; \vec{p})$ dépendantes de la mesure x_i et des n paramètres contenu dans \vec{p} , le produit portant sur les N mesures x_i . Pour manipuler une somme plutôt qu'un produit, souvent on utilise la fonction χ^2 telle que $\chi^2 \approx -2\ln\mathcal{L}$.

On détermine alors les paramètres cosmologiques par une procédure de minimisation basée sur la méthode des moindres carrés. Les estimateurs de moindres carrés sont obtenus par le minimum de la fonction χ^2 , qui prend la forme suivante pour N mesures :

$\chi^2 = [\vec{x} - \vec{x}^{th}(\vec{p})]^T V^{-1} [\vec{x} - \vec{x}^{th}(\vec{p})]$ où \vec{x} est le vecteur des N mesures, \vec{x}^{th} est le vecteur des prédictions théoriques dépendant des n paramètres de \vec{p} pour les N observables associés aux mesures x_i . V est la matrice de covariance des mesures \vec{x} . A ce niveau, on obtient la valeur minimale du χ^2 obtenu par le fit (χ_{min}^2) ainsi que les valeurs des paramètres cosmologiques correspondant à ce minimum.

Avant d'estimer les erreurs sur les paramètres on réalise un test sur la qualité du χ^2 (cf cours de P. Lutz). Pour cela on traite le χ^2 comme une variable aléatoire et on calcule la "p-valeur" définie comme suit :

$$p - \text{valeur} = \int_{\chi_{min}^2}^{+\infty} f(\chi^2, N_{dof}) d\chi^2 \quad \text{avec} \quad f(x, i) = \frac{x^{i/2-1} e^{-x/2}}{2^{i/2} \Gamma(i/2)} \quad (7.38)$$

où $N_{dof} = N - n$ est le nombre de degrés de liberté du fit et $f(\chi^2, N_{dof})$ la pdf du χ^2 . La p-valeur est comprise entre 0 et 1, et représente la probabilité d'obtenir un échantillon de données qui à la même compatibilité avec l'hypothèse testée (*i.e.* la formulation théorique en terme des paramètres \vec{p} des observables mesurés) que les données réelles. Plus le fit est bon plus la p-valeur tend vers 1. Si la p-valeur est inférieure à 0.05 on peut commencer sérieusement à se poser des questions sur la qualité de nos données ou de notre description théorique ! Même si le seuil que l'on choisit pour définir la qualité du fit reste arbitraire ... Une méthode plus qualitative que quantitative est de simplement vérifier que $\chi_{min}^2 \approx N_{dof}$. Avec de vraies données on réalise des tests de stabilité du calcul de χ^2 par rapport aux diverses éléments de l'analyse.

Si ce test de qualité est correct alors on estime les erreurs sur les paramètres cosmologiques. A nouveau plusieurs méthodes existent pour obtenir ces erreurs. Une méthode particulièrement efficace est la technique de la propagation des erreurs au premier ordre : $\mathbf{U} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}^T$, où \mathbf{U} est la matrice de covariance des paramètres \vec{p} et \mathbf{A} le jacobien de la transformation.

Cependant, les paramètres cosmologiques sont dégénérés il est alors plus commode de représenter les contraintes sous formes d'intervalles de confiance bidimensionnels afin de voir directement les corrélations entre paramètres. Pour cela on calcule les χ^2 pour une grille de valeurs des deux paramètres dont on veut estimer une intervalle de confiance, en minimisant le χ^2 sur tous les autres paramètres. On cherche où se situe le χ_{min}^2 (déjà obtenu lors de la première étape) puis on obtient les intervalles de confiance en

trouvant les points tels que $\chi^2 = \chi_{min}^2 + \Delta$ avec $\Delta = 1, 2.3, 5.99$ pour des intervalles possédant un niveau de confiance de 39.3%, 68.3%, 95%, respectivement. Pour plus de détails sur la méthodologie ou sur les relations entre niveau de confiance, valeurs de Δ et nombre de degrés de liberté, on pourra consulter le cours de P. Lutz ou les références suivantes [14, 15].

Pour les méthodes bayésiennes, la probabilité devient une notion plutôt subjective et correspond à un degré de croyance (cf cours d'H. Prosper) : *la probabilité est une mesure du degré de croyance à partir d'une proposition*. Il faut alors définir des pdf pour chaque paramètres et la fonction de vraisemblance devient elle-même une pdf². La quantité de base pour faire de l'inférence statistique sur les paramètres est la pdf "postérieure" (ou "a posteriori") que l'on obtient à partir du théorème de Bayes :

$$p(H|d, I) = \frac{p(d|H, I)p(H|I)}{p(d|I)}. \quad (7.39)$$

Dans cette équation, H représente notre "hypothèse" comme par exemple le vecteur de paramètres \vec{p} qui sont à la base de notre description théorique (*i.e.* $H \equiv \vec{p}$). d représente les données ($d \equiv \vec{x}$). I correspond à des informations connues que l'on suppose vraies (*e.g.* a priori théorique, modèle et/ou informations venant de mesures précédentes ...). $p(H|d, I)$ est la pdf postérieure de l'hypothèse (*i.e.* de nos paramètres \vec{p}) en tenant compte des données. $p(H|I)$ est la pdf "a priori" que l'on connaît grâce aux informations I déjà en notre possession ou que l'on choisit directement. $p(d|H, I)$ est la fonction de vraisemblance ($p(d|H, I) \equiv \mathcal{L}(\vec{p})$) qui représente la distribution de l'échantillon de données quand on suppose que l'hypothèse est vraie. C'est cette fonction qui assure le transfert d'information contenu dans les nouvelles données d du "prior" vers le "posterior", et donc comment notre degré de croyance en nos paramètres \vec{p} s'est modifié. $p(d|I)$ est appelée "vraisemblance marginale" ou "évidence bayésienne", et est telle que $p(d|I) = \sum_H p(d|H, I)p(H|I)$ où la somme porte sur toutes les réalisations possibles de H . L'évidence bayésienne peut être traitée comme une simple constante de normalisation pour l'inférence statistique mais revêt un rôle fondamental si notre objectif est de comparer divers modèles d'interprétation des données. Dans ce cas on construit alors le rapport des évidences bayésiennes pour les deux modèles à comparer : $B_{01} = p(d|\mathcal{M}_0)/p(d|\mathcal{M}_1)$. Si $B_{01} > 1$ alors les données ont une préférence pour le modèle 0 plutôt que pour le modèle 1. Selon la valeur de ce rapport on définit une "force" de l'évidence : si $\ln B_{01} < 1$ on dit que l'évidence est "inconclusive", si $1 < \ln B_{01} < 2.5$ l'évidence est "faible", si $2.5 < \ln B_{01} < 5$ l'évidence est "modérée" et si $\ln B_{01} > 5$ l'évidence est "forte". Comme pour les p-valeurs dans le cas fréquentiste, le choix du seuil de réjection d'un modèle reste relativement arbitraire ...

Concernant l'inférence statistique, la pdf postérieure de nos paramètres contient toute l'information comme les valeurs moyennes, les valeurs médianes (si la distribution est non-gaussienne), les variances, les corrélations ... En général, seul un sous ensemble des paramètres \vec{p} nous intéresse, alors on construit la pdf postérieure "marginalisée" sur tous les paramètres qui ne nous intéressent pas. Par exemple, si on veut construire un contour bidimensionnel, on définit un intervalle de "crédibilité" (à opposer à l'intervalle de confiance pour les fréquentistes, mais, attention, l'interprétation est différente) à partir de notre pdf marginalisée. Soit p_1 et p_2 les deux paramètres qui nous intéressent. On décompose notre vecteur de paramètres en une partie contenant les paramètres pertinents et en une partie contenant le reste des paramètres : $\vec{p} = (\vec{p}_{12}, \vec{p}_r)$ avec $\vec{p}_{12} = (p_1, p_2)$ et $\vec{p}_r = (p_3, \dots, p_n)$. La pdf postérieure marginalisée est alors :

$$p(\vec{p}_{12}|d, I) \approx \int \mathcal{L}(\vec{p}_{12}, \vec{p}_r)p(\vec{p}_{12}, \vec{p}_r|I)d\vec{p}_r \quad (7.40)$$

La question à présent est de comment évaluer la pdf postérieure. Pour cela, on utilise très fréquemment les techniques Monte Carlo basées sur les Chaines de Markov (MCMC). L'objectif de l'algorithme est de construire une séquence de points dans notre espace des paramètres (*i.e.* la chaîne) dont la densité est proportionnelle à la pdf postérieure. Pour plus d'informations à ce sujet voir [17].

Les contours présentés sur les diverses Figures de ce cours ont été obtenues par l'une ou l'autre de ces méthodes. Jusqu'à présent aucun écart significatif sur les résultats obtenus par ces deux méthodes n'a

²Pour les puristes la fonction de vraisemblance n'est pas une distribution de probabilité car la fonction de vraisemblance est une fonction des paramètres et donc de notre hypothèse [16].

été observé, rendant la querelle entre bayésien et fréquentiste sans grand intérêt pour le moment. Notons cependant qu'en cosmologie les méthodes bayésiennes sont de plus en plus utilisées [16].

7.4.2 Résultats et limitations

La détermination des paramètres cosmologiques n'est pas exempte de problèmes. La première difficulté réside dans le fait qu'il y a beaucoup de paramètres à contraindre et que chaque sonde cosmique n'est sensible qu'à une partie d'entre eux. Malgré cela, pour chaque sonde des hypothèses supplémentaires doivent être faites afin de réduire encore le nombre de paramètres à contraindre. Ces hypothèses dépendent de la question physique que l'on se pose. Afin de fixer les idées, nous nous concentrons dans la suite sur la question de l'origine de l'accélération cosmique actuelle ou plus précisément de la nature de l'énergie noire, en supposant que les autres parties du modèle cosmologique standard sont "connues" comme les caractéristiques de l'inflation, ou la masse des neutrinos ... ce qui malheureusement n'est pas vraiment le cas et peut avoir de sérieuses conséquences sur les résultats ...

Utiliser une approche basée sur la détermination de l'équation d'état pour distinguer les divers modèles d'énergie noire est pertinent car cela permet de définir une méthode indépendante de tout modèle spécifique. Cependant les problèmes sont nombreux dont voici une liste minimale :

- Nécessité de définir une paramétrisation :

La caractérisation de l'énergie noire passe, au moins, par la connaissance d'un nombre (Ω_X) et de deux fonctions $w_X(z)$ et $w'_X(z)$. Malheureusement, les données observationnelles ne peuvent pas contraindre un nombre élevé de paramètres. Des études récentes montrent que l'on peut espérer contraindre au plus deux paramètres caractérisant $w_X(z)$ [18]. Avec les analyses combinées ce chiffre peut sans doute augmenter un peu mais cela reste à étudier. Il faudrait donc avoir une intuition physique pour imaginer grossièrement la forme de ces fonctions, ce qui est très audacieux aujourd'hui vu le grand nombre de modèles proposés. Cependant, un consensus se forme autour de l'utilisation de la paramétrisation suivante [19] :

$$w_X(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z} \quad (7.41)$$

qui semble posséder des propriétés intéressantes et en particulier reproduit correctement bon nombre de modèles (voir [7] pour plus de détails). En particulier, w_0 est la valeur de l'équation d'état aujourd'hui, et w_a est une mesure de la variation temporelle $w'_X \equiv dw_X/d \ln a$:

$$w_a \equiv (-w'_X/a)|_{z=1} = -2w'_X(z=1). \quad (7.42)$$

Bien-entendu, cette description à deux paramètres ne peut pas décrire toutes les dynamiques possibles et afin d'éviter une possible interprétation erronée, les résultats issus de différentes méthodes devront être confrontés.

- Dégénérescence des paramètres cosmologiques :

Une fois une paramétrisation de $w_X(z)$ choisie on peut définir l'ensemble des paramètres cosmologiques intervenant dans le paramètre de Hubble $H(z)$ (voir éq.(7.16)), à savoir Ω_M , Ω_X , w_0 et w_a . Les distances ou l'évolution de la croissance des structures, qui sont mesurées expérimentalement, sont reliés au niveau de la théorie au paramètre de Hubble $H(z)$ à travers une relation intégrale (éq.(7.5), éq.(7.7) et éq.(7.29)). Ces relations intégrales vont produire de très fortes dégénérescences entre les divers paramètres [20], ce qui rend leur détermination difficile. Par exemple, la figure 7.4 donne les contraintes sur les paramètres Ω_M et Ω_Λ à partir des sondes cosmiques SNIa, CMB et BAO.

On constate que les contraintes issues de chaque sonde individuellement restent modestes, alors que la combinaison des sondes et des informations qu'elles contiennent réduit considérablement les erreurs. Apparemment, on obtient une interprétation claire de l'accélération cosmique [10] : 30% de matière, 70% de constante cosmologique dans un univers plat.

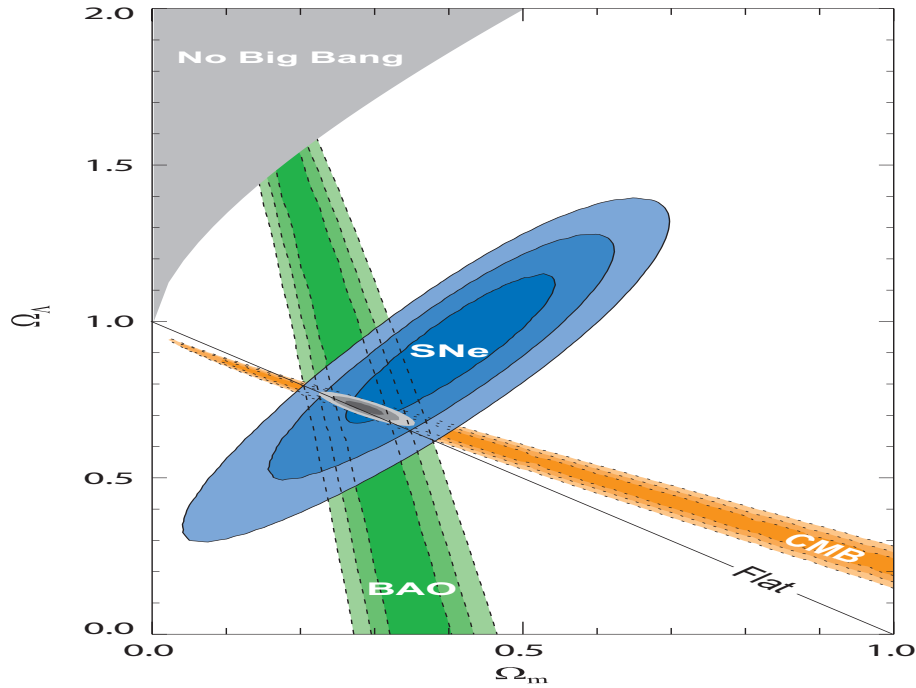


FIG. 7.4: Contours dans le plan Ω_M - Ω_Λ à partir des observations de SNIa, des BAO et du CMB. Les contraintes sont données pour chaque sonde séparément ou en les combinant, pour des degrés de confiance de 68.3%, 95.5% et 99.7% [21].

Cependant, ces résultats sont obtenus avec de nombreuses hypothèses sous-jacentes, comme par exemple que l'énergie noire est une constante cosmologique. Si une des hypothèses est fautive alors il est probable que nos résultats soient biaisés et donc notre interprétation erronée, sans que cela soit détectable par un test sur la qualité du fit. Ceci est illustré sur la figure 7.5 qui montre comment ces biais dus à l'hypothèse $w = -1$, si elle est fautive, peuvent nous faire croire à un univers plat avec constante cosmologique, alors qu'en réalité l'univers est courbe avec une énergie noire dynamique !

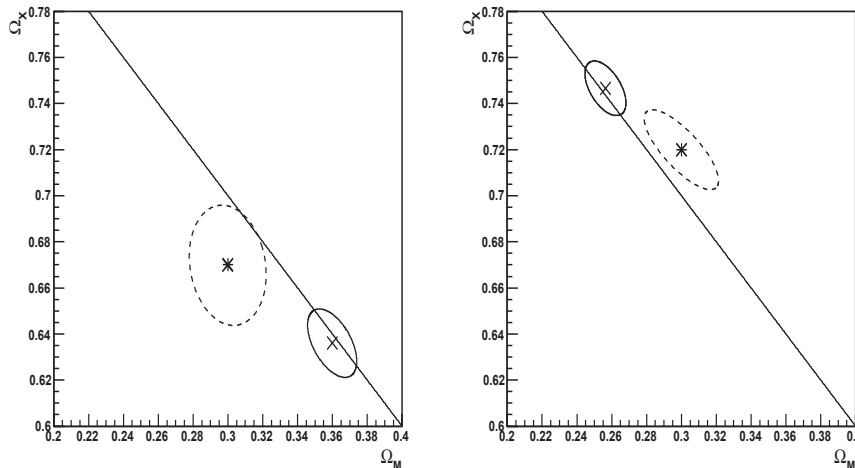


FIG. 7.5: Contours à 68.3% de confiance dans le plan (Ω_M, Ω_X) pour les sondages prévus vers 2010. Le plot de gauche (droite) correspond à une cosmologie fiducielle $\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.67$, $w_0^F = -0.9$ et $w_a^F = 0.5$ ($\Omega_M^F = 0.3$, $\Omega_X^F = 0.72$, $w_0^F = -0.9$ et $w_a^F = -1.5$). Les courbes pleines (pointillées) sont obtenues pour des fits avec (sans) l'hypothèse que l'énergie noire est une constante cosmologique. La droite correspond aux univers plats. Tirés de [22].

Les résultats sur les paramètres w_0 et w_a de l'équation d'état de l'énergie noire sont donnés sur la figure 7.6. On constate que la constante cosmologique est au bord du contour à 95% de confiance. Le meilleur fit est obtenu pour $w_0 = -1.10$ et $w_a = 0.57$, ce qui correspond à un modèle particulièrement exotique

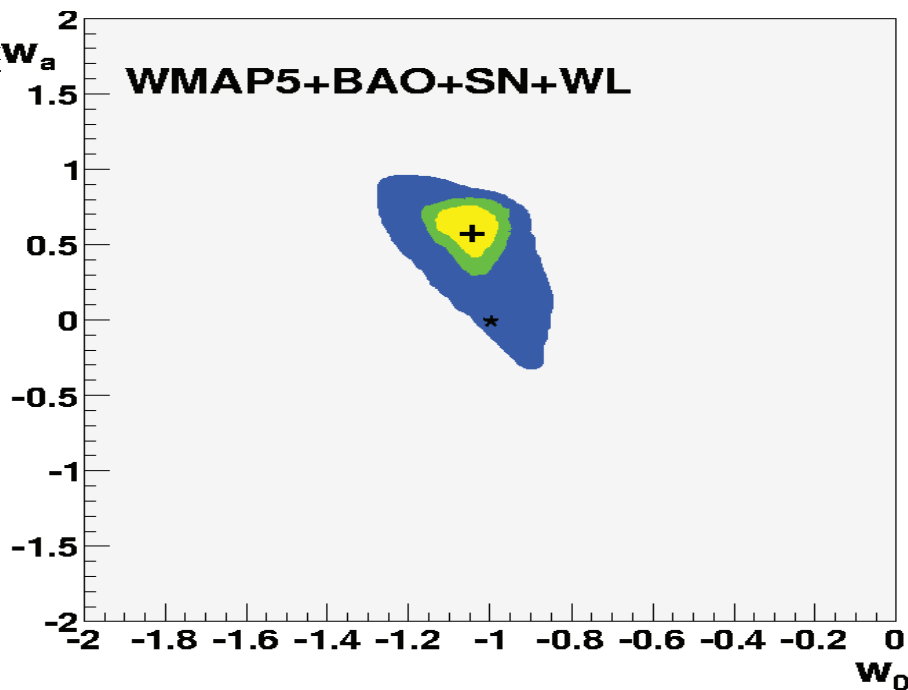


FIG. 7.6: Contours dans le plan w_0 - w_a à partir des observations de SNIa, des BAO, du Weak Lensing et du CMB. Les contraintes sont données pour chaque sonde séparément ou en les combinant, pour des degrés de confiance de 38.3%, 68.3% et 95% [23]. La croix correspond au meilleur fit et l'étoile à la constante cosmologique.

indiquant une dynamique relativement complexe. Cependant, plusieurs classes de modèles d'énergie noire restent compatibles avec les données actuelles qui ne sont pas encore assez contraignantes. Ces résultats sont obtenus en supposant, entre autre, que l'univers est plat. De nouveau on peut montrer que si cette hypothèse est fautive, des biais indétectables peuvent être présents et fausser notre interprétation [22].

On en déduit donc que cette dégénérescence géométrique, résultant de la relation intégrale entre paramètres et observables, est un sérieux handicap à la détermination cohérente des paramètres cosmologiques. Cependant la combinaison des sondes cosmiques permet de remédier à ce problème, d'une part en réduisant fortement les dégénérescences, et d'autre part, en évitant de devoir faire un nombre trop important d'hypothèses. Malheureusement, même dans un cadre d'analyses combinées des suppositions doivent être faites ce qui nécessite la mise en place de tests de cohérence afin d'éviter des biais potentiels et un meilleur contrôle des erreurs systématiques ...

- Nécessité de tenir compte de la croissance des structures et/ou d'autres tests :

Il apparaît que plusieurs modèles d'énergie noire issus de classes différentes (nouveau fluide ou nouvelles équations) peuvent correspondre exactement aux mêmes équations d'état effectives. L'équation d'état et sa dérivée ne sont donc plus suffisantes pour caractériser les modèles d'énergie noire. Il faut utiliser d'autres observables qui vont aller plus loin dans la distinction entre modèles. De grands espoirs se fondent sur les contraintes que l'on peut obtenir à travers l'étude de la croissance des structures. Par exemple, Linder a montré récemment [24] qu'une paramétrisation du facteur de croissance pourrait être utile à la distinction des modèles respectant ou non la relativité générale. Plus précisément, on introduit l'"index de croissance" γ à travers le taux de croissance f (équ.(7.30)) qui est défini à partir du taux de croissance solution de l'éq.(7.27) :

$$f \approx \Omega_M^\gamma(z), \quad (7.43)$$

avec $\gamma = 0.55 + 0.02w(z=1)$ [24]. On constate que la dépendance sur $w(z)$ est très faible et donc cette valeur de γ est caractéristique de l'éq.(7.27) obtenue dans le cadre de la relativité générale. Si l'accélération est due à une modification de cette théorie, alors l'index de croissance γ devrait y être sensible.

Cependant, pour certains modèles, en particulier ceux issus de la physique des hautes énergies, il sera nécessaire de tenir compte de nombreux tests différents, comme les résultats du LHC sur l'existence de nouvelles particules, forces ou symétries, les tests locaux de la relativité générale, la vérification de la relation de dualité entre distances (*i.e.* relation entre $d_L(z)$ et $d_A(z)$, voir équ.(7.9)), le test de l'équation de

Poisson ou encore le test du principe d'équivalence Cette problématique est relativement bien décrite dans [25].

En conclusion, de nombreuses mesures de nature différente avec une haute précision doivent être réalisées, et des analyses statistiques rigoureuses accompagnées de divers tests de cohérences doivent être menées afin d'obtenir une interprétation fiable du modèle cosmologique.

Remerciements :

Je tiens à remercier chaleureusement les organisateurs de cette école fort intéressante, et en particulier Jérôme Baudot pour son organisation impeccable, Olivier Leroy pour son invitation et Arnaud Lucotte sans qui ce texte n'aurait jamais vu le jour. Un grand merci aussi à mes collaborateurs marseillais du Centre de Physique Théorique (P. Taxil, C. Marinoni et S. Linden), du Centre de Physique des Particules de Marseille (A. Ealet, A. Tilquin, C. Tao, D. Talon, D. Fouchez et A. Bonnissent) et du Laboratoire d'Astrophysique de Marseille (A. Mazure, C. Schimd, J.-P. Kneib, S. Basa et O. Lefèvre)

Références

- [1] E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Science **15** (1929) 168.
- [2] G. Gamow, Phys. Rev. **70** (1946) 572 ; Alpher, H. Bethe et G. Gamow, (1948) Phys. Rev. **73** (1948) 803
- [3] P.J.E. Peebles, Astrophys. J. **146** (1966) 542.
- [4] A.A. Penzias et R.W. Wilson, Astrophys. J. **142** (1965) 419.
- [5] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, New York Academic Press, 2003 ; T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press, 1993 ; J. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993.
- [6] P.J.E. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003) ; E. Copeland, M. Sami et S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. **D15** (2006) 1753.
- [7] E.V. Linder, Gen. Rel. Grav. **40** (2008) 329.
- [8] T. Padmanabhan, Phys. Rept. **380**, 235 (2003) ; T. Padmanabhan, Current Science, **88**, 1057 (2005).
- [9] S.M. Carroll, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001) ; S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [10] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **180** (2009) 330.
- [11] M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], Astrophys. J. **606** (2004) 702.
- [12] D.J. Eisenstein *et al.* [SDSS Collaboration], Astrophys. J. **633** (2005) 560.
- [13] W. Press et P. Schechter, Astrophys. J. **187** (1974) 425.
- [14] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. **B667** (2008) 1 .
- [15] F. James, *Statistical Methods in Experimental Physics*, 2nd édition World Scientific, 2007.
- [16] R. Trotta, Contemp. Phys. **49** (2008) 71.
- [17] C.P. Robert et G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd édition Springer, New-York, 2004 ; D. Garmann et H. Lopes, *Markov Chain Monte Carlo : Stochastic simulation for Bayesian Inference*, 2nd édition Chapman & Hall, Boca Raton (USA), 2006.
- [18] E.V. Linder et D. Huterer, Phys. Rev. **D72**, 043509 (2005).
- [19] E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **90**, 091301 (2003) ; M. Chevallier and D. Polarski, Int.J.Mod.Phys. **D10**, 213 (2001).
- [20] G. Efstathiou and J.R. Bond, Mon. Not. R. Astron Soc. **304**, 75 (1999) ; I. Maor, R. Brustein et P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **86**, 6 (2001).
- [21] M. Kowalski *et al.*, Astrophys. J. **686** (2008) 749.
- [22] J.-M. Virey *et al.*, J. Cosmo. Astropart. Phys. **0812** (2008) 008.
- [23] A. Tilquin *et al.*, en préparation.
- [24] E.V. Linder et R.N. Cahn, Astropart. Phys. **28** (2007) 481.
- [25] R. Bean, S. Carroll et M. Trodden, arXiv astro-ph/0510059 ; J.-P. Uzan, Gen. Rel. Grav. **39** (2007) 307.