Cours Cosmo L2

Simon Comp OCEVU 23/6/15 ①

I Analyse dimensionelle / Ordre de grandeur

• t_U $H_0 = 72$ km/s/Mpc $\quad [H_0] = \frac{L}{TL} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow t_U \sim \frac{1}{H_0}$

$$H_0 = \frac{72 \; 10^3 \; m}{s \cdot 3{,}27 \, 10^6 \, 3 \, 10^8 \frac{m}{s} \, 365{,}24 \times 24 \times 3600 \; s} = 2{,}33 \; 10^{-18} \; s^{-1} \Rightarrow t_U \sim 13{,}6 \; 10^9 \text{ an} \quad (= t_U \text{ Planck!})$$

$$\left(1 \text{ pc} = 3{,}27 \text{ AL} \qquad 1 \text{ AL} = c \, t_{1an} = 3 \, 10^8 \frac{m}{s} \, \frac{\overbrace{365{,}25 \times 24 \times 3600 \; s}^{1an = 3{,}15 \, 10^7 s}}{1 an}\right)$$

• ρ_c : $[\rho_c] = M L^{-3}$ gravitation : $[G] = \left[\frac{(F=ma) \cdot r^2}{m m'}\right] = M^{-1} L^3 T^{-2} \Rightarrow [\rho] \sim \left[\frac{H_0^2}{G}\right]$

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8\pi G} = 10^{-26} \; kg/m^3 = 6 \text{ protons}/m^3$$

$\left(\sim N_A = 6 \, 10^{23} \; P/g \quad 1 m^3 = 10^6 g \quad 6 \, 10^{29} \; P/m^3 \text{ pour matière ordinaire}\right)$

• R_U : $v_{exp} = H_0 r \Rightarrow$ si $r \gg 1$ alors $v_{esp} > c$: aucune info ne peut nous parvenir $\Rightarrow$ Univers est noir

$v_{exp} = c$ pour $r = R_U$: Horizon classique de l'univers

$$\Rightarrow c = H_0 R_U \Rightarrow R_U = \frac{c}{H_0} = \frac{3 \, 10^8}{2{,}3 \, 10^{-18}} = 1{,}29 \, 10^{26} \; m = 13{,}6 \; 10^9 \text{ AL}$$

Qq soit taille de l'univers (∞ ou non), 1 observateur est au centre d'une sphère d'information de rayon R_U qui délimite l'univers observable classique

En fait, si on tient compte de la dynamique dans le cadre de la RG et du modèle ΛCDM alors :

$R_U \rightarrow z \simeq 1{,}5$, Horizon des evenements $\simeq 46 \; 10^9$ AL $(3{,}3 R_U)$

• $M_U = \rho_c \frac{4}{3}\pi R_U^3 = \overbrace{(8{,}67 \; 10^{52} \; kg)}^{10^{53} kg} \sim 5 \, 10^{79}$ protons

• $N_{g/U}$: $M_g \sim 10^{11} M_\odot \quad M_\odot \sim 2 \, 10^{30}$ kg $\Rightarrow N_{g/U} \sim 3 \, 10^{11}$ (Aujourd'hui on en voit 10^5)

(2)

II Equations du fond Cosmologique

1°) 1ère équation de Friedman

• Raisonnement classique :

Galaxie en P, masse m, à la vitesse d'expansion : $v = HR$

et est soumise au potentiel gravitationnel de la sphère de rayon R : $U = -\frac{GMm}{R}$

($\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u_r}$ $\quad dU = -dW = -\vec{F}\cdot\vec{dr} = \frac{GMm}{r^2}dr$

$U = \int \frac{GMm}{r^2}dr = -\frac{GMm}{r} + c_U$

$U(r \to +\infty) = 0 = c_U$)

La masse de la sphère de rayon R est tq : $M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\Rightarrow U = -mG\frac{4}{3}\pi R^2 \rho$$

L'énergie cinétique de la galaxie de masse m est : $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mH^2R^2$

L'énergie mécanique ——— : $E_m = K + U = \frac{1}{2}mH^2R^2 - mG\frac{4\pi}{3}\rho R^2$

F_G conservative, conservation de E_m $\Rightarrow E_m = d\left(= -\frac{k}{2}m\right)$

Choisissons le cas particulier $E_m = 0$ $\quad (v_\infty = 0)$

{ $E_m < 0$: état lié ⇒ expansion puis contraction Big Crunch
$E_m \geq 0$: état libre ⇒ expansion infinie

$$\Rightarrow \boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho}$$

densité critique $\boxed{\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}}$

si plusieurs fluides : $\boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3}\sum_i \rho_i}$ $\quad \rightarrow 1 = \sum_i \Omega =$

paramètres de densité : $\boxed{\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}}$

$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \quad \Omega_R = \frac{\rho_R}{\rho_c} \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad \rho_k = -\frac{3kc^2}{8\pi G a^2}$

$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \quad \Omega_k = \frac{\rho_k}{\rho_c}$

Remarquons que : $v = \dot{R} = HR \Rightarrow \boxed{H = \frac{\dot{R}}{R}}$

→ si $E_m \neq 0 = -\mathcal{E}$ alors $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{2\mathcal{E}}{mR^2} \sim \frac{1}{R^2}$: terme de courbure

$\mathcal{E} = 0$: cas limite (plat)
$\mathcal{E} > 0$: fermé (lié)
$\mathcal{E} < 0$: ouvert (libre)

• Raisonnement RG : $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$ ← constante cosmologique

a : facteur d'échelle $R(t) = a(t)R_0$ $\quad$ k = 0 : plat $\quad$ k = 1 : fermé sphérique $\quad$ k = −1 : ouvert/hyperbolique

(II) Equations du fond cosmologique) suite

2°) Conservation de l'énergie

• Définitions

Distribution de matière étant très diluée → gaz (parfait) / fluide

propriétés : densité (en masse, masse volumique) : ρ $\quad [\rho] = M L^{-3}$

pression : P $\quad [P] = \left[\frac{F = ma}{S}\right] = M L^{-1} T^{-2}$

équation d'état : $P \equiv P(\rho, T)$ dépendance en T négligeable en cosmologie (pas dans l'Univ. primordial)

$\Rightarrow P \equiv P(\rho)$.

Pour les fluides les + simples, ceux qui nous concernent, dit fluides "barotropiques"

$$w = \frac{P}{\rho c^2}$$

Matière non relativiste : $w \sim \frac{v}{c} \to 0$

Radiation (matière relativiste) : $w = 1/3$ (Pression de radiation)

• Equation d'évolution de la densité :

~~Ex~~ L'univers est rempli de façon homogène d'un fluide. L'univers est en expansion ⇒ au cours du temps le volume occupé par un certain nb d'élt du fluide augmente ⇒ un travail est effectué au niveau du fluide :

$$dW = P\, dV$$

→ raisonnement Energétique :

$E_m = K + U \qquad dE_m = dK + dU \qquad$ cons $E_m \Rightarrow dU = -\underset{\text{Th } E_c}{dK} = -dW = -PdV$

→ raisonnement Thermodynamique :

$dQ = dU + dW$ Univers homogène ⇒ flux de chaleur identiques partout (pas de zone chaude ou froide)

$\Rightarrow dQ = 0$: processus adiabatique $\Rightarrow \boxed{dU = -dW = -PdV}$

→ Raisonnement RG :

Relation de continuité de l'energie-impulsion $\mathcal{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$\mathcal{D}_\mu$: dérivée covariante

$T^{\mu\nu}$: tenseur énergie-impulsion

⇒ m̂ équation que cas classique !

Considérons un volume élémentaire de type sphérique (afin de respecter les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité) ④

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 4\pi R^2\, dR \quad \Rightarrow \quad \dot V = 4\pi R^2 \dot R$$

or $$dW = P\,dV \quad \Rightarrow \quad \dot W = P \dot V = 4\pi R^2 P \dot R$$

et $$dU = -P\,dV \quad \Rightarrow \quad \dot U = -P\dot V = -4\pi R^2 P \dot R$$

or $$U = mc^2 = \rho V c^2 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 c^2$$

$$\Rightarrow \dot U = \dot\rho \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^{\cancel{3}} c^2 + \rho \cancel{4\pi R^2} c^2 \dot R = -\cancel{4\pi R^2} P \dot R$$

$$\Rightarrow \dot\rho + 3\frac{\dot R}{R}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot\rho + 3\frac{\dot R}{R}\rho(1+w) = 0}$$

or $$H = \frac{\dot R}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot\rho + 3H\rho(1+w) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot\rho}{\rho} = -3H(1+w) = \frac{d\ln\rho}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\ln\rho = -3(1+w)\,H\,dt$$

$\Rightarrow$ PAUSE comme on ne connait pas $H(t)$?

---

or $$H\,dt = d\ln a = -d\ln x = -d\ln(1+z) \qquad \left(x = 1+z = \frac{a_0}{a}\right)$$

$$dt = \frac{da}{\dot a} = \frac{1}{H}\frac{da}{a} = \frac{1}{H}\, d\ln a$$

$$\Rightarrow d\ln\rho = 3(1+w)\, d\ln x \;(= 3\,d\ln x + 3w\, d\ln x)$$

$$\Rightarrow \ln\rho = \int 3(1+w)\, d\ln x + \text{cst} \quad \Rightarrow \quad \rho(z) = \rho_0\, e^{\int_1^{1+z} 3(1+w)\, d\ln(1+z)}$$

$$\rho(z) = \rho_0\, e^{\int_1^{1+z} 3\, d\ln x}\, e^{\int_1^{1+z} 3w\, d\ln x} = \rho_0 (1+z)^3 e^{\int_1^{1+z} 3w\, d\ln x} \overset{w = \text{cste}}{=} \rho_0 (1+z)^{3(1+w)}$$

matière non relativiste : $w = 0 \Rightarrow \rho(z) = \rho_0 (1+z)^3 \sim a^{-3}$

radiation : $w = 1/3 \Rightarrow \rho(z) = \rho_0 (1+z)^4 \sim a^{-4}$

courbure : $w = -1/3 \Rightarrow \rho(z) = \rho_0 (1+z)^2 \sim a^{-2}$

Λ : $w = -1 \Rightarrow \rho(z) = \rho_0$

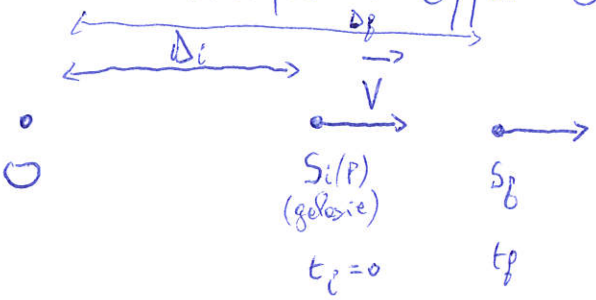
3) Redshift ou décalage vers le rouge :

Ce qu'on mesure c'est un décalage vers le rouge des longueurs d'ondes de la lumière reçue par les étoiles des galaxies

Spectre atomique ont des λ caractéristiques : $\lambda_E = \lambda(t_E)$

On les reçoit avec un décalage : $\lambda_R = \lambda_0 = \lambda(t_0)$ $\quad t_0 =$ aujourd'hui

- Interprétation classique : effet Doppler



onde se déplace à la vitesse c

Source :

$t_i = 0$: émission du début du signal périodique, S_i est à la position D_i

$t_f = T_E$: émission de la fin du signal périodique, S_f est —— D_f

source se déplace à la vitesse $V \Rightarrow D_f = D_i + V\,T_E$

Recepteur :

début signal reçu à $t_{Ri} = \dfrac{D_i}{c}$

fin ——

$$t_{Rf} = T_E + \frac{D_f}{c} = \frac{D_i}{c} + T_E\frac{V}{c} + T_E = T_E\left(1+\frac{V}{c}\right) + \frac{D_i}{c}$$

la période au récepteur du signal périodique vaut : $T_R = t_{Rf} - t_{Ri} = T_E\left(1+\frac{V}{c}\right)$

Longueur d'onde :

Par définition $\lambda = cT \Rightarrow \dfrac{\lambda_R}{\lambda_E} = \dfrac{T_R}{T_E} = 1 + \dfrac{V}{c} \equiv 1+z \Rightarrow \boxed{z = \dfrac{V}{c}}$

⚠ cette relation est fausse dans le cas relativiste

en effet si $V = c$ ($R = R_V$ classique) alors $z = 1$ et pourtant on voit des objets avec $z > 1$ ..... $\Rightarrow$ relation correcte uniquement si $V \ll c$ ($V \lesssim \frac{c}{10}$)

- Définition z :

$$\boxed{1 + z = \frac{\lambda_R}{\lambda_E}}$$

- z et facteur d'échelle $a(t)$

↪ t_0 : On définit t_0 = aujourd'hui $(= t_U)$

t est le temps dans le passé , $t=0$: début de l'Univers

↪ $a(t)$: facteur d'échelle tel que : $\boxed{R(t) = a(t)\, R_0}$

(on peut voir $R_0 = R_U$ où $v_{exp} = c$?, mais cette relation est vraie pour les longueurs dites "comobiles" # → ♯)

Par définition : $R(t_0) = R_0 = a(t_0)\, R_0 = a_0 R_0 \Rightarrow a_0 = 1$

$a(t)$: représente le facteur de dilatation de l'espace due à l'expansion de l'Univers

Rq : en fait de "contraction" vu qu'on regarde dans le passé, en effet

$a(t=0) = 0$ et $a_0 = 1 \Rightarrow 0 \underset{(<)}{\leq} a \leq 1$

↪ Lien entre z et $a(t)$:

Un photon reçu aujourd'hui possède une longueur d'onde tq : $\lambda_0 = c\,T_0 = c\,T_R$ ($= \lambda_R$)

Ce photon a été émis au temps t avec $\lambda = c\, T_E = \lambda_E$

Par définition de $a(t)$ ces longueurs sont reliées par : $\lambda(t) = a(t)\, \lambda_0$

La définition de $z \Rightarrow$ $\boxed{1 + z = \frac{\lambda_R}{\lambda_E} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{1}{a}}$

- Lien entre le temps, H, a et z :

$R = a R_0 \Rightarrow \dot{R} = \dot{a} R_0 \Rightarrow H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{a\,dt} = \frac{d\ln a}{dt} \Rightarrow \boxed{d\ln a = H dt}$

$x = 1+z = \frac{1}{a} \Rightarrow dx = d(1+z) = -\frac{da}{a^2} = -\frac{1}{a} d\ln a = -x H dt \Rightarrow \boxed{d\ln x = H dt = -d\ln a}$

↪ on peut à présent calculer les $\rho(z)$!! et $H(z)$ (↪ retour p(4))

4°) 2nde équation de Friedman et paramètre de décélération

Le 2nd éq de Friedman est associée à $\ddot{a}$ ou + précisément à $\frac{\ddot{a}}{a}$

$\Rightarrow$ on dérive $\# \grave{a}\ t$ la 1ère éq de Friedman :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \Rightarrow \cancel{\ell}\,\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} \underset{\text{eq continuité}}{=} -\cancel{8}\pi G \cancel{H}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = H^2 - 4\pi G\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\rho - 4\pi G\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = -4\pi G\left[\rho\underbrace{\left(1 - \tfrac{2}{3}\right)}^{1/3} + \frac{P}{c^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1+3w)$$

On définit le paramètre de décélération par : $[q] = 1$

$$q(z) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{4\pi G\rho}{3H^2}(1+3w)$$

$\Rightarrow$ L'univers décélère si $q<0 \Rightarrow 1+3w<0 \Rightarrow \boxed{w < -\frac{1}{3}}$

C'est la propriété de base de l'énergie noire ! (: fluide tq $w<-1/3$)

La constante cosmologique possède cette propriété : $w = -1$

5°) Distances et observables :

Les mesures donnent accès à z et aux Ω_i et H_0 $\Rightarrow$ on reformule 1ère éq de Friedman

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\sum_i \rho_i \underset{\uparrow}{=} \frac{8\pi G}{3}\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}\rho_c^0 = H_0^2 \sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)} \Rightarrow E^2(z) = \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}$$

et $\rho_i(z) \underset{w_i = \text{cste}}{=} \rho_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)} = \rho_c^0 \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}$

$$\Rightarrow E^2(z) = \Omega_R^0(1+z)^4 + \Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_k^0(1+z)^2 + \Omega_\Lambda + \Omega_X(1+z)^{3(1+w_X)}$$

En RG les distances sont proportionnelles à : $\frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{E(z)}$