

Mémoire de Stage

CHARIFOU Souraya

Tuteur Mr ASCH Joachim

Année Universitaire 2002/2003

Asymptotique du temps de séjour d'un état instable

Maitrise de Mathématiques

Université de Toulon et du Var

0.1 Introduction

0.1.1 Résumé

On a considéré la propagation des ondes de Schrödinger, régie par l'équation différentielle $\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -iH\psi(t)$, H opérateur auto-adjoint dit Hamiltonien.

Nous avons étudié le temps de vie τ d'un état perturbé, τ traduisant la stabilité du système, et montré qu'il diverge quadratiquement dans la perturbation. En plus de cet objectif, nous avons déterminé de façon explicite, dans le développement de τ_{ψ_0} en puissance de β ($\sum \beta^n, n \in \mathbb{Z}$), le coefficient du terme en $\frac{1}{\beta^2}$ ainsi que le terme d'erreur indépendant de β .

Dans tout notre sujet, nous avons pu remarquer qu'aucune hypothèse sur l'analyticité des fonctions intervenant n'a été faite, ce qui a rendu impossible l'emploi des méthodes d'analyse complexe, telles que la théorie des résidus.

0.1.2 Abstract

We considered the propagation of Schrödinger waves, defined by the differential equation $\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -iH\psi(t)$, where H is a self-adjoint operator called Hamiltonian.

We studied the sejour time of a stable state under perturbation and proved that it diverges quadratically in the perturbation.

Moreover we obtained the coefficient of the quadratic term in the development of τ_{ψ_0} and the error term.

We noted that we didn't use complex analysis methods, such as the theory of residus, to obtain all these results because of a lack of assumption about functions' analyticity.

0.1.3 Position du problème

Soit l'équation de Schrödinger:

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -iH\psi(t) \quad (1)$$

où $\psi(t)$ caractérise l'évolution au cours du temps d'un système quantique et H est un opérateur auto-adjoint de domaine $D(H) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ espace de hilbert. La solution générale de cette équation différentielle est de la forme $\psi(t) = e^{-itH}\psi(0)$, $\psi(0) = \psi_0 \in D(H)$.

On va s'intéresser au "temps de vie" τ_{ψ_0} associé à la valeur ψ_0 défini par $\tau_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\langle \psi_0, \psi(t) \rangle|^2 dt$ pour une perturbation H d'un système stable H_0 . Dans notre étude, on prendra $\mathcal{H} = C \oplus L^2(R)$, $H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ et $\psi_0 = (1, 0)$ vecteur propre associé à la valeur propre E_0 . H_0 a pour domaine

$$D(H_0) = \{\psi \text{ dans } C \oplus L^2(R) / \int_{-\infty}^{+\infty} (x\psi(x))^2 dx\}.$$

Dans le cas du système stable, on peut remarquer que le temps de vie

$$\tau_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\langle (1, 0), (e^{-itE_0}, 0) \rangle|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-itE_0}|^2 dt = +\infty \text{ car } E_0 \text{ est réelle.}$$

Maintenant, on va perturber l'opérateur H_0 de façon à obtenir un nouvel opérateur H défini par $H = H_0 + \beta V = H_0 + \beta \begin{pmatrix} 0 & \langle \phi | \\ |\phi \rangle & 0 \end{pmatrix}$ où β est un paramètre réel petit > 0 , $\phi \in L^2(R)$ et $D(H) = D(H_0)$.

Ainsi $H = \begin{pmatrix} E_0 & \beta \langle \phi | \\ \beta |\phi \rangle & x \end{pmatrix}$ c'est à dire que

$$H \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} E_0 \psi_1 + \beta \langle \phi(x), \psi_2(x) \rangle \\ \beta \psi_1 \phi(x) + x \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

C'est ce nouvel opérateur qui nous servira de modèle tout au long de l'étude. Notre but sera de montrer que le temps de vie τ_{ψ_0} pour H diverge quadratiquement en β quand $\beta \rightarrow 0$.

Part I

**Théorie Spectrale appliquée
à notre étude**

Chapter 1

Notions et Outils sur la Théorie Spectrale

On s'intéresse ici à la solution $\psi(t)$ de l'équation de Schrödinger dans le cas où la perturbation est nulle, ie $\beta=0$ et on va étudier la quantité $\langle \psi_0, \psi(t) \rangle$.

1.1 Résolvante et Spectre

Soit l'équation de Schrödinger:

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -iH\psi(t) \quad (1.1)$$

où H est un opérateur auto-adjoint avec $D(H) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ et $\psi(t) \in \mathcal{H}$.

Pour commencer, on va prendre le cas de la dimension finie pour se faire une idée du problème.

1.1.1 Première Approche

Dans le cas de la dimension 1, on prend l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, l'opérateur $H = a$ (homothétie) alors l'équation (1.1) s'écrit $\psi'(t) = -ia\psi(t)$ de solution $\psi(t) = \psi_0 e^{-iat}$.

Dans le cas de la dimension 2, on prend $\mathcal{H} = C^2$ et $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

H est symétrique donc diagonalisable en base orthonormale (ψ_1, ψ_2) . On a donc $H\psi_1 = E_1\psi_1$ et $H\psi_2 = E_2\psi_2$, où E_1 et E_2 sont les valeurs propres réelles associées aux vecteurs propres correspondants.

On a $\psi(t) = e^{-itH}\psi_0$ et si on décompose ψ_0 dans la base B des ψ_i , on obtient $\psi_0 = \sum_{i=1}^2 \psi_0^i \psi_i$ avec $\psi_0^i = \langle \psi_0, \psi_i \rangle$ composante de ψ_0 sur le i -ème vecteur de la base B des vecteurs propres. On a alors $H\psi_0 = \sum_{i=1}^2 \psi_0^i H\psi_i = \sum_{i=1}^2 \psi_0^i E_i \psi_i$ et $\psi(t) = \sum_{i=1}^2 e^{-iE_i t} \psi_0^i \psi_i$.

Calculons $\langle \psi_0, \psi(t) \rangle = \langle \psi_0, e^{-itH}\psi_0 \rangle$
 $= \langle \psi_0, e^{-itE_1}\psi_1 \rangle + \langle \psi_0, e^{-itE_2}\psi_2 \rangle = |\psi_0^1|^2 e^{-iE_1 t} + |\psi_0^2|^2 e^{-iE_2 t}$
car $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0$ et $|\psi_i|^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Et donc } |\langle \psi_0, \psi(t) \rangle|^2 &= ||\psi_0^1|^2 e^{-iE_1 t} + |\psi_0^2|^2 e^{-iE_2 t}|^2 \\ &= (|\psi_0^1|^2 \cos(E_1 t) + |\psi_0^2|^2 \cos(E_2 t))^2 + (|\psi_0^1|^2 \sin(E_1 t) + |\psi_0^2|^2 \sin(E_2 t))^2 \\ &= |\psi_0^1|^4 + |\psi_0^2|^4 + 2|\psi_0^1|^2 |\psi_0^2|^2 (\cos(E_1 t) \cos(E_2 t) + \sin(E_1 t) \sin(E_2 t)) \\ &= |\psi_0^1|^4 + |\psi_0^2|^4 + 2|\psi_0^1|^2 |\psi_0^2|^2 \cos((E_1 - E_2)t). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } |\langle \psi_0, \psi(t) \rangle|^2 = |\psi_0^1|^4 + |\psi_0^2|^4 + 2|\psi_0^1|^2 |\psi_0^2|^2 \cos((E_1 - E_2)t). \quad (1.2)$$

On va essayer de généraliser cette notion au cas de la dimension infinie grâce à la théorie spectrale et on verra alors que le spectre est plus complexe et n'est plus réduit à l'ensemble de ses valeurs propres, comme c'est le cas en dimension finie.

1.1.2 Définitions

Soit H un opérateur auto-adjoint (H symétrique et $D(H) = D(H^*)$ où $D(H^*) = \{f / \langle f, Hu \rangle \leq c_f \|u\| \ \forall u \in D(H)\}$) de domaine $D(H)$ dense $\subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ espace de hilbert.

On appelle *résolvante* de H au point z et on note $R(z)$ la quantité $(H-z)^{-1}$.

On appelle *ensemble de la résolvante* et on note $\rho(H)$, l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / \text{l'opérateur } (H-z)^{-1} \text{ existe et est borné dans } \mathcal{H}\}$.

On appelle *spectre* de H et on note $\sigma(H)$ l'ensemble complémentaire de $\rho(H)$, i-e $\mathbb{C} \setminus \rho(H)$.

1.2 Mesure Spectrale

1.2.1 Théorème d'Existence de la solution

Enoncé:

Soit $\mathcal{H}$ espace de Hilbert, H un opérateur auto-adjoint tel que $D(H)$ dense $\subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Alors pour tout $\psi_0 \in D(H)$, $\exists !$ solution de l'équation

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -iH\psi(t) \tag{1.2}$$

avec la condition initiale $\psi(0) = \psi_0$.

De plus cette solution $\psi(t) \in D(H)$ et $\psi(t) = e^{-itH}\psi_0$.

La preuve de ce théorème (qu'on a admis) repose sur la construction d'une mesure dite mesure spectrale.

1.2.2 Construction d'une mesure spectrale

Motivé par les considérations en dimension finie, on construit une mesure dE_λ à valeurs dans les projecteurs orthogonaux (P projecteur orthogonal si $P^2 = P$ et $P = P^*$), telle que $H = \int_{\sigma(H) \subset \mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$.

Pour ceci, on considère l'application $\lambda \mapsto E_\lambda$ (projecteur) croissante avec "sauts" sur le spectre c'est-à-dire que $\forall \psi \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \langle \psi, E_\lambda \psi \rangle \in \mathbb{R}$

est croissante et on a $\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$ (car $E_\lambda \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$) et $\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle \rightarrow +\infty$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$ (car $E_\lambda \rightarrow Id$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$), où $\langle, \rangle$ est le produit scalaire sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

On peut montrer que $\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$ est tel que $\exists$ une mesure $d\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$, mesure spectrale associée à ψ , telle que $\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\lambda} d\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$.

On définit de manière analogue, pour une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\forall \psi \in D(g(H))$ l'opérateur $g(H) = \int_{\sigma(H)} g(\lambda) dE_\lambda$, où $D(g(H)) = \{\psi / \|g(H)\psi\|^2 < +\infty\}$.

Il en résulte $g(H)\psi = \int_{\sigma(H)} g(\lambda) dE_\lambda \psi$

et $\langle \psi, g(H)\psi \rangle = \int_{\sigma(H)} g(\lambda) d\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$,

en particulier $\langle \psi, e^{-itH}\psi \rangle = \int_{\sigma(H)} e^{-it\lambda} d\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$

$\forall \psi \in D(g(H)) = \{\psi / \|g(H)\psi\|^2 < +\infty\}$ avec $\|g(H)\psi\|^2 = \langle g(H)\psi, g(H)\psi \rangle = \langle \psi, g(H)^2 \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)^2 d\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$.

Pour mieux se fixer les idées, étudions des exemples d'application en dimension infinie.

1.2.3 Exemples d'Application et Vocabulaire

Opérateur $H = x$

On se propose d'étudier un cas simple en dimension infinie avec $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ et $H = x$, ie que $(H\psi)(t) = t\psi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\psi \in D(H)$.

On a $D(H) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|^2 dx < +\infty\}$.

1) Déjà par définition $\rho(H) = \{z \in \mathbb{C} / (H - z)^{-1} \text{ existe et est borné dans } L^2(\mathbb{R})\}$. Montrons par double inclusion que $\rho(H) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Soit $z \in \rho(H)$ et ϕ telle que $\phi(x) = ((H - z)^{-1}\psi)(x) = \frac{\psi(x)}{(x-z)}$ alors

$\phi \in \mathcal{H} \implies \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\psi(x)}{(x-z)} \right|^2 dx < +\infty \implies \text{Im}(z) \neq 0$ (il suffit de prendre

$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Re}(z) - 1 \leq x \leq \text{Re}(z) + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$).

Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(z) \neq 0$.

Alors $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|(H - z)^{-1}\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\psi(x)}{(x-z)} \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(x)|^2}{(x - \text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2} dx$

$\implies \|(H - z)^{-1}\psi\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(x)|^2}{(\text{Im}(z))^2} dx \leq \left(\frac{1}{\text{Im}(z)} \right)^2 \|\psi\|^2$.

Donc $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|(H - z)^{-1}\| \leq \left| \frac{1}{\text{Im}(z)} \right|$, ce qui par définition signifie que

l'opérateur $(H - z)^{-1}$ est borné. Donc $\rho(H) = C \setminus R$ et $\sigma(H) = R$.

2) Remarquons que H n'a pas de valeurs propres. En effet, par l'absurde, supposons que E soit valeur propre de H alors on aurait $E\psi = H\psi = x\psi$ (égalité presque partout dans $L^2(R)$), ce qui $\implies (x-E)\psi = 0$ ppt dans L^2 , ce qui $\implies \psi(x) = 0$ ppt $x \neq E$ d'où une contradiction car ψ vecteur propre associé à la valeur propre E donc $\psi \neq 0$.

3) Connaissant $\sigma(H)$, il est facile de trouver la mesure spectrale associée à H : d'une part $\langle \psi, x\psi \rangle = \int_{\sigma(H)=R} \lambda d \langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$ d'après la définition spectrale et d'autre part par la définition du produit scalaire dans L^2 , $\langle \psi, x\psi \rangle = \int_{R=\sigma(H)} x |\psi(x)|^2 dx$ donc en identifiant on a l'égalité $\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle = |\psi(\lambda)|^2 d\lambda$. Comme $\psi \in L^2(R)$, on a $\psi^2 \in L^1(R)$ et la mesure $d \langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Opérateur H_0

1) On étudie le cas de perturbation nulle sur le modèle qu'on a choisi.

On prend donc $\mathcal{H} = C \oplus L^2(R)$ et $H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ avec $E_0 \in R$.

Alors la résolvante $R(z) = (H_0 - zI)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_0 - z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x - z} \end{pmatrix}$

Donc $\sigma(H_0) = E_0 \cup R = R$. On dit alors que "la valeur propre E_0 est plongée dans le spectre absolument continu".

2) Mesure Spectrale associée

Sur $\mathcal{H} = C \oplus L^2(R)$, on définit le produit scalaire suivant,

avec $\phi = (\phi_1, \phi_2(x))$, $\langle \phi, \psi \rangle = \bar{\phi}_1 \psi_1 + \int_R \bar{\phi}_2(x) \psi_2(x) dx$.

D'une part, $\langle \psi, H_0 \psi \rangle = \int_{\sigma(H_0)} \lambda d \langle \psi, E_\lambda \psi \rangle = \int_R \lambda d \langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$,

d'autre part $\langle \psi, H_0 \psi \rangle = \bar{\psi}_1 (H_0 \psi)_1(x) + \int_R \bar{\psi}_2(x) (H_0 \psi)_2(x) dx$
 $= E_0 \bar{\psi}_1 \psi_1 + \int_R \bar{\psi}_2(x) x \psi_2(x) dx = E_0 |\psi_1|^2 + \int_R x |\psi_2(x)|^2 dx$.

Donc $d \langle \psi, E_\lambda \psi \rangle = |\psi_1|^2 \delta_{E_0}(\lambda) + |\psi_2(\lambda)|^2 d\lambda$.

Spectres absolument continu et purement ponctuel

Définitions: Soit un opérateur H auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, hilbert

1) Si $\forall \psi \in \mathcal{H}$, la mesure $d\langle \psi, E_\lambda \psi \rangle$ est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), on dit que le spectre de H est absolument continu.

2) Si $\sigma(H) = \{\text{valeurs propres}\}$, on dit que le spectre de H est purement ponctuel.

3) Remarque: dans le cas de H_0 , on peut dire que le spectre est mixte car ni purement ponctuel, ni absolument continu.

Chapter 2

Application au calcul de τ_{ψ_0}

2.1 Introduction et Exemples

On rappelle la définition de τ_{ψ_0} associé au vecteur propre ψ_0 défini par $\tau_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} | \langle \psi_0, \psi(t) \rangle |^2 dt$ avec $\psi_0 = (1, 0)$ et $\psi(t)$ solution de l'équation $\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -iH\psi(t)$ avec $\psi(0) = \psi_0$.

On va étudier deux exemples rapides, l'un en dimension finie, l'autre en dimension infinie.

2.1.1 dimension finie : $\mathcal{H} = R^2$ et $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

On reprend l'exemple en dimension 2 que l'on a vu dans la partie 1.1.1 Première Approche.

On a vu alors que $| \langle \psi_0, \psi(t) \rangle |^2 = |\psi_0^1|^4 + |\psi_0^2|^4 + 2|\psi_0^1|^2 |\psi_0^2|^2 \cos((E_1 - E_2)t)$.
(1.2)

C'est une fonction périodique donc le temps de vie est ∞ .

2.1.2 dimension infinie : $\mathcal{H} = L^2(R)$ et $H = x$

On va montrer que $\forall \psi_0 \in L^4(R)$, alors $\tau_{\psi_0} < +\infty$.

En effet, $\tau_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} | \langle \psi_0, \psi(t) \rangle |^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} | \int_R \psi_0(x) e^{-itx} \psi_0(x) dx |^2 dt$.

Donc $\tau_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} | \int_R e^{-itx} |\psi_0(x)|^2 dx |^2 dt$.

Posons $g(x) = |\psi_0(x)|^2$. Alors $\int_R e^{-itx} |\psi_0(x)|^2 dx = \sqrt{2\pi} \hat{g}(t)$ par définition.

Donc $\tau_{\psi_0} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx$ d'après l'égalité de Parseval-

Bessel et $\tau_{\psi_0} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^4 dx < +\infty \forall \psi_0 \in L^4(R)$.

2.2 Expression de τ en fonction de la partie imaginaire de la Résolvante

On supposera à partir de maintenant que $\langle \psi_0, \psi(t) \rangle \in L^2(R)$.

On veut montrer dans cette partie la formule suivante:

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |Im \langle \psi_0, R(E + i\epsilon)\psi_0 \rangle|^2 dE \quad (2.1)$$

pour H opérateur auto-adjoint quelconque.

On va procéder en deux étapes: tout d'abord, on montrera que $\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R |Im \langle \psi_0, R(E + i\epsilon)\psi_0 \rangle|^2 dE$, puis on s'efforcera de justifier l'interversion limite-intégrale.

$$\mathbf{2.2.1} \quad \tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R |Im \langle \psi_0, R(E + i\epsilon)\psi_0 \rangle|^2 dE$$

Par définition, $\tau_{\psi_0} = \int_R |\langle \psi_0, \psi(t) \rangle|^2 dt = \int_R |\langle \psi_0, e^{-itH}\psi_0 \rangle|^2 dt = \int_R \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |g_\epsilon(t)|^2 dt$ en posant $g_\epsilon(t) = e^{-\epsilon|t|} \langle \psi_0, e^{-itH}\psi_0 \rangle$.

Or $\forall t \in R, |g_\epsilon(t)|^2 \leq |\langle \psi_0, e^{-itH}\psi_0 \rangle|^2$ car $e^{-\epsilon|t|} \leq 1$.

Donc $|g_\epsilon(t)|^2 \leq \|\psi_0\|^2 < +\infty \forall t \in R$ car $\psi_0 \in L^2$ (on a obtenu une majoration de la fonction $g_\epsilon(t)$ indépendante de ϵ).

Donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\tau_{\psi_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R |g_\epsilon(t)|^2 dt$.

D'après l'égalité de Parseval-Bessel, $\tau_{\psi_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R |\check{g}_\epsilon(E)|^2 dE$,

$$\begin{aligned} \text{avec } \check{g}_\epsilon(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{iEt} g_\epsilon(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{iEt} e^{-\epsilon|t|} \langle \psi_0, e^{-itH}\psi_0 \rangle dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \langle \psi_0, e^{-it(H-E-i\epsilon)}\psi_0 \rangle dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \langle \psi_0, e^{-it(H-E+i\epsilon)}\psi_0 \rangle dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (\int_{\sigma(H)} e^{-it(\lambda-E-i\epsilon)} d\langle \psi_0, E_\lambda \psi_0 \rangle) dt + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 (\int_{\sigma(H)} e^{-it(\lambda-E+i\epsilon)} d\langle \psi_0, E_\lambda \psi_0 \rangle) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma(H)} (\int_0^{+\infty} e^{-it(\lambda-E-i\epsilon)} dt) d\langle \psi_0, E_\lambda \psi_0 \rangle + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma(H)} (\int_{-\infty}^0 e^{-it(\lambda-E+i\epsilon)} dt) d\langle \psi_0, E_\lambda \psi_0 \rangle \text{ d'après le théorème de Fubini} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma(H)} ([\frac{e^{-it(\lambda-E-i\epsilon)}}{-i(\lambda-E-i\epsilon)}]_0^{+\infty} + [\frac{e^{-it(\lambda-E+i\epsilon)}}{-i(\lambda-E+i\epsilon)}]_{-\infty}^0) d\langle \psi_0, E_\lambda \psi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma(H)} (\frac{1}{(\lambda-E-i\epsilon)} - \frac{1}{(\lambda-E+i\epsilon)}) d\langle \psi_0, E_\lambda \psi_0 \rangle \\ &\text{car } |e^{-it(\lambda-E-i\epsilon)}| = |e^{-\epsilon t}| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{1}{(\lambda-E-i\epsilon)} - \frac{1}{(\lambda-E+i\epsilon)} = \frac{2i\epsilon}{(\lambda-E)^2 + \epsilon^2} \text{ et } \text{Im}(\frac{1}{(\lambda-E-i\epsilon)}) = \frac{\epsilon}{(\lambda-E)^2 + \epsilon^2},$$

$$\text{donc } \check{g}_\epsilon(E) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma(H)} 2i \text{Im}(\frac{1}{\lambda-(E+i\epsilon)}) d\langle \psi_0, E_\lambda \psi_0 \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle \psi_0, \text{Im}(\frac{1}{H-(E+i\epsilon)}) \psi_0 \rangle.$$

Conclusion

$$\tau_{\psi_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R |\check{g}_\epsilon(E)|^2 dE = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R | \langle \psi_0, \text{Im} (R(E+i\epsilon)) \psi_0 \rangle |^2 dE \quad (2.2)$$

où $R(z) = (H - zId)^{-1}$

2.2.2 Interversion $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ et intégrale

Dans cette partie, on suppose que $t \mapsto \langle \psi_0, e^{-itH} \psi_0 \rangle \in L^2(R)$

1) **Alors** $g_\epsilon(t) = e^{-\epsilon|t|} \langle \psi_0, e^{-itH} \psi_0 \rangle \in L^2(R)$

En effet $\|g_\epsilon\|_2^2 = \int_R |e^{-\epsilon|t|} \langle \psi_0, e^{-itH} \psi_0 \rangle|^2 dt \quad (cf 2.2.1)$

$$= \int_R e^{-2\epsilon|t|} | \langle \psi_0, e^{-itH} \psi_0 \rangle |^2 dt$$

$$\leq \int_R | \langle \psi_0, \psi(t) \rangle |^2 dt \quad (\text{car } e^{-2\epsilon|t|} \leq 1 \quad \forall t \in R)$$

$< +\infty$ par hypothèse donc $g_\epsilon \in L^2(R)$.

2) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(t) = \langle \psi_0, \psi(t) \rangle$ **dans** $L^2(R)$

preuve: $\|g_\epsilon - \langle \psi_0, \psi \rangle\|_2^2 = \int_R |g_\epsilon(t) - \langle \psi_0, \psi(t) \rangle|^2 dt$

$$= \int_R |e^{-\epsilon|t|} - 1|^2 | \langle \psi_0, \psi(t) \rangle |^2 dt$$

On applique le théorème de convergence dominée

- $g_\epsilon \in L^2(R)$ d'après ci-dessus
- $\forall t \in R, |e^{-\epsilon|t|} - 1| \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$

- $\forall t \in R, |e^{-\epsilon|t|} - 1|^2 < |\langle \psi_0, \psi(t) \rangle|^2 \leq 4 \quad |\langle \psi_0, \psi(t) \rangle|^2$ (on a bien une majoration indépendante de ϵ par une fonction de $L^2(R)$)
- Donc $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|g_\epsilon - \langle \psi_0, \psi(t) \rangle\|_2^2 = 0$

3) Soit $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier

$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$, $\mathcal{F}$ est continue (d'après Parseval-Bessel).

Donc pour $g_\epsilon(t) = e^{-\epsilon|t|} \langle \psi_0, e^{-itH} \psi_0 \rangle \in L^2(R)$, on a par continuité

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(g_\epsilon(t)) = \mathcal{F}(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(t)) = \mathcal{F}(\langle \psi_0, \psi(t) \rangle) \text{ dans } L^2(R),$$

soit $\|\mathcal{F}(g_\epsilon) - \mathcal{F}(\langle \psi_0, \psi(t) \rangle)\|_2^2 \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\text{Or } \mathcal{F}(g_\epsilon(E)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle \psi_0, \text{Im}\left(\frac{1}{H - (E + i\epsilon)}\right) \psi_0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Im}(\langle \psi_0, R(E + i\epsilon) \psi_0 \rangle).$$

Donc si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im}(\langle \psi_0, R(E + i\epsilon) \psi_0 \rangle)$ existe, presque pour tout E dans

$L^2(R)$, on aura le résultat voulu.

preuve: d'après la deuxième inégalité triangulaire, on a

$$|\|\mathcal{F}(g_\epsilon)\|_2^2 - \|\mathcal{F}(\langle \psi_0, \psi \rangle)\|_2^2| \leq \|\mathcal{F}(g_\epsilon) - \mathcal{F}(\langle \psi_0, \psi \rangle)\|_2^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

Donc $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{F}(g_\epsilon)\|_2^2 = \|\mathcal{F}(\langle \psi_0, \psi \rangle)\|_2^2 = \|\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(g_\epsilon)\|_2^2$, soit

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R |\text{Im}(\langle \psi_0, R(E + i\epsilon) \psi_0 \rangle)|^2 dE \\ &= \frac{2}{\pi} \int_R \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\text{Im}(\langle \psi_0, R(E + i\epsilon) \psi_0 \rangle)|^2 dE \end{aligned} \quad (2.3)$$

En combinant les relations (2.2) et (2.3), on a prouvé la formule (2.1) qui va nous être indispensable pour établir l'expression de τ_{ψ_0} sur laquelle on étudiera le comportement asymptotique dans notre modèle perturbé .

On remarque que dans τ_{ψ_0} intervient la résolvante au point $E + i\epsilon$.

On aura donc besoin d'inverser $(H - zId)$ avec $H = \begin{pmatrix} E_0 & \beta < \phi | \\ \beta | \phi > & x \end{pmatrix}$.

C'est ce que nous allons aborder tout de suite, en étudiant la méthode de Feshbach qui permet d'inverser des "matrices" d'opérateurs.

2.3 Méthode de Feshbach

Cette méthode permet d'inverser une "matrice" 2×2 dont les éléments ne sont pas commutatifs. Voici le résultat de cette méthode. En supposant que les composantes d et f sont inversibles, on a:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} f^{-1} & -f^{-1}bd^{-1} \\ -d^{-1}cf^{-1} & d^{-1} + d^{-1}cf^{-1}bd^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{où } f = a - bd^{-1}c$$

Preuve: il s'agit d'inverser le système suivant: $\begin{cases} \Phi_1 = a\Psi_1 + b\Psi_2 \\ \Phi_2 = c\Psi_1 + d\Psi_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \Phi_1 = a\Psi_1 + b\Psi_2 \\ \Psi_2 = d^{-1}(\Phi_2 - c\Psi_1) \end{cases}$.

$$\text{D'où } \begin{cases} \Psi_2 = d^{-1}(\Phi_2 - c\Psi_1) \\ \Phi_1 = a\Psi_1 + bd^{-1}(\Phi_2 - c\Psi_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \Psi_2 = d^{-1}(\Phi_2 - c\Psi_1) \\ \Phi_1 = f\Psi_1 + bd^{-1}\Phi_2 \end{cases}.$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \Psi_2 = d^{-1}(\Phi_2 - c\Psi_1) \\ \Psi_1 = f^{-1}\Phi_1 - f^{-1}bd^{-1}\Phi_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \Psi_1 = f^{-1}\Phi_1 - f^{-1}bd^{-1}\Phi_2 \\ \Psi_2 = -d^{-1}cf^{-1}\Phi_1 + (d^{-1} + d^{-1}cf^{-1}bd^{-1})\Phi_2 \end{cases}$$

Pour l'expression de τ_{ψ_0} qu'il nous faudra établir, on a vu d'après (2.1) que $R(E + i\epsilon)$ intervenait. Avec la méthode de Feshbach, on va pouvoir expliciter cette résolvante.

On rappelle que $H = \begin{pmatrix} E_0 & \beta < \phi | \\ \beta | \phi > & x \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } R(z) = (H - zId)^{-1} = \begin{pmatrix} E_0 - z & \beta < \phi | \\ \beta | \phi > & x - z \end{pmatrix}^{-1}.$$

Dans (2.1), on a une quantité du type $\langle \psi_0, R(z)\psi_0 \rangle$ qui apparaît avec $\psi_0 = (1, 0)$, ce qui nous donne

$$\langle \psi_0, R(z)\psi_0 \rangle = (R(z))_{1,1} = f(z)^{-1} \text{ avec } f(z) = a(z) - (bd^{-1}c)(z),$$

$$a(z) = E_0 - z, b(z) = \beta \langle \phi |, c(z) = \beta | \phi \rangle \text{ et } d(z) = x - z.$$

Donc

$$f(z) = E_0 - z - \beta^2 \langle \phi, \frac{1}{x-z} \phi \rangle$$

$$\langle \psi_0, R(z)\psi_0 \rangle = \frac{1}{E_0 - z - \beta^2 \langle \phi, \frac{1}{x-z} \phi \rangle}$$

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |Im \langle \psi_0, R(E + i\epsilon)\psi_0 \rangle|^2 dE$$

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |Im(\frac{1}{E_0 - (E + i\epsilon) - \beta^2 \langle \phi, \frac{1}{x-(E+i\epsilon)} \phi \rangle})|^2 dE \quad (2.4).$$

Arrivé à ce stade, on a donc besoin de connaître

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - (E + i\epsilon)}$$

2.4 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - (E + i\epsilon)} = V_p(\frac{1}{x-E}) + i\pi\delta_E$

Le but de cette partie est de prouver la formule

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - (E + i\epsilon)} = V_p(\frac{1}{x-E}) + i\pi\delta_E \quad (2.5)$$

On a

$$\frac{1}{x - (E + i\epsilon)} = \frac{(x-E)}{(x-E)^2 + \epsilon^2} + i \frac{\epsilon}{(x-E)^2 + \epsilon^2}$$

donc on va séparer partie réelle et partie imaginaire pour prouver (2.5).

- Commençons par $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Re(\frac{1}{x-(E+i\epsilon)}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x-E)}{(x-E)^2 + \epsilon^2}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Re(\frac{1}{x-(E+i\epsilon)})(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \frac{(x-E)}{(x-E)^2 + \epsilon^2} \phi(x) dx$$

On va montrer le résultat pour $E=0$ (on pourra se ramener au cas général par changement de variable) et on va prouver que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \phi(x) dx = V_p(\frac{1}{x})(\phi)$$

On rappelle que

$$V_p(\frac{1}{x})(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \frac{\chi(|x| > \epsilon)}{x} \phi(x) dx$$

D'une part

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

D'autre part

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\chi(|x| > \epsilon)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} D &= \int_R \frac{\chi(|x| > \epsilon)}{x} \phi(x) dx - \int_R \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \phi(x) dx \\ D &= \int_R (\frac{\chi(|x| > \epsilon)}{x} - \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}) \phi(x) dx \\ D &= \int_0^{+\infty} (\frac{\chi(|x| > \epsilon)}{x} - \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}) \phi(x) dx + \int_{-\infty}^0 (\frac{\chi(|x| > \epsilon)}{x} - \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}) \phi(x) dx \end{aligned}$$

Par changement de variable $u = -x$ dans la seconde intégrale, on obtient

$$D = \int_0^{+\infty} (\chi(|x| > \epsilon) - \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2}) \frac{(\phi(x) - \phi(-x))}{x} dx$$

$$\text{Or } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(|x| > \epsilon) - \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2} = 0 \quad \forall x \text{ et } |\chi(|x| > \epsilon) - \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2}| \leq 2 \quad \forall x$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} = 2\phi'(0)$$

De plus dès que $\phi \in L^1 \cap C_b^1$, on a $\frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \in L^1$.

En effet

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \right| dx &= \int_{-1}^{+1} \left| \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \right| dx + \int_{R \setminus [-1,1]} \left| \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \right| dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \right| dx &\leq \int_{-1}^1 \underbrace{\left| \frac{1}{x} \int_{-x}^x \phi'(y) dy \right|}_{\leq 2\|\phi'\|_\infty} dx + 2\|\phi\|_1 \\ &\leq 4\|\phi'\|_\infty + 2\|\phi\|_1 \\ &\leq +\infty \quad \forall \phi \in L^1 \cap C_b^1 \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \frac{\chi(|x| > \epsilon)}{x} \phi(x) dx = V_p\left(\frac{1}{x}\right)(\phi)$$

Dans le cas général, on aura

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \frac{x - E}{(x - E)^2 + \epsilon^2} \phi(x) dx = V_p\left(\frac{1}{x - E}\right)(\phi) \quad (2.6)$$

- Maintenant pour $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im}\left(\frac{1}{x - (E + i\epsilon)}\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(x - E)^2 + \epsilon^2}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im}\left(\frac{1}{x - (E + i\epsilon)}\right)(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \frac{\epsilon}{(x - E)^2 + \epsilon^2} \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_R \frac{1}{\left(\frac{E - x}{\epsilon}\right)^2 + 1} \phi(x) dx$$

On reconnait, à un coefficient π près, un produit de convolution de ϕ avec un noyau régularisant j_ϵ .

$$\left\{ \begin{array}{l} j_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon} j\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\ \text{où } j(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} \\ \int_R j(x) dx = \frac{1}{\pi} [\text{Arctan}(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \\ (j_{\epsilon} * \phi)(E) = \int_R j_{\epsilon}(E-x) \phi(x) dx \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im}\left(\frac{1}{x-(E+i\epsilon)}\right)(\phi) = \pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (j_{\epsilon} * \phi)(E) = \pi \phi(E) \quad (2.7)$$

$$\text{Les relations (2.6) et (2.7)} \implies \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-(E+i\epsilon)} = V_p\left(\frac{1}{x-E}\right) + i\pi\delta_E \quad (2.5)$$

2.5 Expression de τ_{ψ_0} en fonction de β

En regroupant tous les résultats de cette partie, on arrive à une expression de τ_{ψ_0} en fonction de β .

$$\tau_{\psi_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} | \langle \psi_0, \psi(t) \rangle |^2 dt$$

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R \lim_{\epsilon \rightarrow 0} | \text{Im} \langle \psi_0, R(E+i\epsilon)\psi_0 \rangle |^2 dE \quad \text{d'après} \quad (2.1)$$

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \text{Im} \left(\frac{1}{E_0 - (E+i\epsilon) - \beta^2 \langle \phi, \frac{1}{x-(E+i\epsilon)} \phi \rangle} \right) \right|^2 dE \quad \text{d'après} \quad (2.4)$$

$$\text{avec } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-(E+i\epsilon)} = V_p\left(\frac{1}{x-E}\right) + i\pi\delta_E \quad \text{d'après} \quad (2.5)$$

Donc

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R |Im(\frac{1}{E_0 - E - \beta^2(V_p(\frac{1}{x-E})(|\phi|^2) + i\pi\delta_E(|\phi|^2))})|^2 dE$$

Désormais, on va poser $f(E) = V_p(\frac{1}{x-E})(|\phi|^2)$ et $g(E) = \pi\delta_E(|\phi|^2)$.

On aura donc

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R |Im(\frac{1}{E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E)})|^2 dE \quad (2.8)$$

Cette expression est celle sur laquelle nous allons nous appuyer dans toute la seconde partie pour le comportement asymptotique de τ_{ψ_0} quand $\beta \rightarrow 0$.

Part II

Etude du Comportement Asymptotique de $\tau_{\psi 0}$ quand $\beta \rightarrow 0$

Chapter 3

Conjecture et Etude

3.1 Conjecture

3.1.1 Enoncé

On rappelle d'après la partie 1 que

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R |Im(\frac{1}{E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E)})|^2 dE \quad (2.8)$$

avec $f(E) = V_p(\frac{1}{x-E})(|\phi|^2)$ et $g(E) = \pi\delta_E(|\phi|^2)$

$$\boxed{\text{On conjecture que } \tau_{\psi_0} = \frac{1}{\beta^2 g(E_0)} + O(\beta) \text{ , où } \psi_0 = (1, 0)} \quad (3.1)$$

Dans la partie qui suit, on va expliquer la motivation de la conjecture en calculant une quantité du même type que τ_{ψ_0} mais simplifiée .

Rappel: définition d'un $O(\beta)$

Soient $h, k: I \rightarrow R$, on suppose que $\forall x \in I \setminus \{a\}, k(x) \neq 0$. On dit que h est dominée par k au voisinage de $a \iff \exists$ une application $C: I \rightarrow R$ telle que $\forall x \in I, h(x) = C(x)k(x)$ et C bornée au voisinage de a .

On note alors $h = O_a(k)$.

Remarque: dans toute notre partie, on notera $O(\beta)$ au lieu de $O_0(\beta)$

3.1.2 Motivation de la Conjecture

On va calculer

$$A = \int_R |Im \frac{1}{E - i\beta^2\Gamma}|^2 dE, \text{ où } \Gamma \in R$$

Déjà $Im(\frac{1}{E - i\beta^2\Gamma}) = \frac{\beta^2\Gamma}{E^2 + (\beta^2\Gamma)^2}$, donc

$$A = \int_R |\frac{\beta^2\Gamma}{E^2 + (\beta^2\Gamma)^2}|^2 dE = \int_R \frac{(\beta^2\Gamma)^2}{(E^2 + (\beta^2\Gamma)^2)^2} dE = (\frac{1}{\beta^2|\Gamma|})^2 \int_R \frac{1}{(1 + (\frac{E}{\beta^2|\Gamma|})^2)^2} dE$$

Par le changement de variable $u = \frac{E}{\beta^2|\Gamma|}$, on a

$$A = \frac{1}{\beta^2|\Gamma|} \int_R \frac{1}{(1 + u^2)^2} du$$

Posons

$$B = \int_R \frac{1}{(1 + u^2)^2} du$$

Or

$$\frac{1}{(1 + u^2)^2} = \frac{(1 + u^2) - u^2}{(1 + u^2)^2} = \frac{1}{1 + u^2} - \frac{u^2}{1 + u^2}$$

donc

$$B = \int_R \frac{1}{1 + u^2} du - \int_R \frac{u^2}{1 + u^2} du = [Arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_R \frac{u^2}{1 + u^2} du = \pi + \frac{1}{2} \int_R u * \frac{(-2u)}{(1 + u^2)^2} du.$$

Dans la seconde intégrale, on fait une intégration par parties, donc

$$B = \pi + \frac{1}{2} \underbrace{\left[u * \frac{1}{(1 + u^2)} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ car } \lim_{\infty} \frac{u}{1+u^2} = \lim_{\infty} \frac{1}{u} = 0} - \frac{1}{2} \int_R \frac{1}{1 + u^2} du$$

$$B = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, A = \frac{\pi}{2\beta^2|\Gamma|} \text{ et } \frac{2}{\pi} \int_R |Im \frac{1}{E - i\beta^2\Gamma}|^2 dE = \frac{1}{\beta^2|\Gamma|}$$

3.2 Mise en forme de τ_{ψ_0}

On veut mettre $\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R |Im(\frac{1}{E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E)})|^2 dE$ sous une forme $A = \int_R |Im \frac{1}{E - i\beta^2 \Gamma}|^2 dE$. Pour cela, on va linéariser le dénominateur en utilisant le théorème des fonctions implicites.

3.2.1 Théorème des fonctions implicites

Enoncé:

Hypothèses: Soit h de classe $C^1 : E \times F \rightarrow G$, avec $E \times F$ de Banach, $h(a, b) = 0$ et $D_2 h(a, b)$ isomorphisme de $F \rightarrow G$.

Conclusion: $\exists U$ voisinage de a dans E / $\exists ! \phi : U \rightarrow F$ de classe C^1 vérifiant $\phi(a) = b$ et $\forall x \in U, h(x, \phi(x)) = 0$. Autrement dit, $\phi(a) = b$ et $h(x, y) = 0 \iff y = \phi(x)$.

3.2.2 Application

On considère $F(\beta, E) = E_0 - E - \beta^2 f(E)$, avec $f(E) = V_p(\frac{1}{x-E})(|\phi|^2)$, $f \in C^1$. Alors $F(0, E_0) = 0$ et $\frac{\partial F(\beta, E)}{\partial E} = -1 - \beta^2 f'(E)$ d'où $\frac{\partial F(0, E_0)}{\partial E} = -1 \neq 0$. Donc le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une fonction $E(\beta) = E_\beta$ telle que $F(\beta, E_\beta) = 0$.

On a donc $F(\beta, E) = F(\beta, E) - F(\beta, E_\beta) = \int_{E_\beta}^E \frac{\partial F(\beta, s)}{\partial E} ds$ (car F est C^1). On veut se ramener à des bornes fixes dans l'intégrale, on fait le changement de variable: $s = (1 - u)E_\beta + uE = (E - E_\beta)u + E_\beta$, $ds = (E - E_\beta)du$.

$$F(\beta, E) = (E - E_\beta) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial F(\beta, (E - E_\beta)u + E_\beta)}{\partial E} du}_{\tilde{F}(\beta, E)} = (E - E_\beta) \tilde{F}(\beta, E).$$

$$\begin{aligned} \text{De même } g(E) &= g(E_\beta) + (g(E) - g(E_\beta)) = g(E_\beta) + \int_{E_\beta}^E g'(s) ds \\ &= g(E_\beta) + (E - E_\beta) \underbrace{\int_0^1 g'((E - E_\beta)u + E_\beta) du}_{\tilde{G}(\beta, E)} \\ &= g(E_\beta) + (E - E_\beta) \tilde{G}(\beta, E). \end{aligned}$$

Donc le dénominateur intervenant dans τ_{ψ_0} se linéarise en
 $E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E) = (E - E_\beta) \tilde{F}(\beta, E) - i\beta^2 g(E)$
 $= (E - E_\beta) (\tilde{F}(\beta, E) - i\beta^2 \tilde{G}(\beta, E)) - i\beta^2 g(E_\beta) = (E - E_\beta) G(\beta, E) - i\beta^2 g(E_\beta)$
avec $G(\beta, E) = \tilde{F}(\beta, E) - i\beta^2 \tilde{G}(\beta, E) \in \mathbb{C}$.
D'où

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R |Im \frac{1}{(E - E_\beta) G(\beta, E) - i\beta^2 g(E_\beta)}|^2 dE \quad (3.2)$$

On va comparer cette expression de τ_{ψ_0} à une expression de la forme
 $\int_R |Im \frac{1}{(E - \tilde{E}) a - i\beta^2 g(E_\beta)}|^2 dE$, où a est un complexe que l'on choisira
convenablement par la suite.

3.3 Etude asymptotique

3.3.1 Calcul de l'intégrale de référence

On commence par calculer $J = \int_R |Im \frac{1}{(E - \tilde{E}) a - i\beta^2 \Gamma}|^2 dE = \int_R |Im \Psi(E)|^2 dE$,
avec $a = c + id \in \mathbb{C}$ et $\Gamma = g(E_\beta) > 0$ car $g(E) = \pi \phi(E)^2$.
Déjà par changement de variable (translation), on a

$$J = \int_R |Im \frac{1}{Ea - i\beta^2 \Gamma}|^2 dE = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R |Im \frac{1}{Ea - i\beta^2 \Gamma}|^2 dE$$

On utilise le théorème des résidus en considérant $\oint_{C_R} |Im \frac{1}{Ea - i\beta^2 \Gamma}|^2 dE$ avec
 $C_R = [-R, R] \cup d_R$ et d_R = demi-cercle supérieur de rayon R , de centre 0.

D'une part, on aura $J = \oint_{C_R} |Im \frac{1}{Ea - i\beta^2\Gamma}|^2 dE$ (d'après la relation de Chasles et $\lim_{R \rightarrow \infty} (\oint_{d_R} |Im \frac{1}{Ea - i\beta^2\Gamma}|^2 dE) = 0$ que nous prouverons à la fin).

D'autre part, $\oint_{C_R} |Im \frac{1}{Ea - i\beta^2\Gamma}|^2 dE = 2i\pi \sum (\text{Résidus des pôles à l'intérieur de } C_R) \Rightarrow J = 2i\pi \sum (\text{Résidus des pôles à l'intérieur de } C_R)$.

$$J = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R (Im \frac{1}{Ec + i(Ed - \beta^2\Gamma)})^2 dE$$

$$J = \frac{-1}{4} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R [(\frac{1}{Ec + i(Ed - \beta^2\Gamma)} - \frac{1}{Ec + i(Ed - \beta^2\Gamma)})]^2 dE \text{ car } Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Seul le double-produit a un résidu non nul, qu'on note Res. Calculons

$$Res(\frac{1}{2} * \frac{1}{Ec + i(Ed - \beta^2\Gamma)} \frac{1}{Ec - i(Ed - \beta^2\Gamma)}) = Res(\frac{1}{2} * \frac{1}{E(c + id) - i\beta^2\Gamma} \frac{1}{E(c - id) + i\beta^2\Gamma})$$

On a deux pôles simples qui sont

$$\alpha = \frac{-i\beta^2\Gamma}{c - id} = \frac{-i\beta^2\Gamma(c + id)}{c^2 + d^2} = \frac{\beta^2\Gamma(d - ic)}{c^2 + d^2} \text{ et } \gamma = \frac{i\beta^2\Gamma}{c + id} = \frac{\beta^2\Gamma(d + ic)}{c^2 + d^2}$$

Supposons que $c > 0$, alors le seul pôle à l'intérieur de C_R est γ de partie imaginaire > 0 .

Donc

$$\begin{aligned} & Res(\frac{1}{2} * \frac{1}{E(c + id) - i\beta^2\Gamma} \frac{1}{E(c - id) + i\beta^2\Gamma}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{E \rightarrow \gamma} (E - \gamma) (\frac{1}{E(c + id) - i\beta^2\Gamma} \frac{1}{E(c - id) + i\beta^2\Gamma}) = \frac{1}{4ic\beta^2\Gamma} \end{aligned}$$

Si $c < 0$, par un raisonnement analogue en choisissant cette fois le pôle α , on trouve pour résidu $\frac{-1}{4ic\beta^2\Gamma}$, on peut dire finalement que dans les 2 cas $Res = \frac{1}{4i|c|\beta^2\Gamma}$.

$$\Rightarrow J = 2i\pi Res = 2i\pi \frac{1}{4i|c|\beta^2\Gamma} = \frac{\pi}{2\beta^2|c|\Gamma}$$

On constate que J ne dépend que de la partie réelle de a.

Il reste à prouver que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{d_R} \frac{1}{2} * \frac{1}{E(c + id) - i\beta^2\Gamma} * \frac{1}{E(c - id) + i\beta^2\Gamma} dE = 0$$

On paramétrise par $E = Re^{i\theta}$ donc

$$\begin{aligned}
& \oint_{d_R} \left| \frac{1}{2} * \frac{1}{E(c+id) - i\beta^2\Gamma} \frac{1}{E(c-id) + i\beta^2\Gamma} \right| dE \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi \left| \frac{iRe^{i\theta}}{[Re^{i\theta}a - i\beta^2\Gamma][Re^{i\theta}\bar{a} + i\beta^2\Gamma]} \right| d\theta \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{R}{|R^2e^{2i\theta}|a|^2 + i\beta^2\Gamma Re^{i\theta}(a - \bar{a}) + \beta^4\Gamma^2|} d\theta \\
& \leq \frac{\pi}{2} \sup_{\theta \in [0, \pi]} \frac{R}{|R^2e^{2i\theta}|a|^2 + i\beta^2\Gamma Re^{i\theta}(a - \bar{a}) + \beta^4\Gamma^2|} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty \text{ car } \sim \frac{\pi}{2R}
\end{aligned}$$

3.3.2 Majoration de la différence entre τ et l'intégrale de référence

Maintenant, il s'agit d'estimer la différence entre

$$\int_R |Im \frac{1}{(E - E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2g(E_\beta)}|^2 dE - \int_R |Im(\frac{1}{(E - \tilde{E})a - i\beta^2\Gamma})|^2 dE$$

Posons

$$\Phi(E) = \frac{1}{(E - E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2g(E_\beta)} \text{ et } \Psi(E) = \frac{1}{(E - \tilde{E})a - i\beta^2\Gamma}$$

On veut estimer $\|Im\Phi\|_2^2 - \|Im\Psi\|_2^2$.

Pour cela, il suffit de connaître $\|\Phi - \Psi\|_2$.

En effet, $\|\Phi - \Psi\|_2$ contrôle $\|Im\Phi\|_2^2 - \|Im\Psi\|_2^2$ avec Ψ donnée .

preuve: $\|Im\Phi\|_2^2 - \|Im\Psi\|_2^2 = (\|Im\Phi\|_2 - \|Im\Psi\|_2)(\|Im\Phi\|_2 + \|Im\Psi\|_2)$

$$= (\|Im\Phi\|_2 - \|Im\Psi\|_2)(\|Im\Phi\|_2 - \|Im\Psi\|_2 + 2\|Im\Psi\|_2)$$

$$\leq \|Im(\Phi - \Psi)\|_2^2 + 2\|Im(\Psi)\|_2\|Im(\Phi - \Psi)\|_2$$

car d'après la deuxième inégalité triangulaire

$$\|Im(\Phi)\|_2 - \|Im(\Psi)\|_2 \leq \|Im\Phi - Im\Psi\|_2 = \|Im(\Phi - \Psi)\|_2.$$

Donc $\|Im\Phi\|_2^2 - \|Im\Psi\|_2^2 \leq \|\Phi - \Psi\|_2^2 + 2\|Im(\Psi)\|_2\|\Phi - \Psi\|_2$

(3.3)

car $|Im(z)|^2 \leq |Im(z)|^2 + |Re(z)|^2 = |z|^2$.

Ainsi, tout est contrôlé par $\|\Phi - \Psi\|_2$.

On va désormais se concentrer sur la quantité $\|\Phi - \Psi\|_2^2$.

3.4 Première tentative d'estimation

3.4.1 Choix de a

$$\Phi(E) - \Psi(E) = \frac{1}{(E - E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2\Gamma} - \frac{1}{(E - \tilde{E})a - i\beta^2\Gamma} \quad (cf 3.3.2) \text{ avec } \Gamma = g(E_\beta) \text{ et } \tilde{E} = E$$

$$\Phi(E) - \Psi(E) = \frac{(E - E_\beta)(a - G(\beta, E))}{[(E - E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2\Gamma][(E - \tilde{E})a - i\beta^2\Gamma]}$$

$$\|\Phi - \Psi\|_2^2 = \int_R \left| \frac{(E - E_\beta)(a - G(\beta, E))}{[(E - E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2\Gamma][(E - \tilde{E})a - i\beta^2\Gamma]} \right|^2 dE$$

$$\|\Phi - \Psi\|_2^2 = \int_R \left| \frac{E(a - G(\beta, E + E_\beta))}{[EG(\beta, E + E_\beta) - i\beta^2\Gamma][Ea - i\beta^2\Gamma]} \right|^2 dE$$

par le changement de variable " $E = E - E_\beta$ ".

On veut que cette quantité $\rightarrow 0$ quand $\beta \rightarrow 0$. Il faut choisir un a convenable.

Candidat: $a = G(0, E + E_0)$. Or $G(\beta, E) = \tilde{F}(\beta, E) - i\beta^2\tilde{G}(\beta, E)$
d'où

$$\begin{aligned} G(0, E + E_0) &= \tilde{F}(0, E + E_0) \\ \tilde{F}(\beta, E) &= \int_0^1 \frac{\partial F(\beta, u(E - E_\beta) + E_\beta)}{\partial E} du, \quad \frac{\partial F(\beta, u(E - E_\beta) + E_\beta)}{\partial E} \\ \tilde{F}(\beta, E) &= \underbrace{-1 - \beta^2 f'(u(E - E_\beta) + E_\beta)}_{\rightarrow -1 \text{ quand } \beta \rightarrow 0} \end{aligned}$$

On va donc prendre $a = -1$

3.4.2 Vérification

D'après ci-dessus, il est facile de voir que

$$a - G(\beta, E + E_\beta) = -1 - (-1 - \beta^2 \int_0^1 f'(uE + E_\beta) + ig'(uE + E_\beta) du = O(\beta^2)$$

en supposant que f' et g' sont bornées.

Alors

$$\begin{aligned} \|\Phi - \Psi\|_2^2 &= \int_R \left| \frac{E(a - G(\beta, E + E_\beta))}{[EG(\beta, E + E_\beta) - i\beta^2\Gamma][Ea - i\beta^2\Gamma]} \right|^2 dE \\ \|\Phi - \Psi\|_2^2 &= \int_R \left| \frac{EO(\beta^2)}{[EG(\beta, E + E_\beta) - i\beta^2\Gamma][Ea - i\beta^2\Gamma]} \right|^2 dE \\ &= O(\beta^4) \int_R \frac{E^2}{|[EG(\beta, E + E_\beta) - i\beta^2\Gamma][Ea - i\beta^2\Gamma]|^2} dE \\ &= O(\beta^4) \int_R \frac{E^2}{|[E^2aG(\beta, E + E_\beta) - \beta^4\Gamma^2] - i\beta^2\Gamma E(a + G(\beta, E + E_\beta))|^2} dE \end{aligned}$$

Or $aG(\beta, E + E_\beta) = 1 + O(\beta^2)$ et $a - G(\beta, E + E_\beta) = -2 + O(\beta^2)$.

$$\text{Donc } \|\Phi - \Psi\|_2^2 = O(\beta^4) \underbrace{\int_R \frac{E^2}{E^4 + 4E^2\beta^4\Gamma^2} dE}_I$$

avec

$$I = \int_R \frac{1}{E^2 + 4\beta^4\Gamma^2} dE = \frac{1}{4\beta^4\Gamma^2} \int_R \frac{1}{1 + (\frac{E}{2\beta^2\Gamma})^2} dE$$

$$I = \frac{1}{2\beta^2\Gamma} \underbrace{[\text{Arctan}(\frac{E}{2\beta^2\Gamma})]_{-\infty}^{+\infty}}_{\pi} = \frac{\pi}{2\beta^2\Gamma}$$

$$\boxed{\text{Donc } \|\Phi - \Psi\|_2^2 = O(\beta^4) \frac{\pi}{2\beta^2\Gamma} = \frac{\pi}{2\Gamma} O(\beta^2)}$$

Ainsi d'après la majoration (3.3)

$$\|Im\Phi\|_2^2 - \|Im\Psi\|_2^2 \leq \underbrace{\|\Phi - \Psi\|_2^2}_{\frac{\pi}{2\Gamma}O(\beta^2)} + 2 \underbrace{\|Im(\Psi)\|_2}_{\sqrt{\frac{\pi}{2\beta^2|\Gamma||c|}}} \underbrace{\|\Phi - \Psi\|_2}_{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma}O(\beta^2)}}$$

$$\|Im\Phi\|_2^2 - \|Im\Psi\|_2^2 \leq O(\beta^2)\frac{\pi}{2} + \underbrace{O(1)}_{=constante}$$

On n'a pas aboutit à l'estimation voulue, il faut choisir un autre candidat pour a . En s'inspirant de l'article de King, on propose de prendre $a = G(\beta, E_\beta) = -1 - \beta^2 f'(E_\beta) - i\beta^2 g'(E_\beta)$. On validera ce candidat dans la preuve du lemme 3.

3.5 Théorème

On se propose ici de présenter trois lemmes afin de démontrer un théorème qui nous permettra de conclure sur le comportement asymptotique de τ_{ψ_0} .

3.5.1 Lemme 1

- Hypothèses : Soit $x_0 \in R$ et $f \in C^2(R)$ telle que

$$|f''(x)| \leq \frac{cte}{1+x^2} \quad \forall x \in R, \text{ soit } \|(1+x^2)f''(x)\|_\infty < \infty$$

- Conclusion:

$$\forall x \in R \quad |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \leq (x - x_0)^2 \left(\frac{cte}{[1 + (x - x_0)^2]} \right)^{\frac{1}{2}}$$

preuve

$f \in C^2(R)$ donc la formule de Taylor reste intégral à l'ordre 2 donne:

$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \int_{x_0}^x (x - t)f''(t)dt$. Changement de variable:
 $t = s(x - x_0) + x_0$, $dt = (x - x_0)ds$ et $x - t = (x - x_0)(1 - s)$.

D'où $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)^2 \int_0^1 (1 - s)f''(s(x - x_0) + x_0)ds$
et $|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \leq (x - x_0)^2 \int_0^1 |f''(s(x - x_0) + x_0)|ds$
 $\leq (x - x_0)^2 \int_0^1 \frac{1}{1 + [s(x - x_0) + x_0]^2} ds$ par hypothèse sur f'' .

Il faut montrer que $\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1 + [s(x - x_0) + x_0]^2} ds}_J \leq (\frac{cte}{([1 + (x - x_0)^2])})^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} Or \int_0^1 \frac{1}{1 + [s(x - x_0) + x_0]^2} ds &= \frac{1}{x - x_0} \int_0^1 \frac{x - x_0}{1 + [s(x - x_0) + x_0]^2} ds \\ &= \frac{1}{x - x_0} [\text{Arctan}(s(x - x_0) + x_0)]_0^1 = \frac{1}{x - x_0} [\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(x_0)] \end{aligned}$$

et on a bien que $\frac{1}{x - x_0} [\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(x_0)] = O([\frac{1}{1 + (x - x_0)^2}]^{\frac{1}{2}})$

3.5.2 Lemme 2

- Hypothèses: Soit $h: C^2 \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu' $\exists ! \tilde{E}$ vérifiant
 $\text{Re}(h(\tilde{E})) = 0, \text{Im}(h(\tilde{E})) \neq 0, |\text{Re}(h''(E))| \leq \frac{cte}{1 + E^2} \forall E \in \mathbb{R}$
et $|\text{Im}(h''(E))| \leq \frac{cte}{1 + E^2} \forall E \in \mathbb{R}$.

- Conclusion:

$$\forall E \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{1}{h(E)} - \frac{1}{h_a(E)} \right| \leq \frac{(E - \tilde{E})^2 cte}{h(E)h_a(E)[1 + (E - \tilde{E})^2]^{\frac{1}{2}}}$$

où $h_a(E) = h(\tilde{E}) + (E - \tilde{E})h'(\tilde{E})$, approximation linéaire de h
au voisinage de $\tilde{E}$.

preuve:

$$\left| \frac{1}{h(E)} - \frac{1}{h_a(E)} \right| = \left| \frac{h_a(E) - h(E)}{h_a(E)h(E)} \right|$$

avec $h(E) - h_a(E) = h(E) - h(\tilde{E}) - (E - \tilde{E})h'(\tilde{E}) = \int_{\tilde{E}}^E (E - t)h''(t)dt$
d'après la formule de Taylor reste-intégral.

Changement de variable $t = s(E - \tilde{E}) + \tilde{E}$, $dt = (E - \tilde{E})ds$ et

$$E - t = (1 - s)(E - \tilde{E}),$$

$$h(E) - h_a(E) = (E - \tilde{E})^2 \int_0^1 (1 - s)h''(s(E - \tilde{E}) + \tilde{E})ds.$$

$$\text{Donc } |h(E) - h_a(E)| \leq (E - \tilde{E})^2 \int_0^1 |h''(u(E - \tilde{E}) + \tilde{E})|du$$

On est ramené au lemme précédent avec $x = E$ et $x_0 = \tilde{E}$ car, par hypothèse,

$$|Re(h''(E))| \text{ et } |Im(h''(E))| \leq \frac{cte}{1+E^2} \forall E \in R \implies |h''(E)| = \sqrt{(Re(h''(E)))^2 + (Im(h''(E)))^2} \\ \leq \sqrt{\frac{cte1+cte2}{(1+E^2)^2}} = \frac{cte3}{|1+E^2|^2} = \frac{cte}{(1+E^2)^2}. \text{ Le résultat du lemme 1 s'applique d'où}$$

$$|h(E) - h_a(E)| \leq \frac{(E - \tilde{E})^2 cte}{[1 + (E - \tilde{E})^2]^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$\left| \frac{1}{h(E)} - \frac{1}{h_a(E)} \right| \leq \frac{(E - \tilde{E})^2 cte}{h(E)h_a(E)[1 + (E - \tilde{E})^2]^{\frac{1}{2}}}$$

3.5.3 Lemme 3

- Hypothèses: Soit la fonction $H(\beta, E) = E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E)$ telle qu' $\exists !E_\beta$ vérifiant $Re[H(\beta, E_\beta)] = 0$ et $Im[H(\beta, E_\beta)] \neq 0$.
On suppose que f et g sont C^2 telles que $\|(1 + E^2)f''(E)\|_\infty < \infty$ et $\|(1 + E^2)g''(E)\|_\infty < \infty$.
On suppose aussi $|f'(E)|$ bornée $\forall E$.

- Conclusion:

$$\forall E \in R, \quad \left| \frac{1}{H(\beta, E)} - \frac{1}{H_a(\beta, E)} \right| \leq \frac{cte\beta^2}{[1 + (E - E_\beta)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{où } H_a(\beta, E) = H(\beta, E_\beta) + (E - E_\beta) \frac{\partial H(\beta, E_\beta)}{\partial E}$$

preuve:

$$\text{Déjà } H(\beta, E) = E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E) = (E - E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2 g(E_\beta) \\ \text{et } H_a(\beta, E) = H(\beta, E_\beta) + (E - E_\beta) \frac{\partial H(\beta, E_\beta)}{\partial E}$$

avec $H(\beta, E_\beta) = -i\beta^2 g(E_\beta)$ et $\frac{\partial H(\beta, E_\beta)}{\partial E} = G(\beta, E_\beta) = a$.

Donc

$$H(\beta, E) = (E - E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2 g(E_\beta) \quad (3.4)$$

et

$$H_a(\beta, E) = (E - E_\beta)a - i\beta^2 g(E_\beta) \quad (3.5).$$

Première Etape

$$\left| \frac{1}{H(\beta, E)} - \frac{1}{H_a(\beta, E)} \right| = \left| \frac{H_a(\beta, E) - H(\beta, E)}{H_a(\beta, E)H(\beta, E)} \right|$$

D'après Taylor reste-intégral

$$H(\beta, E) - H_a(\beta, E) = (E - E_\beta)^2 \int_0^1 (1-u) \partial_{EE} H(\beta, u(E - E_\beta) + E_\beta) du.$$

On applique le lemme 2 à $H(\beta, E) = E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E)$ avec $\tilde{E} = E_\beta$ et $\partial H_{EE}(\beta, E) = -\beta^2(f''(E) + ig''(E))$. Donc

$$\left| \frac{1}{H(\beta, E)} - \frac{1}{H_a(\beta, E)} \right| \leq \left| \frac{cte(E - E_\beta)^2 \|(1 + E^2) \partial H_{EE}(\beta, E)\|_\infty}{H(\beta, E)H_a(\beta, E)[1 + (E - E_\beta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right|$$

$$\left| \frac{1}{H(\beta, E)} - \frac{1}{H_a(\beta, E)} \right| \leq \beta^2 \frac{(E - E_\beta)^2}{|H(\beta, E)H_a(\beta, E)|} \frac{|cte| \|(1 + E^2)(f''(E) + g''(E))\|_\infty}{[1 + (E - E_\beta)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leq \beta^2 \frac{(E - E_\beta)^2}{|H(\beta, E)H_a(\beta, E)|} \frac{|cte|}{[1 + (E - E_\beta)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

car par hypothèses $\|(1 + E^2)f''(E)\|_\infty < \infty$ et $\|(1 + E^2)g''(E)\|_\infty < \infty$.

Seconde Etape

Intéressons nous à la quantité $\frac{(E - E_\beta)^2}{|H(\beta, E)H_a(\beta, E)|}$. On veut la majorer indépendamment de E et β .

$$\begin{aligned} H(\beta, E) &= (E - E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2 g(E_\beta) \\ |H(\beta, E)|^2 &= [(E - E_\beta)Re(G)]^2 + [(E - E_\beta)Im(G) + \beta^2 g(E_\beta)]^2 \\ &\geq [(E - E_\beta)Re(G)]^2 \end{aligned}$$

De même $|H_a(\beta, E)|^2 \geq [(E - E_\beta)Re(a)]^2$

$$\implies \frac{(E - E_\beta)^2}{|H(\beta, E)H_a(\beta, E)|} \leq \frac{1}{|Re(G(\beta, E))||Re(a)|}$$

et on veut que cette quantité soit $\leq cte$
ce qui $\iff |Re(G(\beta, E))||Re(a)| \geq cte$.

Or

$$G(\beta, E) = \int_0^1 \frac{\partial H(\beta, u(E - E_\beta) + E_\beta)}{\partial E} du$$

donc $Re(G(\beta, E)) = -1 - \beta^2 \int_0^1 f'(u(E - E_\beta) + E_\beta) du$

Par hypothèse $|f'(E)| \leq cte \ \forall E \in R \implies |f'(u(E - E_\beta) + E_\beta)| \leq \|f'\|_\infty$
 $\implies -\|f'\|_\infty \leq f'(u(E - E_\beta) + E_\beta) \leq \|f'\|_\infty$
 $\implies -1 - \beta^2 \|f'\|_\infty \leq Re(G(\beta, E)) \leq -1 + \beta^2 \|f'\|_\infty$.

Comme $\beta \rightarrow 0$, pour β suffisamment petit ($\beta \leq \frac{1}{\sqrt{2\|f'\|_\infty}}$), on peut s'arranger
pour que $Re(G(\beta, E)) \leq -\frac{1}{2}$ d'où $|Re(G(\beta, E))| \geq \frac{1}{2}$.

De même pour

$$|Re(a)| \geq \frac{1}{2}.$$

Donc pour β suffisamment petit, on a $|Re(G(\beta, E))||Re(a)| \geq \frac{1}{4}$
et

$$\frac{(E - E_\beta)^2}{|H(\beta, E)H_a(\beta, E)|} \leq 4 = cte$$

Dernière Etape

$$\left| \frac{1}{H(\beta, E)} - \frac{1}{H_a(\beta, E)} \right| \leq \beta^2 \frac{(E - E_\beta)^2}{|H(\beta, E)H_a(\beta, E)|} \left(\frac{|cte|}{[1 + (E - E_\beta)^2]} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \beta^2 \left(\frac{|cte|}{[1 + (E - E_\beta)^2]} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Fin de la preuve

3.5.4 Théorème

On se place dans le cadre de notre modèle $\left(\begin{array}{cc} E_0 & \beta < \phi \\ \beta|\phi > & x \end{array} \right)$ dans $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^2(R)$

avec $\psi_0 = (1, 0)$.

On suppose que toutes les hypothèses du lemme 3 sont vérifiées pour $f(E) = V_P(\frac{1}{x-E})(|\phi|^2)$ et $g(E) = \pi|\phi(E)|^2$.

Alors, on a

$$\tau_{\psi_0} = \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta) |Re(a)|} + O(\beta) \quad (3.6)$$

preuve:

- D'après la partie 3.3.2, $\Phi(E) = \frac{1}{(E-E_\beta)G(\beta, E) - i\beta^2 g(E_\beta)}$ et $\Psi(E) = \frac{1}{(E-E_\beta)a - i\beta^2 g(E_\beta)}$
soit $\Phi(E) = \frac{1}{H(\beta, E)}$ et $\Psi(E) = \frac{1}{H_a(\beta, E)}$ (cf les relations 3.4 et 3.5).

- D'après la partie 3.3.1,

$$\|Im\Psi(E)\|_2^2 = \int_R |Im \frac{1}{(E-E_\beta)a - i\beta^2 g(E_\beta)}|^2 dE = \frac{\pi}{2\beta^2 |g(E_\beta)| |Re(a)|} = O(\frac{1}{\beta^2})$$

$$\text{et } \|Im\Psi(E)\|_2 = O(\frac{1}{\beta})$$

- D'après le lemme 3, on a

$$|\Phi(E) - \Psi(E)| = \left| \frac{1}{H(\beta, E)} - \frac{1}{H_a(\beta, E)} \right| \leq \frac{\beta^2 |cte|}{[1 + (E - E_\beta)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \|\Phi(E) - \Psi(E)\|_2 = \left\| \frac{1}{H(\beta, E)} - \frac{1}{H_a(\beta, E)} \right\|_2 \leq \beta^2 |cte| \underbrace{\left\| \frac{1}{[1 + (E - E_\beta)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\|_2}_{< +\infty} = O(\beta^2)$$

- D'après (3.3) $\|Im\Phi\|_2^2 - \|Im\Psi\|_2^2 \leq \|\Phi - \Psi\|_2^2 + 2\|Im(\Psi)\|_2 \|\Phi - \Psi\|_2$

- Donc $\|Im\Phi\|_2^2 - \|Im\Psi\|_2^2 \leq O(\beta^4) + 2O(\frac{1}{\beta})O(\beta^2) = O(\beta)$

$$\implies \|Im\Phi\|_2^2 = \|Im\Psi\|_2^2 + O(\beta)$$

Conclusion

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R |Im(\frac{1}{E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E)})|^2 dE = \frac{2}{\pi} \|Im\Phi(E)\|_2^2 = \frac{2}{\pi} \|Im\Psi\|_2^2 + O(\beta)$$

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} * \frac{\pi}{2\beta^2 g(E_\beta) |Re(a)|} = \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta) |Re(a)|} + O(\beta) \quad (3.6)$$

On constate que le résultat obtenu diffère de la conjecture en deux points:
d'une part, avec le $|Re(a)|$ et d'autre part avec le $g(E_\beta)$ au lieu du $g(E_0)$.

Chapter 4

Correction de la Conjecture et Estimation du terme d'erreur

On vient de trouver

$$\tau_{\psi_0} = \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta) |Re(a)|} + O(\beta) \quad (3.6)$$

4.1 Correction en $Re(a)$

On rappelle que $a = -1 - \beta^2 f'(E_\beta) - i\beta^2 g'(E_\beta)$ et $Re(a) = -1 - \beta^2 f'(E_\beta)$. Calculons $|Re(a)|$ selon le signe de $f'(E_\beta)$ (qu'on suppose non connu).

1^{er} cas: si $f'(E_\beta) \geq 0$ alors $Re(a) = -1 - \beta^2 f'(E_\beta)$

et $|Re(a)| = 1 + \beta^2 f'(E_\beta) = 1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|$

2^{ème} cas: si $f'(E_\beta) \leq 0$ alors $Re(a) = -1 - \beta^2 f'(E_\beta)$

et $|Re(a)| = 1 - \beta^2 f'(E_\beta) = 1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|$

Dans les deux cas, on trouve $|Re(a)| = 1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|$

Donc

$$\tau_{\psi_0} = \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta) (1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|)} + O(\beta)$$

$$\tau_{\psi_0} = \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta)} \left(1 - \frac{\beta^2 |f'(E_\beta)|}{1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|} \right) + O(\beta)$$

$$car \frac{1}{1+A} = 1 - \frac{A}{1+A}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta)} - \frac{|f'(E_\beta)|}{g(E_\beta)} \frac{1}{1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|} + O(\beta) \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta)} - \frac{|f'(E_\beta)|}{g(E_\beta)} \left(1 - \frac{\beta^2 |f'(E_\beta)|}{1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|}\right) + O(\beta) \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta)} - \frac{|f'(E_\beta)|}{g(E_\beta)} + \underbrace{\beta^2 \frac{|f'(E_\beta)|^2}{g(E_\beta)(1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|)}}_{\text{absorbé par le terme complémentaire}} + O(\beta) \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta)} - \frac{|f'(E_\beta)|}{g(E_\beta)} + O(\beta)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

4.2 Correction en $g(E_\beta)$

On reprend (3.7) et on va développer $f'(E_\beta)$ et $g(E_\beta)$ autour du point 0; on rappelle que $E_\beta = E(\beta)$ a été définie dans la partie 3.2.2 par $F(\beta, E_\beta) = 0$ où $F(\beta, E) = E_0 - E - \beta^2 f(E)$ grâce au théorème des fonctions implicites qui assure son existence. On prend pour notation $g(E_\beta) = (g \circ E)(\beta)$.

D'après l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 ($g \in C^2$), $\exists \xi \in]0, \beta[$ /

$$g(E_\beta) = g(E_0) + (g \circ E)'(0)(\beta - 0) + (g \circ E)''(\xi)(\beta - 0)^2$$

De même, à l'ordre 1 pour f' (f étant C^2), $\exists \eta \in]0, \beta[$ /

$$f'(E_\beta) = f'(E_0) + (f' \circ E)'(\eta)(\beta - 0)$$

D'autre part, $F(\beta, E_\beta) = 0 \implies \left[\frac{\partial F(\beta, E_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial F(\beta, E_\beta)}{\partial E} E'(\beta) \right](\beta = 0) = 0$ soit

$$E'(\beta = 0) = - \frac{\frac{\partial F(\beta, E_\beta)}{\partial \beta}}{\frac{\partial F(\beta, E_\beta)}{\partial E}}(\beta = 0) = \frac{2\beta f'(E_\beta)}{-1}(\beta = 0) = 0$$

Dans le développement de Lagrange de $g(E_\beta)$, le terme d'ordre 1 en β sera nul (on aura $(g \circ E)'(0) = g'(E(0))E'(0) = 0$) .

$$\begin{aligned}
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 g(E_\beta)(1 + \beta^2 |f'(E_\beta)|)} + O(\beta) \quad (3.7) \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 [g(E_0) + \beta^2 (g \circ E)''(\xi)] [1 + \beta^2 (|f'(E_0) + \beta (f' \circ E)'(\eta)|)]} + O(\beta) \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 [g(E_0) + \beta^2 (g \circ E)''(\xi)] [1 + \beta^2 |f'(E_0)| + O(\beta^3)]} + O(\beta) \quad \text{car } f' \text{ bornée}
\end{aligned}$$

On redéveloppe $\beta^2 (g \circ E)''(\xi)$ autour de 0 et seul le terme $(g \circ E)''(0)$ nous intéresse car les autres seront de l'ordre de β^3 :

$$\begin{aligned}
(g \circ E)''(0) &= (g'(E_0)E')'(0) = g''(E_0)E_0'^2 + g'(E_0)E_0'' = g'(E_0)E_0'' \quad \text{car } E_0' = 0 \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 [g(E_0) + \beta^2 (g'(E_0)E_0'' + O(\beta^3))] [1 + \beta^2 |f'(E_0)| + O(\beta^3)]} + O(\beta) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

On exprime E_0'' grâce à $F(\beta, E_\beta) = 0$

$$\begin{aligned}
&\implies \left[\frac{\partial F(\beta, E_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial F(\beta, E_\beta)}{\partial E} E'(\beta) \right] (\beta = 0) = 0 \\
&\implies \left[\frac{\partial^2 F(\beta, E_\beta)}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 F(\beta, E_\beta)}{\partial \beta \partial E} E'(\beta) + \frac{\partial^2 F(\beta, E_\beta)}{\partial E \partial \beta} E'(\beta) + \frac{\partial^2 F(\beta, E_\beta)}{\partial E^2} E'(\beta)^2 + \frac{\partial F(\beta, E_\beta)}{\partial E} E''(\beta) \right] = \\
&0 \text{ donc en } \beta = 0 \text{ on a } \frac{\partial^2 F(0, E_0)}{\partial \beta^2} + \frac{\partial F(0, E_0)}{\partial E} E''(0) = 0 \\
&\implies E_0'' = -\frac{\frac{\partial^2 F(0, E_0)}{\partial \beta^2}}{\frac{\partial F(0, E_0)}{\partial E}} = -\frac{-2f(E_0)}{-1} = -2f(E_0)
\end{aligned}$$

On réinjecte dans (3.8) d'où

$$\begin{aligned}
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 [g(E_0) + \beta^2 [|f'(E_0)|g(E_0) - 2g'(E_0)f(E_0)] + O(\beta^3)]} + O(\beta) \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 g(E_0)} \frac{1}{1 + \beta^2 \frac{[|f'(E_0)|g(E_0) - 2g'(E_0)f(E_0)]}{g(E_0)} + O(\beta^3)} + O(\beta) \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 g(E_0)} \left(1 - \frac{\beta^2 \frac{[|f'(E_0)|g(E_0) - 2g'(E_0)f(E_0)]}{g(E_0)} + O(\beta^3)}{1 + \beta^2 \frac{[|f'(E_0)|g(E_0) - 2g'(E_0)f(E_0)]}{g(E_0)} + O(\beta^3)} \right) + O(\beta) \\
\tau_{\psi_0} &= \frac{1}{\beta^2 g(E_0)} - \frac{|f'(E_0)|g(E_0) - 2g'(E_0)f(E_0)}{g(E_0)^2} + O(\beta)
\end{aligned}$$

On reconnaît le terme divergeant quadratiquement quand $\beta \rightarrow 0$ et de coefficient $\frac{1}{g(E_0)}$ ainsi que le terme de correction par rapport à la conjecture faite en (3.1), ce terme étant indépendant de β .

Conclusion

Théorème Final

On se place dans le cadre de notre modèle perturbé $\left(\begin{array}{cc} E_0 & \beta < \phi \\ \beta|\phi > & x \end{array} \right)$ dans $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^2(R)$ avec β paramètre réel petit, $\psi_0 = (1, 0)$ et $\phi \in L^2(R)$.
On rappelle que $\tau_{\psi_0} = \int_R |\psi(t)|^2 dt$, où $\psi(t)$ est la solution de l'équation de Schrödinger satisfaisant à la condition initiale $\psi(0) = \psi_0$.
On s'intéresse au temps de séjour de ce système : quand $\beta = 0$, $\tau_{\psi_0} = +\infty$ et on veut étudier son comportement asymptotique quand $\beta \rightarrow 0$.
On a prouvé dans la première partie que dès que $|\phi|^2 \in L^1 \cap C_b^1$

$$\tau_{\psi_0} = \frac{2}{\pi} \int_R \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{E_0 - E - \beta^2 f(E) - i\beta^2 g(E)} \right) \right|^2 dE \quad (2.8)$$

où $f(E) = V_P(\frac{1}{x-E})(|\phi|^2)$ et $g(E) = \pi|\phi(E)|^2$

On suppose que f et g vérifient les conditions suivantes:

- f et g sont C^2
- $\|(1 + E^2)(f''(E) + g''(E))\|_{\infty} < +\infty$
- $\|f'\|_{\infty} < +\infty$

Conclusion : Pour β suffisamment petit,

$$\tau_{\psi_0} = \frac{1}{\beta^2 g(E_0)} + \frac{2g'(E_0)f(E_0) - |f'(E_0)| g(E_0)}{g(E_0)^2} + O(\beta)$$

Bibliographie

- Article "Exponential Decay Near Resonance without Analyticity", de Christopher King
Letters in Mathematical Physics / 1991 - Kluwer Academic Publishers
- "Resonance Theory for Schrödinger Operators", de O.Costin et A.Soffer
Communications in Mathematical Physics / 2001- Springer-Verlag