Exercices supplémentaires (Seconde édition – 2016) : chapitre 2

E2.11,5 – Trajet en train
Vous êtes responsable de la sécurité ferroviaire et en particulier d'un train allant de Marseille à Aubagne. Le trajet, d'une longueur L doit être le plus rapide possible. Vous allez donc utiliser le train au mieux de ses capacités à l'aide son accélération maximale, notée a_1, et de sa décélération maximale, notée a_2.
1) Déterminer le moment et la position où le conducteur du train devra inverser la vapeur (passer du mode accéléré au mode décéléré, on considérera ce passage comme instantané).
2) Combien de temps dure le trajet ? Quelle est la vitesse maximale du train ?
3) Vérifier la cohérence de votre résultat à l'aide du cas $a_1 = a_2$.
4) Application Numérique : $L = 10\,km$, $a_1 = 0.2\,m/s^2$, $a_2 = 0.8\,m/s^2$.

E2.12,5 – Un géophysicien dans une grotte
Un géophysicien, de hauteur $h = 1,8\,m$, se promène dans une grotte quand il voit une goutte d'eau passer devant son visage et aller s'écraser au sol. Saisi d'inspiration, il attend qu'une autre goutte chute et mesure le temps mis par celle-ci à parcourir l'espace entre le sommet de son visage et le sol. Il trouve un intervalle de temps $T = 0,2\,s$. Quelle était la hauteur H de la grotte à l'endroit où se trouvait le géophysicien ? On suppose que les forces de frottements exercées par l'air sont négligeables et que seul le poids de la goutte intervient, ainsi son accélération est constante, d'intensité $g = 10\,m/s^2$, verticale et orientée vers le bas.
Indice : Nous vous conseillons d'utiliser deux référentiels différents et de suivre un raisonnement passant par le calcul de la vitesse de la goutte au niveau du sommet du visage du géophysicien mais tout autre type de raisonnement bien détaillé et bien justifié est évidemment accepté.

E2.13,5 – Arrestation
Un conducteur de moto roule avec une vitesse constante v_M. Il passe devant une école où la vitesse est limitée à la valeur v_L. Un agent de police voyant l'infraction effectue un départ arrêté depuis l'école et lance sa propre moto dans une course poursuite avec une accélération constante a_P. On supposera que tous les mouvements s'effectuent en ligne droite.
1) Quel temps se passe-t-il avant que le policier ne rejoigne le motard ? Représenter la situation par un graphique que vous commenterez.
2) Quelle est la vitesse de l'agent de police à ce moment là ?
3) À cet instant, quelle distance ont parcourue les véhicules ?
4) Application Numérique : $v_M = 54\,km/h$, $v_L = 30\,km/h$ et $a_P = 3\,m/s^2$.

E2.21,5 – Merci les pompiers !
Un feu se déclenche dans un bâtiment. Des pompiers avec un trampoline sont sur place et se trouvent à une distance L du bâtiment en feu. Une personne se trouvant sur le toit-terrasse, à une hauteur $H = 10\ m$ par rapport au sol, se lance dans la direction des pompiers avec une vitesse $v_0 = 6\ m/s$ qui forme un angle $\alpha = +\pi/4$ par rapport à la direction horizontale. On suppose les forces de

frottements exercées par l'air négligeables, et que seul le poids de la personne intervient, ainsi son accélération est constante, d'intensité $g = 10\ m/s^2$, verticale et orientée vers le bas. Pour toutes les questions, on donnera tout d'abord l'expression littérale et seulement après on fera l'application numérique.

1) Quelle est l'équation de la trajectoire suivie par la personne dans son mouvement de chute ? On pensera à détailler le calcul.

2) À quelle distance du bâtiment tombera-t-elle ?

3) Combien de temps s'écoule entre l'instant où la personne commence le saut et l'instant où elle arrive au sol ?

4) Quelle est la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la personne juste avant l'arrivée au sol ?

5) En voyant la personne sauter du haut du bâtiment, les pompiers se mettent à courir pour la sauver (en portant le trampoline) avec une vitesse constante $V_p = v_0$. Les pompiers se mettent à courir à l'instant où la personne commence son saut. On suppose que la course des pompiers et la chute de la personne ont lieu dans un même plan. À quelle distance maximale L_{max} du bâtiment doivent se trouver initialement les pompiers afin d'être capables de sauver la personne ?

6) Pour avoir le plus de chance de survivre, la personne a tout intérêt à ce que cette distance maximale L_{max} soit la plus grande possible. Donc, en gardant toujours la même vitesse de départ v_0, quel angle de lancement devrait elle plutôt choisir parmi les deux valeurs $\alpha = \pi/4$ et $\alpha = 0$? Justifier votre réponse en calculant la distance L_{max} du cas $\alpha = 0$. Commenter votre résultat.

Exercices supplémentaires (Seconde édition – 2016) : chapitre 3

E3.9,5 – Mouvement vertical avec frottements constants
Vous lancez verticalement un objet de masse m depuis le sol. Il est soumis à une force de frottements d'intensité constante notée f. Montrer que le temps de montée est plus court que le temps de descente.

E3.10,5 – Équilibre de 2 solides sur un plan incliné
On considère une situation d'équilibre statique entre deux blocs A et B faits de différentes matières, mais de masses identiques $m_A = m_B = m$, sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale (voir figure 1). Les coefficients de frottements statiques des deux blocs sur le plan sont pour A et B, respectivement μ_A et μ_B (avec $\mu_A > \mu_B$).
1) Reprendre la figure 1 en indiquant de façon claire toutes les forces qui s'appliquent sur les blocs A et B.
2) Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le bloc A, puis pour le bloc B.
3) Projeter les relations précédentes sur les axes du repère indiqué sur le schéma.
4) À l'aide du principe d'action-réaction, que l'on énoncera clairement, déterminer la relation entre les coefficients de friction μ_A et μ_B et l'angle limite θ_L que la pente ne doit pas dépasser afin que les blocs soient en équilibre (statique).
5) Dans le cas limite $\theta = \theta_L$, déterminer l'intensité de la force exercée par le bloc A sur le bloc B en fonction de m, g, $\cos\theta_L$, μ_A et μ_B. Pourquoi la condition $\mu_A > \mu_B$ doit-elle être satisfaite ?

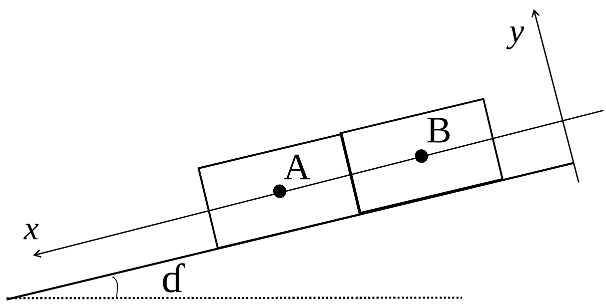

FIGURE 1 – Équilibre de 2 solides sur un plan incliné

E3.10,6 – Équilibre de 3 solides sur un plan incliné
On considère une situation d'équilibre statique entre trois blocs A, B et C faits de différentes matières, mais de masses identiques $m_A = m_B = m_C = m$, sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale (voir figure 2). On va chercher à déterminer, en l'absence de mouvement, l'intensité de la force $\overrightarrow{F}_{C/B}$ exercée par le bloc C sur le bloc B. Les coefficients de frottements statiques des trois blocs sur le plan sont pour A, B et C, respectivement μ_A, μ_B et μ_C.
1) Reprendre la figure 2 en indiquant de façon claire toutes les forces qui s'appliquent sur le bloc central B.

2) Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le bloc A, puis pour le bloc B et enfin pour le bloc C.
3) Projeter les relations précédentes sur les axes du repère indiqué sur le schéma.
4) À l'aide du principe d'action-réaction, que l'on énoncera clairement, déterminer la relation entre les coefficients de friction μ_A, μ_B, μ_C et l'angle limite θ_L que la pente ne doit pas dépasser afin que les blocs soient en équilibre (statique).
5) Dans le cas limite $\theta = \theta_L$, déterminer l'intensité de la force $\overrightarrow{F}_{C/B}$ exercée par le bloc C sur le bloc B, en fonction de m, g, $\cos\theta_L$, μ_A, μ_B et μ_C.

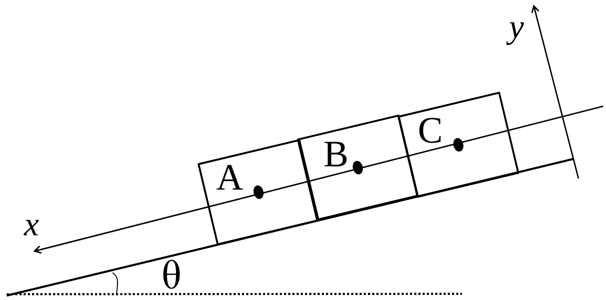

FIGURE 2 – Équilibre de 3 solides sur un plan incliné

E3.17,5 – Ballon lancé en l'air

Une personne, située sur le sol, lance un ballon de masse m verticalement vers le haut, selon l'axe Oz. Le ballon est soumis à son poids et à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -b\,\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse et $b > 0$ une constante. À l'instant $t = 0$, le ballon est lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v}(t = 0) = v_0\,\overrightarrow{u_z}$ avec $v_0 > 0$ de la position $\overrightarrow{r}(t = 0) = h\,\overrightarrow{u_z}$ avec $h > 0$.
1) Écrire le principe fondamental de la dynamique et justifier que le problème est unidimensionnel suivant l'axe Oz.
2) Écrire l'équation différentielle du premier ordre en $v_z(t)$. Déterminer l'équation horaire de la vitesse $v_z(t)$ du ballon.
3) Déterminer l'équation horaire de la position $z(t)$.
4) Calculer l'instant où le ballon atteint le sommet de la trajectoire. En déduire la hauteur maximale z_S atteinte par le ballon.
5) En prenant comme nouvelle origine des temps l'instant où le ballon est au sommet de la trajectoire, établir l'équation vérifiée par le temps de descente t_D en fonction de g, τ et z_S. Comment peut-on résoudre cette équation ?

Exercices supplémentaires (Seconde édition – 2016) : chapitre 4

E4.11,5 – Saut à la perche
Un sauteur à la perche de très haut niveau peut au maximum atteindre une vitesse de $10\,m/s$ durant la phase d'élan.
1) Avec un raisonnement simple, quelle est la hauteur maximale de la barre à franchir ?
2) En quoi se décompose l'énergie durant la phase de montée ?
3) Avec une description plus réaliste, quels facteurs favorables permettent d'atteindre une hauteur plus grande, et quels sont les facteurs défavorables baissant cette hauteur ?

E4.20 – Piste d'élan pour saut à ski
Une piste d'élan pour saut à ski peut être décomposée en une portion rectiligne suivie d'une portion courbe que l'on supposera circulaire de rayon R. Soit D le point de départ, T le point de jonction entre les deux portions de la piste d'élan, B le point le plus bas et S le point de sortie du tremplin (voir figure 3). La portion rectiligne DT possède une longueur L et fait un angle α avec la direction horizontale. Il n'y a pas de cassure dans la pente au niveau du point T. Le point S est situé à la même altitude que le point T, ce qui implique que le point B est situé au milieu de la portion circulaire TS. Le skieur, de masse m, part du haut du tremplin sans vitesse initiale.

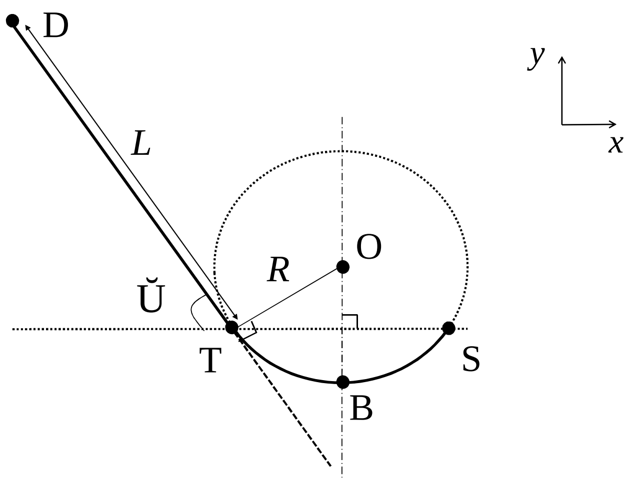

Figure 3 – Piste d'élan pour saut à ski

Dans cet exercice on utilisera exclusivement un raisonnement énergétique pour répondre aux questions (on n'utilisera pas la seconde loi de Newton). On négligera les frottements de l'air dans tout l'exercice.

1) Cas sans frottements

On néglige les frottements des skis sur la neige.

a) Calculer la vitesse du skieur aux points T, B et S, en fonction de m, g L, R et α. On énoncera avec soin tout théorème utilisé, et on précisera clairement l'origine des énergies potentielles choisie (*on vous conseille de choisir une énergie potentielle nulle au niveau des points T et S*).

b) En utilisant un système de coordonnées possédant un axe horizontal x (dirigé vers la droite) et un axe vertical y (orienté vers le haut), comme indiqué sur la figure, exprimer les composantes des trois vecteurs calculés précédemment. Faire un schéma reprenant la figure où seront représentés ces trois vecteurs vitesses.

2) Cas avec frottements constants

On suppose à présent que les frottements entre les skis et la neige sont non négligeables et sont tels que leur intensité est constante. On notera f l'intensité de cette force et on admettra qu'elle est connue.

a) Calculer la vitesse du skieur aux points T, B et S, en fonction de m, g L, R, α et f.

b) Montrer que le skieur décolle à la sortie du tremplin si α satisfait :

$$\sin\alpha \geq \frac{f}{mg} \times \frac{L + 2R\alpha}{L}$$

3) Cas avec frottements solides

On suppose à présent que les frottements entre les skis et la neige sont du type $f = \mu N$ où N est la force de réaction normale de la piste sur le skieur. μ est le coefficient de friction que l'on suppose connu.

a) Calculer la vitesse du skieur aux points T, B et S, en fonction de m, g L, R, α et μ. *(Indication : il sera utile d'utiliser les coordonnées polaires sur la portion circulaire, en définissant l'origine des angles ϕ en B)*

b) Montrer que le skieur décolle à la sortie du tremplin si α satisfait :

$$\tan\alpha \geq \frac{\mu L}{L - 2\mu R}$$

Exercice supplémentaire (Seconde édition – 2016) : chapitre 5

E5.9,5 – Masse coincée entre deux ressorts

Un solide de masse m, relié à deux ressorts identiques R_1 et R_2 dont les autres extrémités sont fixes, peut se déplacer sans frottements sur un rail horizontal (voir figure 4). Chacun des ressorts est caractérisé par une même constante de raideur k et une même longueur à vide L_0. On déplace légèrement le solide vers la droite et on le lâche sans vitesse initiale.

1) Établir le bilan des forces agissant sur la masse m et donner l'expression des forces de rappel $\overrightarrow{F_{R_1}}$ exercée par le ressort R_1 et $\overrightarrow{F_{R_2}}$ exercée par le ressort R_2.

2) Déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de la masse m.

3) Déterminer la pulsation de l'oscillation.

4) Calculer la position de la masse m à tout instant .

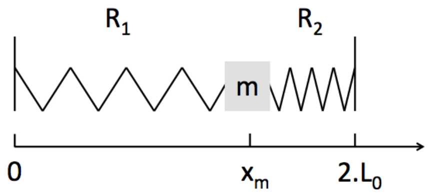

FIGURE 4 – Masse coincée entre deux ressorts

Exercices supplémentaires (Seconde édition – 2016) : chapitre 6

E6.7,5 – Explosion d'une bombe

Une bombe de $100\,kg$ se déplaçant à une vitesse constante horizontale de $v_0 = 5\,m/s$ explose en trois fragments. Les trois fragments se déplacent dans un plan vertical. Un fragment de $45\,kg$ part à l'horizontale avec une vitesse de $30\,m/s$. Un second fragment de $30\,kg$ part avec un angle $\alpha = -135^o$ par rapport au fragment précédent. Soit θ l'angle entre la direction du premier fragment et celle du troisième fragment de $25\,kg$.
1) Calculer la quantité de mouvement de la bombe avant son explosion.
2) Justifier que le système peut-être considéré comme pseudo-isolé. Après l'explosion, déterminer l'expression puis calculer la norme de la vitesse du fragment de $25\,kg$ ainsi que sa direction θ.
3) Juste avant l'explosion, la bombe est à une altitude h (et possède la vitesse v_0). Écrire l'équation de la trajectoire du centre de masse de la bombe, après explosion, dans le référentiel terrestre.

E6.17 – Un wagon et son amortisseur

Un wagon assimilable à un point matériel de masse m, se déplace horizontalement à la vitesse $\overrightarrow{v}_0$. Ce wagon est équipé à une de ses extrémités d'un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0. A l'instant t=0, ce wagon heurte un mur. Le ressort se comprime, puis se détend, et le wagon repart en sens inverse. On considérera que le choc est parfaitement élastique et correspond aux phénomènes de compression puis de détente. On choisira le mur comme l'origine de l'axe horizontal compté positivement dans le sens inverse à $\overrightarrow{v}_0$ et on assimilera le wagon à un point matériel. La force de choc exercée par le mur sur le wagon est complètement représentée par la force de rappel élastique du ressort. Attention, cette force n'est pas la force *moyenne* de choc !
1) Faire un schéma du système au moment où le wagon heurte le mur, le ressort étant en train de se comprimer, en faisant apparaître les forces mises en jeu.
2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement (lorsque le ressort agit).
3) Déterminer l'équation horaire du mouvement du wagon, lorsque le ressort agit, en fonction de v_0, L_0 et de la pulsation du mouvement ω (que l'on exprimera en fonction de k et m). Représenter graphiquement $x(t)$ et $v(t)$.
4) Déterminer l'intervalle de temps $\triangle t$ correspondant à la durée du choc (compression+détente du ressort). En déduire la force moyenne de choc.
5) Déterminer la position du wagon lorsque le ressort est en compression maximale, noté x_{min}, en fonction de L_0, v_0, k et m.
6) Retrouver ce résultat à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique.
7) Déterminer la force maximale, notée F_{max}, exercée par le ressort en fonction de v_0, k et m, puis en fonction de la force moyenne de choc.
8) Exprimer la force de choc subie par le wagon en fonction du temps. Représenter graphiquement cette fonction.
9) Par définition, la valeur moyenne d'une quantité physique sur l'intervalle de temps $\Delta t = t_f - t_i$ est donnée par la formule : $A_{moy} = \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{t_i}^{t_f} A(t)dt$. Calculer

la force moyenne du choc et comparer votre résultat à celui de la question 4.

E6.18 – Tir de canon

Un canon au repos de masse M posé sur des roues, tire horizontalement un boulet de masse m ($m < M$) avec une vitesse initiale v_0. On néglige les frottements des roues sur le sol.

1) Mouvement libre

a) Utiliser une loi de conservation afin de calculer la vitesse de recul v du canon juste après le tir. On justifiera précisément l'utilisation de cette loi.
b) Commenter les différentes énergies intervenant dans le problème juste avant et juste après le tir.
c) Si on suppose que l'explosion pendant le tir dure un temps Δt, déterminer la force explosive moyenne. Sur quoi s'applique cette force ?
d) Quel est le mouvement du canon après le tir ?

2) Mouvement contraint

Afin de limiter le recul du canon à une distance maximale L, on utilise un amortisseur qui, en première approximation, peut être modéliser par un ressort de constante de raideur k dont une extrémité est fixe et l'autre est attachée au canon. Soit x l'élongation du ressort par rapport à sa longueur au repos.

a) Utiliser une loi de conservation afin de calculer la valeur minimale de k en fonction de M, v et L. On justifiera précisément l'utilisation de cette loi de conservation et l'emploi du terme « minimale ». On utilisera l'expression de cette valeur minimale de k dans la suite de l'exercice ($k = k_{min}$).
b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement à l'aide du PFDC.
c) Retrouver cette équation à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
d) Déterminer les fonctions $x(t)$ et $v(t)$ caractérisant la position et la vitesse du canon au cours du temps. On précisera les conditions initiales du problème. Quel est le mouvement du canon après le tir ?
e) Tracer sommairement sur un même graphe les énergies potentielle, cinétique et mécanique, du canon au cours du temps, puis en fonction de x.

3) Mouvement avec amortisseur puissant

En réalité, l'amortisseur absorbe une partie W de l'énergie cinétique du canon lors de son recul. On considère que l'amortisseur exerce une force de frottements visqueux de la forme $\overrightarrow{f} = -b\overrightarrow{v}$.

a) Déterminer l'équation différentielle du mouvement (méthode au choix).
b) Calculer la valeur minimale de b en fonction de M, v et L pour qu'il n'y ait aucune oscillation. On fixe b à cette valeur dans la suite de l'exercice.
c) En se plaçant dans le cadre du régime critique ($\Delta = 0$), calculer les fonctions $x(t)$ et $v(t)$ caractérisant la position et la vitesse du canon au cours du temps. Tracer sommairement $x(t)$. Quel est le mouvement du canon après le tir ?
d) Calculer le temps t_A nécessaire au canon pour s'arrêter. En déduire que la nouvelle distance de recul vaut $L' = L/e$.
e) Déterminer l'énergie W absorbée par l'amortisseur en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.

Exercice supplémentaire (non publié) : chapitre 7

E7.4,5 – Balance

Une barre rigide est susceptible de pivoter autour de son milieu O. La barre repose sur un socle, représenté par un triangle sur la figure 5, lui-même posé sur le sol. On suppose que le contact en O entre la barre et le socle est ponctuel, et la longueur de la barre ℓ est plus grande que la hauteur h du socle. On accroche deux masses m_1 et m_2 aux extrémités de la barre associées aux points M_1 et M_2, on néglige la masse de la barre. La situation est représentée sur la figure 5.

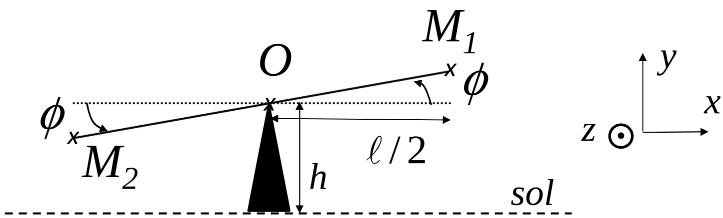

FIGURE 5 – Balance

1) Équilibre

La tige est en équilibre dans une position horizontale.

a) Faire un bilan des forces et les représenter sur un schéma. Qu'implique la condition d'équilibre $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$?

b) Calculer le moment par rapport à O de chaque force.

c) Qu'implique la condition d'équilibre $\sum \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{0}$?

2) Contact avec le sol

La tige touche le sol en M_2 et fait un angle ϕ_M avec l'horizontale.

a) Faire un bilan des forces et les représenter sur un schéma. Qu'implique la condition d'équilibre $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$?

b) Calculer le moment par rapport à O de chaque force.

c) Déterminer l'expression de la réaction normale $\overrightarrow{N_2}$ au niveau du point de contact avec le sol M_2 grâce à la condition d'équilibre $\sum \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{0}$.

d) Déduire des questions précédentes la réaction normale $\overrightarrow{N_O}$ au niveau de l'axe O.

3) Point d'équilibre

À présent le point de contact entre le socle et la barre, le point O, n'est plus au milieu de la barre mais à une distance x du point M_2.

a) Après avoir fait un schéma de la situation, exprimer x en fonction de ℓ, m_1 et m_2 afin que la barre soit en position d'équilibre horizontal.

b) Étudier le cas particulier $m_1 = m_2$ et les cas limites $m_1 \ll m_2$ et $m_1 \gg m_2$.

Exercice supplémentaire (Seconde édition – 2016) : chapitre 8

E8.18 – Étude d'un vaisseau spatial
On considère un vaisseau spatial supposé ponctuel (point N) de masse m, mobile par rapport à la Terre de masse M du centre O et de rayon R. Le champ de gravitation de cet astre est à symétrie sphérique et la constante de gravitation est notée G. La distance entre le vaisseau et le centre de l'astre est ρ, $\rho > R$. On se placera dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Sauf mention contraire, le moteur est éteint, c'est-à-dire que le vaisseau est en vol balistique.

1) Moment cinétique

a) Montrer que le moment cinétique du vaisseau $\overrightarrow{L_O}(M)$, de norme L_O, est une constante du mouvement.
b) Cette constance de $\overrightarrow{L_O}(M)$ a deux conséquences sur la trajectoire du vaisseau, lesquelles ?
c) Exprimer la vitesse angulaire ω du vaisseau par rapport à O en fonction de L_O, ρ et m.

2) Énergie potentielle
À partir de la force de gravitation s'exerçant sur le vaisseau, déterminer l'énergie potentielle U du vaisseau, en fonction de G, M, m et de la distance ρ, en la choisissant nulle à l'infini ($U(\rho \to +\infty) = 0$). (On attend de vous une démonstration de l'expression de $U(\rho)$).

3) Énergie mécanique

a) Déterminer l'énergie mécanique E_m en fonction de G, m, M, v et ρ.
b) Commenter les signes possibles de E_m et les trajectoires associées.

4) Vitesse de libération
Rappeler la définition de la vitesse de libération. Calculer son expression v_L, pour un lancement à partir de la surface terrestre, en fonction de G, M et R, puis sa valeur numérique ($M = 6\,10^{24}\,kg$, $R = 6380\,km$ et $G = 6,67\,10^{-11}\,SI$).

5) Vitesse de libération à partir d'une orbite circulaire
Le vaisseau est initialement sur une orbite circulaire de rayon R_0 décrite à la vitesse v_0. On allume le moteur pendant un temps court, de sorte que la vitesse varie mais pas la distance au centre de l'astre.

a) Évaluer la vitesse totale v_1 que le vaisseau doit posséder (par rapport au centre de la Terre) pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre en fonction de G, M et R_0, puis en fonction de v_0.
b) Comparer cette vitesse à celle calculée en 4). Commenter vos résultats.

6) Satellite géostationnaire
On considère maintenant que le vaisseau spatial se trouve sur une orbite géostationnaire circulaire.

a) Que signifie le terme « géostationnaire » ? Préciser ainsi la période de révolution d'un tel corps.
b) En appliquant le PFD, déterminer le rayon R_{geo} de l'orbite, puis son altitude h. On précisera la relation existante entre la vitesse et le rayon de

l'orbite circulaire faisant intervenir les constantes G et M, qui sera utile dans les questions suivantes.

Le commandant de bord veut se libérer de l'attraction de la Terre à partir de l'orbite circulaire de rayon R_0 parcourue à la vitesse v_0. Il dispose d'un « budget de vitesse » $\triangle v$ égal à $4v_0$: cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesses n'excède pas $4v_0$.

7) Option 1 : Libération directe

Le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale v_0 à $v^f = 5v_0$. Évaluer la vitesse finale « à l'infini », $v_{\infty,1}$, en fonction de v_0 grâce à un raisonnement énergétique. Faire un schéma de la situation.

8) Option 2 : Libération par fronde gravitationnelle

Le commandant utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de v_0 à $v_0/2$ en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction. Le point où s'effectue ce ralentissement est l'apogée de la nouvelle trajectoire.

a) Décrire la nouvelle trajectoire (faire un dessin), et en particulier, donner la distance ρ_A du centre O à l'apogée en fonction de R_0 et la vitesse v_A à l'apogée en fonction de v_0.
b) Calculer le demi grand-axe a en fonction de R_0.
c) En déduire la distance ρ_P du centre O au périgée en fonction de R_0.
d) En déduire la vitesse v_P au périgée en fonction de v_0.
e) Quelle condition doit vérifier ρ_P pour éviter tout accident ? En déduire la valeur minimale de R_0.
f) Le commandant utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage du périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale « à l'infini », $v_{\infty,2}$, en fonction de v_0 grâce à un raisonnement énergétique. Comparer les deux options et commenter.

Formules utiles pour la question 8) :

$$\begin{aligned} v^2 &= 2GM\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2a}\right) \\ 2a &= \rho_A + \rho_P \end{aligned}$$