Energie du vide en présence de gravitation: régularisation, renormalisation et ambiguïtés

Antoine Folacci

BUT DE L'EXPOSE:

• Expliquer sur un exemple simple comment on définit l'énergie du vide pour un champ quantique sur un espace-temps courbe et discuter les ambiguïtés de cette définition.

• Mettre en évidence le fait que, lorsqu'on quantifie un champ en présence de gravitation, on est nécessairement conduit à modifier le lagrangien d'Einstein-Hilbert (voir aussi Utiyama-DeWitt 1962 et 't Hooft-Veltman 1974).

• Remarques: Nous allons développer cette problématique dans le cadre d'une approche dite de "point-splitting". Il existe d'autres approches comme celle utilisant l'action effective (en liaison avec la régularisation dimmensionnelle) et celle utilisant la fonction ζ de Riemann généralisée.

QUELQUES REFERENCES:

1 - B. S. DeWitt The Global Approach to Quantum Field Theory (Oxford University Press, 2003)

2a R. Wald Quantum Field Theory in Curved Space-time and Black Hole Thermodynamics (University of Chicago Press, 1994)

2b - N. D. Birrell and P. C. W. Davies "Quantum Fields in Curved Space" (Cambridge University Press, 1982)

2c - S. A. Fulling "Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time" (Cambridge University Press, 1989)

3 - J. Hadamard "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations" (Yale University Press, 1923)

4 - F. G. Friedlander "The Wave Equation in Curved Spacetime" (Cambridge University Press, 1975)

5a Y. Decanini et A. Folacci, Phys. Rev. D 73, 044027 (2006)

5b Y. Decanini et A. Folacci, Class. Quant. Grav. 24, p. 4777 (2007)

5c Y. Decanini et A. Folacci, Phys. Rev. D 78, 044025 (2008)

I. ELÉMENTS DE THÉORIE CLASSIQUE

• Champ scalaire massif Φ sur un espace-temps courbe $(\mathcal{M}, g)$ de dimension d ($d > 2$).

- Action: C'est la fonctionnelle $S = S\left[\Phi, g_{\mu\nu}\right]$ donnée par

$$S = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^d x (-g)^{1/2} \left(g^{\mu\nu}\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + m^2\Phi^2 + \xi R\Phi^2\right), \tag{1}$$

m étant la masse du champ scalaire et ξ un facteur sans dimension rendant compte du couplage entre le champ scalaire et le champ gravitationnel.

- Equation d'onde: Par dérivation fonctionnelle de S par rapport à Φ on a

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = (-g)^{1/2}\left(\Box - m^2 - \xi R\right)\Phi \tag{2}$$

et l'extrémisation de cette dérivée conduit à l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\Box - m^2 - \xi R\right)\Phi = 0. \tag{3}$$

- Tenseur d'impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$: C'est la dérivée fonctionnelle de S par rapport à $g_{\mu\nu}$ qui permet de le définir. On a

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{(-g)^{1/2}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S\left[\Phi, g_{\mu\nu}\right] \tag{4}$$

et comme dans les variations

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \tag{5}$$

du tenseur métrique on a

$$g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma} \tag{6a}$$

$$(-g)^{1/2} \to (-g)^{1/2} + \delta(-g)^{1/2} \quad \text{avec} \quad \delta(-g)^{1/2} = \frac{1}{2}\delta(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{6b}$$

$$R \to R + \delta R \quad \text{avec} \quad \delta R = -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \left(\delta g_{\mu\nu}\right)^{;\mu\nu} - \left(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right)^{;\rho}{}_{;\rho} \tag{6c}$$

on obtient explicitement

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = {} & (1-2\xi)\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\Phi_{;\rho}\Phi_{;\sigma} \\ & -2\xi\Phi\Phi_{;\mu\nu} + 2\xi g_{\mu\nu}\Phi\Box\Phi + \xi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\Phi^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\Phi^2. \end{aligned} \tag{7}$$

• Conservation du tenseur d'impulsion-énergie.

L'action est invariante dans les difféomorphismes de l'espace-temps et donc en particulier dans les changements infinitésimaux de coordonnées du type

$$x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu \quad \text{avec} \quad |\epsilon^\mu| \ll 1. \tag{8}$$

Dans cette transformation, on a

$$\Phi \to \Phi + \delta\Phi \quad \text{avec} \quad \delta\Phi = -\epsilon^\mu \Phi_{;\mu} \tag{9a}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad \delta g_{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu;\nu} - \epsilon_{\nu;\mu}. \tag{9b}$$

L'invariance de l'action conduit à

$$\int_{\mathcal{M}} d^{\mathrm{n}}x \left[\left(\frac{\delta S}{\delta \Phi}\right) \delta\Phi + \left(\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}\right) \delta g_{\mu\nu} \right] = 0 \tag{10}$$

qui implique

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \Phi^{;\mu} \left[\Box - m^2 - \xi R\right] \Phi. \tag{11}$$

L'équation d'onde fournit

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{12}$$

• Théorie invariante conforme

Pour

$$m^2 = 0 \quad \text{et} \quad \xi = \xi_c(d) = \frac{1}{4}\left(\frac{d-2}{d-1}\right) \tag{13}$$

la théorie du champ scalaire est invariante conforme. L'action reste inchangée dans la transformation

$$\Phi \to \hat{\Phi} = \Omega^{(2-d)/2}\Phi \tag{14a}$$

$$g_{\mu\nu} \to \hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{14b}$$

et donc dans la transformation infinitésimale

$$\Phi \to \hat{\Phi} = \Phi + \delta\Phi \quad \text{avec} \quad \delta\Phi = \frac{2-d}{2}\epsilon\, \Phi \tag{15a}$$

$$g_{\mu\nu} \to \hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad \delta g_{\mu\nu} = 2\epsilon\, g_{\mu\nu}. \tag{15b}$$

correspondant à $\Omega = 1 + \epsilon$ avec $|\epsilon| \ll 1$. L'équation (10) conduit à

$$T^\mu{}_\mu = \frac{d-2}{2}\, \Phi \left[\Box - \xi_c(d) R\right] \Phi \tag{16}$$

et de l'équation d'onde on déduit que

$$T^\mu{}_\mu = 0. \tag{17}$$

II. LE TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE EN THÉORIE QUANTIQUE

• Propagateur de Feynman

- On suppose que la théorie précédente a été quantifiée et que le champ scalaire est dans un état normalisé $|\psi\rangle$. Celui-ci est complètement défini par la donnée du propagateur de Feynman

$$G^{\mathrm{F}}(x,x') = i\langle\psi|T\Phi(x)\Phi(x')|\psi\rangle. \tag{18}$$

- Equation vérifée par le propagateur de Feynman:

$$\left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) G^{\mathrm{F}}(x,x') = -\delta^d(x,x') \tag{19}$$

• L'opérateur tenseur d'impulsion-énergie en théorie quantique

Le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ est un operator quadratique en Φ, Φ étant lui-même un opérateur à valeurs sur les distributions. $T_{\mu\nu}$ n'est donc pas bien défini et la valeur moyenne du tenseur d'impulsion-énergie prise par rapport à l'état $|\psi\rangle$, notée $\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle$, est formellement infinie. Il est nécessaire de la régulariser et de renormaliser.

• "Point-splitting" de la valeur moyenne $\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle$

- On peut écrire

$$\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle = \lim_{x'\to x} \mathcal{T}_{\mu\nu}(x,x')\left[-iG^{\mathrm{F}}(x,x')\right] \tag{20}$$

avec $\mathcal{T}_{\mu\nu}(x,x')$ qui est un opérateur différentiel que l'on construit par point-splitting à partir de l'expression classique (7) du tenseur d'implusion-énergie. C'est un tenseur du type (0,2) en x et un scalaire en x' donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mu\nu} = (1-2\xi)g_\nu{}^{\nu'}\nabla_\mu\nabla_{\nu'} + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma'}\nabla_\rho\nabla_{\sigma'} \\ -2\xi g_\mu{}^{\mu'}g_\nu{}^{\nu'}\nabla_{\mu'}\nabla_{\nu'} + 2\xi g_{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla^\rho + \xi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\end{aligned} \tag{21}$$

où $g_{\mu\nu'}(x,x')$ est le bivecteur dit de transport parallèle de x vers x' défini par l'équation

$$g_{\mu\nu';\rho}\sigma^{;\rho} = 0 \tag{22a}$$

et la condition de bord

$$\lim_{x'\to x} g_{\mu\nu'} = g_{\mu\nu}. \tag{22b}$$

- Le comportement divergent à courte distance, i.e. pour $x' \to x$, du propagateur de Feynman $G^{\mathrm{F}}(x,x')$ conduit à la divergence de la valeur moyenne $\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle$.

III. REPRÉSENTATION DE DEWITT-SCHWINGER DU PROPAGATEUR DE FEYNMAN

(Fock 1937 et Schwinger 1951 en espace-temps plat, DeWitt 1963 en espace-temps courbe)

• Représentation de DeWitt-Schwinger de $G^{\mathrm{F}}(x,x')$:

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{DS}}(x,x') = i \int_0^{+\infty} H(s;x,x')\, ds \tag{23}$$

avec $H(s;x,x')$ qui vérifie l'"équation de Schrödinger"

$$\left(i\frac{\partial}{\partial s} + \Box_x - m^2 - \xi R\right) H(s;x,x') = 0 \quad \text{pour} \quad s > 0 \tag{24a}$$

et la condition "initiale"

$$H(s;x,x') \to \delta^d(x,x') \quad \text{pour} \quad s \to 0, \tag{24b}$$

et qui s'écrit pour $s \to 0$ et x' proche de x sous la forme

$$H(s;x,x') = i(4\pi i s)^{-d/2} \exp[(i/2s)(\sigma(x,x') + i\epsilon) - im^2 s] \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(x,x')(is)^n. \tag{25}$$

• Intervalle géodétique $\sigma(x,x')$

$2\sigma(x,x')$ est le carré de la distance géodésique entre x et x' et on a

$$2\sigma = \sigma^{;\mu}\sigma_{;\mu}. \tag{26}$$

• Coefficients de DeWitt $A_n(x,x')$

Fonctions biscalaires, symétriques dans l'échange de x et x', régulières pour $x' \to x$ et définies par la relation de récurrence

$$(n+1)A_{n+1} + A_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} - A_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} = (\Box_x - \xi R)\, A_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{27a}$$

et la condition de bord

$$A_0 = \Delta^{1/2}. \tag{27b}$$

• Déterminant de Van Vleck-Morette

Il est défini par

$$\Delta(x,x') = -[-g(x)]^{-1/2}\det(-\sigma_{;\mu\nu'}(x,x'))[-g(x')]^{-1/2} \tag{28}$$

et il vérifie l'équation

$$\Box_x \sigma = d - 2\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} \tag{29a}$$

et la condition de bord

$$\lim_{x'\to x} \Delta(x,x') = 1. \tag{29b}$$

• Obtention des coefficients de DeWitt $A_n(x,x')$

- Ils s'obtiennent formellement en intégrant la relation de récurrence (27a) le long de la geodésique joignant x et x'. Ils sont uniques et purement géométriques.

- Les coefficients de DeWitt "diagonaux" $a_n(x) = \lim_{x'\to x} A_n(x,x')$ sont associés aux anomalies gravitationnelles en physique. En mathématique, ils sont importants en géométrie spectrale (th. d'Atiyah-Singer).

- Les coefficients de DeWitt "non-diagonaux" permettent, en physique, d'étudier les fluctuations quantiques (ingrédients incontournables en renormalization du tenseur d'impulsion-énergie).

IV. REPRÉSENTATION DE HADAMARD DU PROPAGATEUR DE FEYNMAN

(Hadamard 1923 et DeWitt 1960 en dim 4)

A. Généralités

• Représentation de Hadamard de $G^{\mathrm{F}}(x,x')$ en dimension d paire ($d>2$)

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{H}}(x,x') = i\,\frac{\Gamma(d/2-1)}{2(2\pi)^{d/2}}\left[\frac{U(x,x')}{[\sigma(x,x')+i\epsilon]^{d/2-1}} + V(x,x')\ln[\sigma(x,x')+i\epsilon] + W(x,x')\right] \tag{30}$$

avec $U(x,x')$, $V(x,x')$ et $W(x,x')$ qui sont des biscalaires symétriques et réguliers pour $x'\to x$ et qui admettent des développements de la forme

$$U(x,x') = \sum_{n=0}^{d/2-2} U_n(x,x')\sigma^n(x,x'), \tag{31a}$$

$$V(x,x') = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(x,x')\sigma^n(x,x'), \tag{31b}$$

$$W(x,x') = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n(x,x')\sigma^n(x,x'). \tag{31c}$$

• Représentation de Hadamard de $G^{\mathrm{F}}(x,x')$ en dimension d impaire

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{H}}(x,x') = i\,\frac{\Gamma(d/2-1)}{2(2\pi)^{d/2}}\left[\frac{U(x,x')}{[\sigma(x,x')+i\epsilon]^{d/2-1}} + W(x,x')\right] \tag{32}$$

avec $U(x,x')$et $W(x,x')$ qui sont des biscalaires symétriques et réguliers pour $x'\to x$ et qui admettent des développements de la forme

$$U(x,x') = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x,x')\sigma^n(x,x'), \tag{33a}$$

$$W(x,x') = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n(x,x')\sigma^n(x,x'). \tag{33b}$$

• Coefficients Hadamard pour d pair

- Les coefficients Hadamard $U_n(x,x')$, $V_n(x,x')$ et $W_n(x,x')$ sont des biscalaires symétriques et réguliers.

- Les $U_n(x,x')$ vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned}(n+1)(2n+4-d)U_{n+1} + (2n+4-d)U_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} \\ -(2n+4-d)U_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) U_n = 0 \\ \text{avec } n = 0, 1, \ldots, d/2-3\end{aligned} \tag{34a}$$

et la condition de bord

$$U_0 = \Delta^{1/2}. \tag{34b}$$

- Les $V_n(x,x')$ vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned}(n+1)(2n+d)V_{n+1} + 2(n+1)V_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} \\ -2(n+1)V_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} \\ + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) V_n = 0 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}\end{aligned} \tag{35a}$$

et la condition de bord

$$\begin{aligned}(d-2)V_0 + 2V_{0;\mu}\sigma^{;\mu} - 2V_0\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} \\ + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) U_{d/2-2} = 0.\end{aligned} \tag{35b}$$

- Les $W_n(x,x')$ vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned}(n+1)(2n+d)W_{n+1} + 2(n+1)W_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} \\ -2(n+1)W_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} \\ +(4n+2+d)V_{n+1} + 2V_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} \\ -2V_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} \\ + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) W_n = 0 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{36}$$

qui implique

$$\begin{aligned}\sigma \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) W = -\left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) U_{d/2-2} \\ -(d-2)V - 2V_{;\mu}\sigma^{;\mu} + 2V\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu}.\end{aligned} \tag{37}$$

• Obtention des coefficients Hadamard pour d pair

- Les $U_n(x,x')$ s'obtiennent formellement en intégrant la relation de récurrence (34a) le long de la geodésique joignant x et x'. Les $V_n(x,x')$ s'obtiennent formellement en intégrant la relation de récurrence (35a). Ils sont tous uniques et purement géométriques.

- Les $W_n(x,x')$ avec $n \geq 1$ ne peuvent être obtenus que si $W_0(x,x')$ est spécifié. On encode l'état quantique dans $W_0(x,x')$ et donc dans $W(x,x')$.

• Coefficients Hadamard pour d impair

- Les coefficients Hadamard $U_n(x,x')$ et $W_n(x,x')$ sont des biscalaires symétriques et réguliers.

- Les $U_n(x,x')$ vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned}(n+1)(2n+4-d)U_{n+1} + (2n+4-d)U_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} \\ -(2n+4-d)U_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} \\ + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) U_n = 0 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}\end{aligned} \tag{38a}$$

et la condition de bord

$$U_0 = \Delta^{1/2}. \tag{38b}$$

- Les $W_n(x,x')$ vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned}(n+1)(2n+d)W_{n+1} + 2(n+1)W_{n+1;\mu}\sigma^{;\mu} \\ -2(n+1)W_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu} \\ + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) W_n = 0 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}\end{aligned} \tag{39}$$

qui implique

$$\left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) W = 0. \tag{40}$$

• Obtention des coefficients Hadamard pour d impair

- Les $U_n(x,x')$ s'obtiennent formellement en intégrant la relation de récurrence (38a) le long de la geodésique joignant x et x'.

- Les $W_n(x,x')$ avec $n \geq 1$ ne peuvent être obtenus que si $W_0(x,x')$ est spécifié. On encode l'état quantique dans $W_0(x,x')$ et donc dans $W(x,x')$.

B. Des coefficients $A_n(x,x')$ de DeWitt aux coefficients Hadamard géométriques $U_n(x,x')$ et $V_n(x,x')$

- On peut montrer qu'en dimension paire les coefficients $A_n(x,x')$ de DeWitt et les coefficients Hadamard géométriques $U_n(x,x')$ et $V_n(x,x')$ sont reliés. En raisonnant sur les relations de récurrences, on trouve

$$U_n(x,x') = \frac{(d/2-2-n)!}{2^n(d/2-2)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(m^2)^k A_{n-k}(x,x')$$

$$\text{pour } n = 0,1,\ldots,d/2-2, \tag{41a}$$

$$V_n(x,x') = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+d/2-1}n!(d/2-2)!} \times \sum_{k=0}^{n+d/2-1} \frac{(-1)^k}{k!}(m^2)^k A_{n+d/2-1-k}(x,x')$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}. \tag{41b}$$

- De même, en dimension impaire, on peut montrer que les coefficients $A_n(x,x')$ de DeWitt et les coefficients Hadamard géométriques $U_n(x,x')$sont reliés. On a

$$U_n(x,x') = \frac{\Gamma(d/2-1-n)}{2^n\Gamma(d/2-1)} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(m^2)^k A_{n-k}(x,x')$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

C. Forme Hadamard de la représentation de DeWitt-Schwinger

• Le comportement à courte distance de $G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{DS}}(x,x')$ n'apparait pas explicitement (cf. Eqs. (23)-(25)). En fait, ce comportement est du type Hadamard. On peut montrer que $G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{DS}}(x,x')$ présente la forme Hadamard avec $W_0(x,x')$ donné par

$$W_0(x,x') = \left[\ln(m^2/2) + \gamma - \psi(d/2)\right] V_0(x,x') - \frac{1}{2^{d/2-1}(d/2-2)!}\left[\sum_{k=0}^{d/2-2} \frac{(-1)^k(m^2)^k}{k!}\left(\sum_{\ell=k+1}^{d/2-1}\frac{1}{\ell}\right) A_{d/2-1-k}(x,x') - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k!}{(m^2)^{k+1}} A_{d/2+k}(x,x')\right] \tag{43}$$

pour d pair et par

$$W_0(x,x') = -\frac{1}{2^{d/2-1}\Gamma(d/2-1)} \left[\sum_{k=0}^{d/2-3/2} \frac{(-1)^k (m^2)^{k+1/2}}{\Gamma(k+3/2)} \, \pi \, A_{d/2-3/2-k}(x,x') \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(m^2)^{k+1/2}} A_{d/2-1/2+k}(x,x') \right] \tag{44}$$

pour d impair

- On notera le caractère pathologique pour $m^2 \to 0$ (divergence infrarouge) de $W_0(x,x')$ et donc de la représentation de DeWitt-Schwinger.

V. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE TAYLOR COVARIANTES DES COEFFICIENTS $A_n(x,x')$ DE DEWITT ET DES COEFFICIENTS HADAMARD GÉOMÉTRIQUES $U_n(x,x')$ ET $V_n(x,x')$

• Recherche des $A_n(x,x')$

- On peut résoudre les relations de récurrence (27) vérifiées par les $A_n(x,x')$ en recherchant ces biscalaires sous la forme de développements en séries de Taylor covariantes pour x' proche de x, i.e. sous la forme

$$A_n(x,x') = a_n(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} a_{n\,(p)}(x,x') \tag{45}$$

où les $a_{n\,(p)}(x,x')$ avec $p = 1, 2, \ldots$ sont des biscalaires de la forme

$$a_{n\,(p)}(x,x') = a_{n\ a_1 \ldots a_p}(x) \sigma^{;a_1}(x,x') \ldots \sigma^{;a_p}(x,x'). \tag{46}$$

- La méthode nécessite la connaissance préliminaire des développements en séries de Taylor covariantes du déterminant de Van Vleck-Morette $\Delta^{1/2}$ et du bitenseur $\sigma_{;\mu\nu}$. Leur construction est difficile. Selon DeWitt, elle nécessite la connaissance préalable des limites du type

$$\lim_{x' \to x} \sigma_{;a_1 \ldots a_p}. \tag{47}$$

- Résultats obtenus par l'école DeWitt:

$\Delta^{1/2}$ à l'ordre σ (DeWitt 1963)

$\Delta^{1/2}$ à l'ordre σ^2 (Christensen 1976)

$\Delta^{1/2}$ à l'ordre $\sigma^{5/2}$ (Brown et Ottewill 1986, Anderson, Flanagan et Ottewill 2005)

$\Delta^{1/2}$ à l'ordre σ^3 mais faux (Phillips et Hu 2003)

• Recherche des $U_n(x,x')$ et $V_n(x,x')$

- Même méthode. Pour x' voisin de x, on écrit

$$U_n(x,x') = u_n(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} u_{n\,(p)}(x,x') \tag{48}$$

$$V_n(x,x') = v_n(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} v_{n\,(p)}(x,x') \tag{49}$$

où les $u_{n\,(p)}(x,x')$ et les $v_{n\,(p)}(x,x')$ avec $p=1,2,\dots$ qui sont des biscalaires en x et x' de la forme

$$u_{n\,(p)}(x,x') = u_{n\ a_1\dots a_p}(x)\sigma^{;a_1}(x,x')\dots\sigma^{;a_p}(x,x') \tag{50}$$

$$v_{n\,(p)}(x,x') = v_{n\ a_1\dots a_p}(x)\sigma^{;a_1}(x,x')\dots\sigma^{;a_p}(x,x'). \tag{51}$$

• Développement en série de Taylor covariante du déterminant de Van Vleck-Morette $\Delta^{1/2}$.

- Notre approche combine les techniques de DeWitt et celles non-récursives d'Avramidi.

- Notations: On introduit la famille des bitenseurs $K_{(p)}(x,x')$ avec $p\geq 2$ qui sont des tenseurs de type $(1,1)$ en x des scalaires en x'. Les composantes des $K_{(p)}(x,x')$ sont données par

$$K_{(p)}{}^{\mu}{}_{\nu}(x,x') = K^{\mu}{}_{\nu\ a_1\dots a_p}(x)\sigma^{;a_1}(x,x')\dots\sigma^{;a_p}(x,x') \tag{52a}$$

où

$$K^{\mu}{}_{\nu\ a_1a_2a_3\dots a_p} = R^{\mu}{}_{(a_1|\nu|a_2;a_3\dots a_p)}. \tag{52b}$$

- On a obtenu le développement de $\Delta^{1/2}(x,x')$ sous la forme

$$\Delta^{1/2}(x,x') = 1 + \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!}\delta^{1/2}{}_{(p)}(x,x') \tag{53}$$

avec les biscalaires $\delta^{1/2}{}_{(p)}(x,x')$ de la forme

$$\delta^{1/2}{}_{(p)}(x,x') = \delta^{1/2}{}_{a_1\dots a_p}(x)\sigma^{;a_1}(x,x')\dots\sigma^{;a_p}(x,x') \tag{54}$$

et on a obtenu

$$\delta^{1/2}{}_{(2)} = (1/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)} \tag{55a}$$

$$\delta^{1/2}{}_{(3)} = (1/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)} \tag{55b}$$

$$\delta^{1/2}{}_{(4)} = (3/10)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)} + (1/15)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (1/12)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2 \tag{55c}$$

$$\delta^{1/2}{}_{(5)} = (1/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} + (1/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (5/12)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)} \tag{55d}$$

$$\begin{aligned}\delta^{1/2}{}_{(6)} = {} & (5/14)\,\mathrm{tr}\,K_{(6)} + (4/7)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} + (15/28)\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 + (3/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)} \\ & + (5/8)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^2 + (8/63)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 + (1/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (5/72)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^3\end{aligned} \tag{55e}$$

$$\begin{aligned}\delta^{1/2}{}_{(7)} = {} & (3/8)\,\mathrm{tr}\,K_{(7)} + (5/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(5)} + (9/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(4)} + (7/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} \\ & + (21/8)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)} + (4/3)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(3)} + (7/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} \\ & + (7/12)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (35/48)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\end{aligned} \tag{55f}$$

$$\begin{aligned}\delta^{1/2}{}_{(8)} = {} & (7/18)\,\mathrm{tr}\,K_{(8)} + (10/9)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(6)} + (35/9)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(5)} + (14/5)\,\mathrm{tr}\,{K_{(4)}}^2 \\ & + (5/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(6)} + (14/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} + (63/20)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(4)}\right)^2 + (136/45)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(4)} \\ & + (50/9)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}{K_{(3)}}^2 + (8/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} + (5/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 \\ & + (14/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (7/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (7/4)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(4)} \\ & + (35/12)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^2 + (8/15)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^4 + (16/27)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 \\ & + (7/45)\,\left(\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\right)^2 + (7/18)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (35/432)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^4\end{aligned} \tag{55g}$$

et

$$
\begin{aligned}
\delta^{1/2}{}_{(9)} = {} & (2/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(9)} + (7/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(7)} + 6\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(6)} + (56/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}K_{(5)} \\
& + (9/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(7)} + (15/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(6)} + (63/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} + (28/5)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(5)} \\
& + (73/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}K_{(4)} + (73/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)}K_{(3)} + 9\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^3 + 5\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(5)} \\
& + (27/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(4)} + 12\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} + (45/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 \\
& + (63/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (14/5)\,\mathrm{tr}\,K_{(5)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (7/2)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} \\
& + (63/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)} + (35/8)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^3 + (48/5)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3K_{(3)} \\
& + 8\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(3)} + (8/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 + (14/5)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} \\
& + (7/2)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (7/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (35/24)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^3\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}
\end{aligned}
\tag{55h}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^{1/2}{}_{(10)} = {} & (9/22)\,\mathrm{tr}\,K_{(10)} + (56/33)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(8)} + (189/22)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(7)} + (216/11)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}K_{(6)} \\
& + (140/11)\,\mathrm{tr}\,{K_{(5)}}^2 + (35/12)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(8)} + (45/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(7)} + (45/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(6)} \\
& + 14\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(5)}\right)^2 + (304/33)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(6)} + (1015/33)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}K_{(5)} + (480/11)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}{K_{(4)}}^2 \\
& + (1015/33)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(5)}K_{(3)} + 81\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2K_{(4)} + (25/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(6)} \\
& + (175/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(5)} + 21\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(4)}}^2 + 25\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(5)} \\
& + (135/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(4)} + 36\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} + (135/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 \\
& + 28\,\mathrm{tr}\,K_{(5)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + 5\,\mathrm{tr}\,K_{(6)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (25/4)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(6)} \\
& + 35\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} + (189/8)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(4)}\right)^2 + (315/8)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(4)} \\
& + (896/33)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3K_{(4)} + (149/3)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2{K_{(3)}}^2 + (805/33)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}K_{(2)}K_{(3)} \\
& + (68/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(4)} + (125/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}{K_{(3)}}^2 + 40\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(3)} \\
& + 8\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 + 8\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} + (15/2)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 \\
& + 14\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}\right)^2 + 10\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} + (75/8)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 \\
& + 35\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (21/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (35/4)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 \\
& + (35/8)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^3\,\mathrm{tr}\,K_{(4)} + (175/16)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^2 + (128/33)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^5 \\
& + 4\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^4 + (16/9)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 + (7/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\left(\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\right)^2 \\
& + (20/9)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 + (35/36)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^3\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (35/288)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^5
\end{aligned}
\tag{55i}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\delta^{1/2}{}_{(11)} &= (5/12)\,\mathrm{tr}\,K_{(11)} + 2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(9)} + (35/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(8)} + (63/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}K_{(7)} \\
&+50\,\mathrm{tr}\,K_{(5)}K_{(6)} + (11/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(9)} + (385/24)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(8)} + (297/8)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(7)} \\
&+55\,\mathrm{tr}\,K_{(5)}\,\mathrm{tr}\,K_{(6)} + 14\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(7)} + (170/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}K_{(6)} + 103\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)}K_{(5)} \\
&+103\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(5)}K_{(4)} + (170/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(6)}K_{(3)} + (575/3)\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2K_{(5)} + 273\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}{K_{(4)}}^2 \\
&+(77/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(7)} + 55\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(6)} + (308/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}K_{(5)} \\
&+(275/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(6)} + (1925/12)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(5)} + (231/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(4)}}^2 \\
&+(165/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(5)} + (891/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(4)} + 88\,\mathrm{tr}\,K_{(5)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} \\
&+(165/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(5)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 + 55\,\mathrm{tr}\,K_{(6)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (33/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(7)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 \\
&+(165/16)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(7)} + (275/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(6)} + (231/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} \\
&+(385/4)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} + (2079/16)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(4)}\right)^2 + (184/3)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3K_{(5)} \\
&+(317/2)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(3)}K_{(4)} + (317/2)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(4)}K_{(3)} + (461/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}K_{(2)}K_{(4)} \\
&+(860/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}{K_{(3)}}^3 + (154/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(5)} + (803/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}K_{(4)} \\
&+(803/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)}K_{(3)} + (165/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^3 + (374/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(4)} \\
&+(1375/6)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}{K_{(3)}}^2 + 132\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(3)} + (176/9)\,\mathrm{tr}\,K_{(5)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 \\
&+(55/3)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(5)} + (99/2)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(4)} + 88\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} \\
&+(165/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 + (275/12)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(5)} + (495/8)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}K_{(4)} \\
&+110\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(4)} + (825/8)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(3)}}^2 \\
&+(231/2)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (77/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(5)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 \\
&+(385/4)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (231/4)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (385/36)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^3\,\mathrm{tr}\,K_{(5)} \\
&+(1155/16)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,K_{(4)} + (1925/48)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(3)}\right)^3 + (320/3)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^4K_{(3)} \\
&+88\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3K_{(3)} + 22\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^4 + (88/3)\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(3)} \\
&+(176/9)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 + (110/3)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2K_{(3)} + (220/9)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^3 \\
&+(77/3)\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} + (77/12)\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\left(\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2\right)^2 + (385/36)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^3\,\mathrm{tr}\,K_{(2)}K_{(3)} \\
&+(385/24)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^2\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}\,\mathrm{tr}\,{K_{(2)}}^2 + (1925/576)\,\left(\mathrm{tr}\,K_{(2)}\right)^4\,\mathrm{tr}\,K_{(3)}. \qquad \text{(55j)}
\end{aligned}
$$

- Explicitement, on a pour ce développement tronqué à l'ordre σ^4:

$$
\begin{aligned}
\Delta^{1/2} = 1 &+ \frac{1}{12}\, R_{a_1a_2}\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2} - \frac{1}{24}\, R_{a_1a_2;a_3}\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3} \\
&+ \left[\frac{1}{80}\, R_{a_1a_2;a_3a_4} + \frac{1}{360}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\rho a_4} + \frac{1}{288} R_{a_1a_2}R_{a_3a_4}\right]\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}\sigma^{;a_4} \\
&- \left[\frac{1}{360}\, R_{a_1a_2;a_3a_4a_5} + \frac{1}{360}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\rho a_4;a_5} + \frac{1}{288} R_{a_1a_2}R_{a_3a_4;a_5}\right]\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}\sigma^{;a_4}\sigma^{;a_5} \\
&+ \left[\frac{1}{2016}\, R_{a_1a_2;a_3a_4a_5a_6} + \frac{1}{1260}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\rho a_4;a_5a_6} + \frac{1}{1344}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2;a_3}R^{\tau}{}_{a_4\rho a_5;a_6}\right. \\
&\quad + \frac{1}{960}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4;a_5a_6} + \frac{1}{1152}\, R_{a_1a_2;a_3}R_{a_4a_5;a_6} + \frac{1}{5670}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\sigma a_4}R^{\sigma}{}_{a_5\rho a_6} \\
&\quad \left. + \frac{1}{4320}\, R_{a_1a_2}R^{\rho}{}_{a_3\tau a_4}R^{\tau}{}_{a_5\rho a_6} + \frac{1}{10368}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4}R_{a_5a_6}\right]\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}\sigma^{;a_4}\sigma^{;a_5}\sigma^{;a_6} \\
&- \left[\frac{1}{13440}\, R_{a_1a_2;a_3a_4a_5a_6a_7} + \frac{1}{6048}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\rho a_4;a_5a_6a_7}\right. \\
&\quad + \frac{1}{2240}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2;a_3}R^{\tau}{}_{a_4\rho a_5;a_6a_7} + \frac{1}{4320}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4;a_5a_6a_7} + \frac{1}{1920}\, R_{a_1a_2;a_3}R_{a_4a_5;a_6a_7} \\
&\quad + \frac{1}{3780}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\sigma a_4}R^{\sigma}{}_{a_5\rho a_6;a_7} + \frac{1}{4320}\, R_{a_1a_2}R^{\rho}{}_{a_3\tau a_4}R^{\tau}{}_{a_5\rho a_6;a_7} \\
&\quad \left. + \frac{1}{8640}\, R_{a_1a_2;a_3}R^{\rho}{}_{a_4\tau a_5}R^{\tau}{}_{a_6\rho a_7} + \frac{1}{6912}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4}R_{a_5a_6;a_7}\right]\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}\sigma^{;a_4}\sigma^{;a_5}\sigma^{;a_6}\sigma^{;a_7} \\
&+ \left[\frac{1}{103680}\, R_{a_1a_2;a_3a_4a_5a_6a_7a_8} + \frac{1}{36288}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\rho a_4;a_5a_6a_7a_8} + \frac{1}{10368}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2;a_3}R^{\tau}{}_{a_4\rho a_5;a_6a_7a_8}\right. \\
&\quad + \frac{1}{14400}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2;a_3a_4}R^{\tau}{}_{a_5\rho a_6;a_7a_8} + \frac{1}{24192}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4;a_5a_6a_7a_8} + \frac{1}{8640}\, R_{a_1a_2;a_3}R_{a_4a_5;a_6a_7a_8} \\
&\quad + \frac{1}{12800}\, R_{a_1a_2;a_3a_4}R_{a_5a_6;a_7a_8} + \frac{17}{226800}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\sigma a_4}R^{\sigma}{}_{a_5\rho a_6;a_7a_8} \\
&\quad + \frac{5}{36288}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\sigma a_4;a_5}R^{\sigma}{}_{a_6\rho a_7;a_8} + \frac{1}{15120}\, R_{a_1a_2}R^{\rho}{}_{a_3\tau a_4}R^{\tau}{}_{a_5\rho a_6;a_7a_8} \\
&\quad + \frac{1}{16128}\, R_{a_1a_2}R^{\rho}{}_{a_3\tau a_4;a_5}R^{\tau}{}_{a_6\rho a_7;a_8} + \frac{1}{8640}\, R_{a_1a_2;a_3}R^{\rho}{}_{a_4\tau a_5}R^{\tau}{}_{a_6\rho a_7;a_8} \\
&\quad + \frac{1}{28800}\, R_{a_1a_2;a_3a_4}R^{\rho}{}_{a_5\tau a_6}R^{\tau}{}_{a_7\rho a_8} + \frac{1}{23040}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4}R_{a_5a_6;a_7a_8} \\
&\quad + \frac{1}{13824}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4;a_5}R_{a_6a_7;a_8} + \frac{1}{75600}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\sigma a_4}R^{\sigma}{}_{a_5\kappa a_6}R^{\kappa}{}_{a_7\rho a_8} \\
&\quad + \frac{1}{68040} R_{a_1a_2}R^{\rho}{}_{a_3\tau a_4}R^{\tau}{}_{a_5\sigma a_6}R^{\sigma}{}_{a_7\rho a_8} + \frac{1}{103680}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4}R^{\rho}{}_{a_5\tau a_6}R^{\tau}{}_{a_7\rho a_8} \\
&\quad + \frac{1}{259200}\, R^{\rho}{}_{a_1\tau a_2}R^{\tau}{}_{a_3\rho a_4}R^{\kappa}{}_{a_5\lambda a_6}R^{\lambda}{}_{a_7\kappa a_8} \\
&\quad \left. + \frac{1}{497664}\, R_{a_1a_2}R_{a_3a_4}R_{a_5a_6}R_{a_7a_8}\right]\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}\sigma^{;a_4}\sigma^{;a_5}\sigma^{;a_6}\sigma^{;a_7}\sigma^{;a_8} + O\left(\sigma^{9/2}\right). \qquad (56)
\end{aligned}
$$

Nous n'avons pas inclus les énormes termes (55h), (55i) et (55j) qui correspondent aux ordres $\sigma^{9/2}$, σ^5 et $\sigma^{11/2}$ du développement.

• Développement en série de Taylor covariante du bitenseur $\sigma_{;\mu\nu}$.

- Notations: on note $\Lambda(x,x')$ le bitenseur qui est en x un tenseur de type $(1,1)$ et un scalaire en x' et dont les composantes sont les $\sigma^{;\mu}{}_{\nu}$.

- Son développement est de la forme

$$\Lambda(x,x') = 1 + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \lambda_{(p)}(x,x') \tag{57}$$

où les $\lambda_{(p)}(x,x')$ sont aussi des tenseurs de type $(1,1)$ en x et des scalaires en x' dont les composantes sont de la forme

$$\lambda_{(p)}{}^{\mu}{}_{\nu}(x,x') = \lambda^{\mu}{}_{\nu\, a_1\ldots a_p}(x)\sigma^{;a_1}(x,x')\ldots\sigma^{;a_p}(x,x'). \tag{58}$$

- On a obtenu

$$\lambda_{(2)} = -(2/3)\, K_{(2)} \tag{59a}$$

$$\lambda_{(3)} = -(1/2)\, K_{(3)} \tag{59b}$$

$$\lambda_{(4)} = -\left[(2/5)\, K_{(4)} + (8/15)\, {K_{(2)}}^2\right] \tag{59c}$$

$$\lambda_{(5)} = -\left[(1/3)\, K_{(5)} + K_{(2)}K_{(3)} + K_{(3)}K_{(2)}\right] \tag{59d}$$

$$\lambda_{(6)} = -\left[(2/7)\, K_{(6)} + (10/7)\, K_{(2)}K_{(4)} + (17/7)\, {K_{(3)}}^2 + (10/7)\, K_{(4)}K_{(2)} + (32/21)\, {K_{(2)}}^3\right] \tag{59e}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{(7)} = -\big[&(1/4)\, K_{(7)} + (11/6)\, K_{(2)}K_{(5)} + (17/4)\, K_{(3)}K_{(4)} + (17/4)\, K_{(4)}K_{(3)} \\ &+(11/6)\, K_{(5)}K_{(2)} + (17/4)\, {K_{(2)}}^2K_{(3)} + (29/6)\, K_{(2)}K_{(3)}K_{(2)} + (17/4)\, K_{(3)}{K_{(2)}}^2\big]\end{aligned} \tag{59f}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{(8)} = -\big[&(2/9)\, K_{(8)} + (20/9)\, K_{(2)}K_{(6)} + (58/9)\, K_{(3)}K_{(5)} + (44/5)\, {K_{(4)}}^2 + (58/9)\, K_{(5)}K_{(3)} \\ &+(20/9)\, K_{(6)}K_{(2)} + (42/5)\, {K_{(2)}}^2K_{(4)} + (146/9)\, K_{(2)}{K_{(3)}}^2 + (92/9)\, K_{(2)}K_{(4)}K_{(2)} \\ &+(124/9)\, K_{(3)}K_{(2)}K_{(3)} + (146/9)\, {K_{(3)}}^2K_{(2)} + (42/5)\, K_{(4)}{K_{(2)}}^2 + (128/15)\, {K_{(2)}}^4\big]\,.\end{aligned} \tag{59g}$$

et

$$\lambda_{(9)} = -\left[(1/5)\,K_{(9)} + (13/5)\,K_{(2)}K_{(7)} + 9\,K_{(3)}K_{(6)} + (77/5)\,K_{(4)}K_{(5)} + (77/5)\,K_{(5)}K_{(4)}\right.$$
$$+9\,K_{(6)}K_{(3)} + (13/5)\,K_{(7)}K_{(2)} + (71/5)\,{K_{(2)}}^2K_{(5)} + (187/5)\,K_{(2)}K_{(3)}K_{(4)}$$
$$+40\,K_{(2)}K_{(4)}K_{(3)} + 18\,K_{(2)}K_{(5)}K_{(2)} + 31\,K_{(3)}K_{(2)}K_{(4)} + 62\,{K_{(3)}}^3 + 40\,K_{(3)}K_{(4)}K_{(2)}$$
$$+31\,K_{(4)}K_{(2)}K_{(3)} + (187/5)\,K_{(4)}K_{(3)}K_{(2)} + (71/5)\,K_{(5)}{K_{(2)}}^2 + 31\,{K_{(2)}}^3K_{(3)}$$
$$\left.+(181/5)\,{K_{(2)}}^2K_{(3)}K_{(2)} + (181/5)\,K_{(2)}K_{(3)}{K_{(2)}}^2 + 31\,K_{(3)}{K_{(2)}}^3\right]. \tag{59h}$$

- Explicitement, on peut écrire pour le développement tronqué à l'ordre σ^3

$$\sigma_{;\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\,R_{\mu a_1 \nu a_2}\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2} + \frac{1}{12}\,R_{\mu a_1 \nu a_2;a_3}\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}$$
$$-\left[\frac{1}{60}\,R_{\mu a_1 \nu a_2;a_3 a_4} + \frac{1}{45}\,R_{\mu a_1 \rho a_2}R^{\rho}{}_{a_3 \nu a_4}\right]\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}\sigma^{;a_4}$$
$$+\left[\frac{1}{360}\,R_{\mu a_1 \nu a_2;a_3 a_4 a_5} + \frac{1}{120}\,R_{\mu a_1 \rho a_2}R^{\rho}{}_{a_3 \nu a_4;a_5} + \frac{1}{120}\,R_{\mu a_1 \rho a_2;a_3}R^{\rho}{}_{a_4 \nu a_5}\right]\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}\sigma^{;a_4}\sigma^{;a_5}$$
$$-\left[\frac{1}{2520}\,R_{\mu a_1 \nu a_2;a_3 a_4 a_5 a_6} + \frac{1}{504}\,R_{\mu a_1 \rho a_2}R^{\rho}{}_{a_3 \nu a_4;a_5 a_6} + \frac{17}{5040}\,R_{\mu a_1 \rho a_2;a_3}R^{\rho}{}_{a_4 \nu a_5;a_6}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{504}\,R_{\mu a_1 \rho a_2;a_3 a_4}R^{\rho}{}_{a_5 \nu a_6} + \frac{2}{945}\,R_{\mu a_1 \rho a_2}R^{\rho}{}_{a_3 \tau a_4}R^{\tau}{}_{a_5 \nu a_6}\right]\sigma^{;a_1}\sigma^{;a_2}\sigma^{;a_3}\sigma^{;a_4}\sigma^{;a_5}\sigma^{;a_6}$$
$$+O\left(\sigma^{7/2}\right). \tag{60}$$

Nous n'avons pas inclus le terme d'ordre $\sigma^{7/2}$ correspondant à (59f), celui d'ordre σ^4 correspondant à (59g)) et celui d'ordre $\sigma^{9/2}$ correspondant à (59h)).

VI. RÉGULARISATION ET RENORMALISATION DU TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE

A. Utilisation de la représentation de DeWitt-Schwinger

(DeWitt 1975, Christensen 1976 et 1978, ... en dim 4)

- Lorsqu'on écrit

$$\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle_{\mathrm{DS}} = \lim_{x'\to x} \mathcal{T}_{\mu\nu}(x,x') \left[-iG^{\mathrm{F}}_{\mathrm{DS}}(x,x')\right] \tag{61}$$

on obtient les expressions des termes divergents qui sont aussi présents dans

$$\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle = \lim_{x'\to x} \mathcal{T}_{\mu\nu}(x,x') \left[-iG^{\mathrm{F}}(x,x')\right]. \tag{62}$$

Lorsque d est pair, ces termes divergents sont en $1/\sigma^{d/2}$, $\dots$, $1/\sigma^2$, $1/\sigma$ et $\ln\sigma$ et ils proviennent des termes en $1/\sigma^{d/2-1}$, $\dots$, $1/\sigma$, $\ln\sigma$ et $\sigma\ln\sigma$ présents dans $G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{DS}}(x,x')$. Lorsque d est impair, ils sont en $1/\sigma^{d/2}$, $\dots$, $1/\sigma^{1/2}$ et ils proviennent des termes en $1/\sigma^{d/2-1}$, $\dots$, $\sigma^{1/2}$ présents dans $G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{DS}}(x,x')$.

- On peut soustraire à la main les divergences et on a une expression régularisée de la valeur moyenne $\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle$ qui peut jouer le rôle de source dans les équations d'Einstein.

- Ces termes divergents doivent être de plus absorbés dans le membre de gauche des équations d'Einstein (renormalisation). La renormalisation nécessite la modification du lagrangien d'Einstein-Hilbert de la gravitation (voir plus loin).

- Remarque: La représentation de DeWitt-Schwinger est aussi utilisée dans le cadre de la renormalisation dans l'action effective. Elle permet de traiter élégamment la renormalisation de la théorie mais a pour défaut principal de ne pas encoder l'état quantique.

B. Utilisation de la représentation Hadamard

(Wald 1977 et 1978, Adler et al 1977 ... en dim 4)

- Approche plus performante et plus directe car la représentation Hadamard est définie même pour $m^2 = 0$ et qu'elle encode l'état quantique.

• On régularise en éliminant les parties singuliéres

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{sing}}(x,x') = \frac{i\alpha_d}{2}\left(\frac{U(x,x')}{[\sigma(x,x')+i\epsilon]^{d/2-1}} + V(x,x')\ln[\sigma(x,x')+i\epsilon]\right) \tag{63}$$

pour d pair et

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{sing}}(x,x') = \frac{i\alpha_d}{2}\left(\frac{U(x,x')}{[\sigma(x,x')+i\epsilon]^{d/2-1}}\right) \tag{64}$$

pour d impair et en ne retenant que la partie régulière encodant l'état donnée par

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{reg}}(x,x') = \frac{i\alpha_d}{2}\, W(x,x') \tag{65}$$

pour d pair et impair. Ici, on a posé

$$\alpha_d = \frac{\Gamma(d/2-1)}{2(2\pi)^{d/2}}. \tag{66}$$

On peut donc écrire

$$\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle_{\mathrm{ren}} = \frac{\alpha_d}{2}\mathcal{T}_{\mu\nu}[W](x) + \tilde{\Theta}_{\mu\nu}(x). \tag{67}$$

avec

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}[W](x) = \left[\lim_{x'\to x}\mathcal{T}_{\mu\nu}(x,x')W(x,x')\right] \tag{68}$$

et où $\tilde{\Theta}_{\mu\nu}(x)$ est un tenseur purement géométrique ne dépendant que de m^2 et ξ et qui assure la conservation de $\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle_{\mathrm{ren}}$.

- Conditions sur $\tilde{\Theta}_{\mu\nu}(x)$

  - Rappelons qu'en théorie classique, on avait obtenu la relation

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \Phi^{;\mu}\left[\Box - m^2 - \xi R\right]\Phi. \tag{69}$$

Au niveau quantique, après point-splitting, elle nous donne

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}[W]_{;\nu}(x) = \lim_{x'\to x}\left(g^{\mu\mu'}\nabla_{\mu'}\left[\Box_x - m^2 - \xi R\right]\right)W(x,x') \tag{70}$$

  - En dimension d paire on a vu que

$$\begin{aligned}\sigma\left(\Box_x - m^2 - \xi R\right)W &= -\left(\Box_x - m^2 - \xi R\right)U_{d/2-2}\\ &\quad -(d-2)V - 2V_{;\mu}\sigma^{;\mu} + 2V\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;\mu}\sigma^{;\mu}.\end{aligned} \tag{71}$$

On a donc $\mathcal{T}^{\mu\nu}[W]_{;\nu} \neq 0$. En fait, un calcul utilisant les développements en séries de Taylor covariantes de $V(x,x') = \sum V_n(x,x')$, de $\Delta^{1/2}(x,x')$ et de $U_{d/2-2}(x,x')$ permet d'obtenir

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}[W]_{;\nu} = -\left(\frac{d}{2}\,v_1 g^{\mu\nu}\right)_{;\nu} \tag{72}$$

où $v_1 = v_1(x)$ est le premier terme du développement du biscalaire $V_1(x, x')$. Le tenseur $\tilde{\Theta}$ doit donc vérifier la condition

$$\left[\tilde{\Theta}^{\mu\nu} - (d/4)\alpha_d \, g^{\mu\nu} v_1\right]_{;\nu} = 0 \tag{73}$$

pour que $\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle_{\text{ren}}$ soit conservée.

- En dimension d impaire, parce qu'on a

$$\left(\Box_x - m^2 - \xi R\right) W = 0 \tag{74}$$

on trouve que le tenseur $\tilde{\Theta}$ doit vérifier la condition

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{75}$$

pour que $\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle_{\text{ren}}$ soit conservée.

• Récapitulatif:

- Pour d pair

$$\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle_{\text{ren}} = \frac{\alpha_d}{2}\left[\lim_{x'\to x} \mathcal{T}_{\mu\nu}(x, x')W(x, x') + \frac{d}{2}\, g_{\mu\nu} v_1\right] + \Theta_{\mu\nu}(x). \tag{76}$$

- Pour d impair

$$\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle_{\text{ren}} = \frac{\alpha_d}{2} \lim_{x'\to x} \mathcal{T}_{\mu\nu}(x, x')W(x, x') + \Theta_{\mu\nu}(x). \tag{77}$$

- Dans les deux cas, $\Theta_{\mu\nu}$ ne dépend que de la géométrie locale et des paramètres m^2 et ξ et il vérifie

$$\Theta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{78}$$

• Ambiguïtés liées à $\Theta_{\mu\nu}$.

- Problème que l'on peut partiellement résoudre (voir plus loin) mais qui n'a pas de solution complète en l'absence d'une théorie quantique de la gravitation.

- Conséquence: Comment définir l'énergie du vide quantique dans un champ gravitationnel?

C. Anomalie de trace

- Rappelons qu'en théorie classique, on avait obtenu pour le champ en théorie invariante conforme la relation

$$T^\mu{}_\mu = \frac{d-2}{2}\,\Phi\left[\Box - \xi_c(d)R\right]\Phi. \tag{79}$$

Au niveau quantique, après point-splitting, elle nous donne

$$\mathcal{T}^\mu{}_\mu[W](x) = \lim_{x'\to x}\left[\Box_x - \xi_c(d)R\right]W(x,x'). \tag{80}$$

- En dimension d paire et parce $\left[\Box_x - \xi_c(d)R\right]W(x,x') \neq 0$, on trouve que

$$\langle\psi|T^\mu{}_\mu|\psi\rangle_{\rm ren} = \alpha_d\, v_1. \tag{81}$$

Après régularisation et si l'on tient à assurer la conservation de la valeur moyenne $\langle\psi|T_{\mu\nu}(x)|\psi\rangle$ du tenseur d'impulsion-énergie, il apparait nécessairement une anomalie de trace. Pour $d=4$, on trouve

$$\begin{aligned}\langle\psi|T^\mu{}_\mu|\psi\rangle_{\rm ren} = \frac{1}{(2\pi)^2}\ &\left[(1/720)\Box R - (1/720)R_{pq}R^{pq}\right.\\ &\left.+(1/720)R_{pqrs}R^{pqrs}\right].\end{aligned} \tag{82}$$

et pour $d=6$ on a

$$\begin{aligned}\langle\psi|T^\mu{}_\mu|\psi\rangle_{\rm ren} = \frac{1}{(2\pi)^3}&\left[(1/33600)\Box\Box R + (1/50400)R_{;pq}R^{pq} - (1/5040)R_{pq}\Box R^{pq} + (1/840)R_{pq;rs}R^{prqs}\right.\\ &+(1/201600)R_{;p}R^{;p} - (1/20160)R_{pq;r}R^{pq;r} - (1/10080)R_{pq;r}R^{pr;q} + (1/4480)R_{pqrs;t}R^{pqrs;t}\\ &-(1/1296000)R^3 + (1/43200)RR_{pq}R^{pq} + (1/45360)R_{pq}R^p{}_rR^{qr} - (1/15120)R_{pq}R_{rs}R^{prqs}\\ &-(1/43200)RR_{pqrs}R^{pqrs} + (1/2160)R_{pq}R^p{}_{rst}R^{qrst} - (1/5670)R_{pqrs}R^{pquv}R^{rs}{}_{uv}\\ &\left.-(11/11340)R_{prqs}R^p{}_u{}^q{}_vR^{rusv}\right].\end{aligned} \tag{83}$$

- En dimension d impaire et parce $\left[\Box_x - \xi_c(d)R\right]W(x,x') = 0$, on trouve que $\langle\psi|T^\mu{}_\mu|\psi\rangle_{\rm ren} = 0$. Après régularisation, il n'existe pas d'anomalie de trace.

D. Et dans la pratique?

- Pour obtenir $W(x,x')$, il faut retrancher au propagateur de Feynman la partie singulière du développement Hadamard. Comme on veut $W(x,x')$ jusqu'à l'ordre σ, il faut la connaître jusqu'à l'ordre σ. La connaissance des développements du déterminant de Van Vleck-Morette $\Delta^{1/2}(x,x')$ et du bitenseur $\sigma_{;\mu\nu}(x,x')$ nous permet (en théorie) de réaliser cet objectif jusqu'à la dimension $d=11$. En pratique, c'est plus délicat.

- Pour $d=3$
  - On a

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{sing}}(x,x') = \frac{i}{4\sqrt{2}\pi}\left(\frac{U(x,x')}{[\sigma(x,x')+i\epsilon]^{1/2}}\right) \tag{84}$$

avec, pour pouvoir travailler à l'ordre σ,

$$U = U_0 + U_1\sigma + O\left(\sigma^2\right) \tag{85}$$

où

$$U_0 = u_0 - u_{0\ a}\sigma^{;a} + \frac{1}{2!}u_{0\ ab}\sigma^{;a}\sigma^{;b} - \frac{1}{3!}u_{0\ abc}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c} + O\left(\sigma^2\right) \tag{86}$$

$$U_1 = u_1 - u_{1\ a}\sigma^{;a} + O\left(\sigma\right). \tag{87}$$

  - Les coefficients de Taylor apparaissant dans les Eqs. (86)-(87) sont donnés par

$$u_0 = 1 \tag{88a}$$

$$u_{0\ a} = 0 \tag{88b}$$

$$u_{0\ ab} = (1/6)\, R_{ab} \tag{88c}$$

$$u_{0\ abc} = (1/4)\, R_{(ab;c)} \tag{88d}$$

et

$$u_1 = m^2 + (\xi - 1/6)\, R \tag{89}$$

$$u_{1\ a} = (1/2)\,(\xi - 1/6)\, R_{;a}. \tag{90}$$

- Pour $d=4$
  - On a

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{sing}}(x,x') = \frac{i}{8\pi^2}\left(\frac{U(x,x')}{\sigma(x,x')+i\epsilon} + V(x,x')\ln[\sigma(x,x')+i\epsilon]\right) \tag{91}$$

avec, pour pouvoir travailler à l'ordre σ,

$$U = U_0 \tag{92}$$

$$V = V_0 + V_1\sigma + O\left(\sigma^{3/2}\right) \tag{93}$$

où

$$U_0 = u_0 - u_{0\ a}\sigma^{;a} + \frac{1}{2!}u_{0\ ab}\sigma^{;a}\sigma^{;b} - \frac{1}{3!}u_{0\ abc}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c}$$
$$+\frac{1}{4!}u_{0\ abcd}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c}\sigma^{;d} + O\left(\sigma^{5/2}\right) \tag{94}$$
$$V_0 = v_0 - v_{0\ a}\sigma^{;a} + \frac{1}{2!}v_{0\ ab}\sigma^{;a}\sigma^{;b} + O\left(\sigma^{3/2}\right) \tag{95}$$
$$V_1 = v_1 + O\left(\sigma^{1/2}\right) \tag{96}$$

- Les coefficients de Taylor apparaissant dans les Eqs. (94)-(96) sont donnés par

$$u_0 = 1 \tag{97a}$$
$$u_{0\ a} = 0 \tag{97b}$$
$$u_{0\ ab} = (1/6)\, R_{ab} \tag{97c}$$
$$u_{0\ abc} = (1/4)\, R_{(ab;c)} \tag{97d}$$
$$u_{0\ abcd} = (3/10)\, R_{(ab;cd)} + (1/15)\, R^{\rho}{}_{(a|\tau|b}R^{\tau}{}_{c|\rho|d)} + (1/12) R_{(ab}R_{cd)} \tag{97e}$$

et

$$v_0 = (1/2)\, m^2 + (1/2)\,(\xi - 1/6)\, R \tag{98a}$$
$$v_{0\ a} = (1/4)\,(\xi - 1/6)\, R_{;a} \tag{98b}$$
$$v_{0\ ab} = -(1/120)\,\Box R_{ab} + (1/6)\,(\xi - 3/20)\, R_{;ab} + (1/12)\, m^2\, R_{ab} + (1/12)\,(\xi - 1/6)\, R R_{ab}$$
$$+(1/90)\, R^{\rho}{}_{a}R_{\rho b} - (1/180)\, R^{\rho\sigma}R_{\rho a\sigma b} - (1/180)\, R^{\rho\sigma\tau}{}_{a}R_{\rho\sigma\tau b} \tag{98c}$$

et

$$v_1 = (1/8)\, m^4 - (1/24)\,(\xi - 1/5)\,\Box R + (1/4)\,(\xi - 1/6)\, m^2\, R$$
$$+(1/8)\,(\xi - 1/6)^2\, R^2 - (1/720)\, R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} + (1/720)\, R_{\rho\sigma\tau\kappa}R^{\rho\sigma\tau\kappa}. \tag{99}$$

• Pour $d = 5$

- On a

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{sing}}(x,x') = \frac{i}{16\sqrt{2}\,\pi^2}\left(\frac{U(x,x')}{[\sigma(x,x') + i\epsilon]^{3/2}}\right) \tag{100}$$

avec, pour pouvoir travailler à l'ordre σ,

$$U = U_0 + U_1\sigma + U_2\sigma^2 + O\left(\sigma^3\right) \tag{101}$$

où

$$
\begin{aligned}
U_0 &= u_0 - u_{0\ a}\sigma^{;a} + \frac{1}{2!}u_{0\ ab}\sigma^{;a}\sigma^{;b} - \frac{1}{3!}u_{0\ abc}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c} \\
&\quad + \frac{1}{4!}u_{0\ abcd}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c}\sigma^{;d} - \frac{1}{5!}u_{0\ abcde}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c}\sigma^{;d}\sigma^{;e} + O\left(\sigma^3\right) && (102)\\
U_1 &= u_1 - u_{1\ a}\sigma^{;a} + \frac{1}{2!}u_{1\ ab}\sigma^{;a}\sigma^{;b} - \frac{1}{3!}u_{1\ abc}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c} + O\left(\sigma^2\right) && (103)\\
U_2 &= u_2 - u_{2\ a}\sigma^{;a} + O\left(\sigma\right) && (104)
\end{aligned}
$$

- Les coefficients de Taylor apparaissant dans les Eqs. (102)-(104) sont donnés par

$$
\begin{aligned}
&u_0 = 1 && (105a)\\
&u_{0\ a} = 0 && (105b)\\
&u_{0\ ab} = (1/6)\, R_{ab} && (105c)\\
&u_{0\ abc} = (1/4)\, R_{(ab;c)} && (105d)\\
&u_{0\ abcd} = (3/10)\, R_{(ab;cd)} + (1/15)\, R^{\rho}{}_{(a|\tau|b}R^{\tau}{}_{c|\rho|d)} + (1/12)R_{(ab}R_{cd)} && (105e)\\
&u_{0\ abcde} = (1/3)\, R_{(ab;cde)} + (1/3)\, R^{\rho}{}_{(a|\tau|b}R^{\tau}{}_{c|\rho|d;e)} + (5/12)R_{(ab}R_{cd;e)} && (105f)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&u_1 = -m^2 - (\xi - 1/6)\, R && (106a)\\
&u_{1\ a} = -(1/2)\,(\xi - 1/6)\, R_{;a} && (106b)\\
&u_{1\ ab} = (1/60)\,\Box R_{ab} - (1/3)\,(\xi - 3/20)\, R_{;ab}\\
&\quad -(1/6)\, m^2\, R_{ab} - (1/6)\,(\xi - 1/6)\, RR_{ab}\\
&\quad -(1/45)\, R^{\rho}{}_{a}R_{\rho b} + (1/90)\, R^{\rho\sigma}R_{\rho a\sigma b}\\
&\quad +(1/90)\, R^{\rho\sigma\tau}{}_{a}R_{\rho\sigma\tau b} && (106c)\\
&u_{1\ abc} = -(1/4)\,(\xi - 2/15)\, R_{;(abc)}\\
&\quad +(1/40)\,(\Box R_{(ab})_{;c)} - (1/4)\, m^2\, R_{(ab;c)}\\
&\quad -(1/4)\,(\xi - 1/6)\, RR_{(ab;c)} - (1/4)\,(\xi - 1/6)\, R_{;(a}R_{bc)}\\
&\quad -(1/15)\, R^{\rho}{}_{(a}R_{|\rho|b;c)} + (1/60)\, R^{\rho}{}_{\sigma}R^{\sigma}{}_{(a|\rho|b;c)}\\
&\quad +(1/60)\, R^{\rho}{}_{\sigma;(a}R^{\sigma}{}_{b|\rho|c)} + (1/30)\, R^{\rho\sigma\tau}{}_{(a}R_{|\rho\sigma\tau|b;c)}\\
& && (106d)
\end{aligned}
$$

et

$$u_2 = -(1/2)\, m^4 + (1/6)\, (\xi - 1/5)\, \Box R - (\xi - 1/6)\, m^2\, R \tag{107a}$$

$$u_{2\ a} = (1/12)\, (\xi - 1/5)\, (\Box R)_{;a} - (1/2)\, (\xi - 1/6)\, m^2\, R_{;a} - (1/2)\, (\xi - 1/6)^2\, R R_{;a}$$
$$+(1/180)\, R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{;a} - (1/180)\, R_{\rho\sigma\tau\kappa} R^{\rho\sigma\tau\kappa}{}_{;a}. \tag{107b}$$

- Pour $d = 6$

  - On a

$$G^{\mathrm{F}}_{\mathrm{sing}}(x, x') = \frac{i}{16\, \pi^3}\, \left(\frac{U(x, x')}{[\sigma(x, x') + i\epsilon]^2} + V(x, x')\ln[\sigma(x, x') + i\epsilon] \right) \tag{108}$$

avec, pour pouvoir travailler à l'ordre σ,

$$U = U_0 + U_1 \sigma \tag{109}$$

$$V = V_0 + V_1 \sigma + O\left(\sigma^{3/2}\right) \tag{110}$$

où

$$\begin{aligned}
U_0 &= u_0 - u_{0\ a}\sigma^{;a} + \frac{1}{2!} u_{0\ ab}\sigma^{;a}\sigma^{;b} - \frac{1}{3!} u_{0\ abc}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c} \\
&\quad + \frac{1}{4!} u_{0\ abcd}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c}\sigma^{;d} - \frac{1}{5!} u_{0\ abcde}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c}\sigma^{;d}\sigma^{;e} \\
&\quad + \frac{1}{6!} u_{0\ abcdef}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c}\sigma^{;d}\sigma^{;e}\sigma^{;f} + O\left(\sigma^{7/2}\right) && (111) \\
U_1 &= u_1 - u_{1\ a}\sigma^{;a} + \frac{1}{2!} u_{1\ ab}\sigma^{;a}\sigma^{;b} - \frac{1}{3!} u_{1\ abc}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c} \\
&\quad + \frac{1}{4!} u_{1\ abcd}\sigma^{;a}\sigma^{;b}\sigma^{;c}\sigma^{;d} + O\left(\sigma^{5/2}\right) && (112) \\
V_0 &= v_0 - v_{0\ a}\sigma^{;a} + \frac{1}{2!} v_{0\ ab}\sigma^{;a}\sigma^{;b} + O\left(\sigma^{3/2}\right) && (113) \\
V_1 &= v_1 + O\left(\sigma^{1/2}\right). && (114)
\end{aligned}$$

- Les coefficients de Taylor apparaissant dans les Eqs. (111)-(114) sont donnés par

$$u_0 = 1 \tag{115a}$$

$$u_{0\ a} = 0 \tag{115b}$$

$$u_{0\ ab} = (1/6)\, R_{ab} \tag{115c}$$

$$u_{0\ abc} = (1/4)\, R_{(ab;c)} \tag{115d}$$

$$u_{0\ abcd} = (3/10)\, R_{(ab;cd)} + (1/15)\, R^{\rho}{}_{(a|\tau|b}R^{\tau}{}_{c|\rho|d)} + (1/12) R_{(ab}R_{cd)} \tag{115e}$$

$$u_{0\ abcde} = (1/3)\, R_{(ab;cde)} + (1/3)\, R^{\rho}{}_{(a|\tau|b}R^{\tau}{}_{c|\rho|d;e)} + (5/12) R_{(ab}R_{cd;e)} \tag{115f}$$

$$\begin{aligned} u_{0\ abcdef} &= (5/14)\, R_{(ab;cdef)} + (4/7)\, R^{\rho}{}_{(a|\tau|b}R^{\tau}{}_{c|\rho|d;ef)} + (15/28)\, R^{\rho}{}_{(a|\tau|b;c}R^{\tau}{}_{d|\rho|e;f)} \\ &+ (3/4)\, R_{(ab}R_{cd;ef)} + (5/8)\, R_{(ab;c}R_{de;f)} + (8/63)\, R^{\rho}{}_{(a|\tau|b}R^{\tau}{}_{c|\sigma|d}R^{\sigma}{}_{e|\rho|f)} \\ &+ (1/6)\, R_{(ab}R^{\rho}{}_{c|\tau|d}R^{\tau}{}_{e|\rho|f)} + (5/72)\, R_{(ab}R_{cd}R_{ef)} \end{aligned} \tag{115g}$$

et

$$u_1 = -(1/2)\, m^2 - (1/2)\, (\xi - 1/6)\, R \qquad (11$$

$$u_{1\ a} = -(1/4)\, (\xi - 1/6)\, R_{;a} \qquad (11$$

$$\begin{aligned} u_{1\ ab} = {} & (1/120)\, \Box R_{ab} - (1/6)\, (\xi - 3/20)\, R_{;ab} - (1/12)\, m^2\, R_{ab} \\ & -(1/12)\, (\xi - 1/6)\, R R_{ab} - (1/90)\, R^{\rho}{}_{a} R_{\rho b} + (1/180)\, R^{\rho\sigma} R_{\rho a \sigma b} + (1/180)\, R^{\rho\sigma\tau}{}_{a} R_{\rho\sigma\tau b} \qquad (11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1\ abc} = {} & -(1/8)\, (\xi - 2/15)\, R_{;(abc)} + (1/80)\, (\Box R_{(ab})_{;c)} - (1/8)\, m^2\, R_{(ab;c)} \\ & -(1/8)\, (\xi - 1/6)\, R R_{(ab;c)} - (1/8)\, (\xi - 1/6)\, R_{;(a} R_{bc)} - (1/30)\, R^{\rho}{}_{(a} R_{|\rho|b;c)} \\ & +(1/120)\, R^{\rho}{}_{\sigma} R^{\sigma}{}_{(a|\rho|b;c)} + (1/120)\, R^{\rho}{}_{\sigma;(a} R^{\sigma}{}_{b|\rho|c)} + (1/60)\, R^{\rho\sigma\tau}{}_{(a} R_{|\rho\sigma\tau|b;c)} \qquad (11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1\ abcd} = {} & (1/70)\, (\Box R_{(ab})_{;cd)} - (1/10)\, (\xi - 5/42)\, R_{;(abcd)} - (3/20)\, m^2\, R_{(ab;cd)} - (3/20)\, (\xi - 1/6)\, R R_{(ab;cd)} \\ & -(1/4)\, (\xi - 1/6)\, R_{;(a} R_{bc;d)} - (1/6)\, (\xi - 3/20)\, R_{;(ab} R_{cd)} + (1/120)\, R_{(ab} \Box R_{cd)} - (1/24)\, m^2\, R_{(ab} R_{cd)} \\ & -(3/70)\, R^{\rho}{}_{(a} R_{|\rho|b;cd)} + (1/210)\, R^{\rho}{}_{(a} R_{bc;|\rho|d)} - (11/420)\, R^{\rho}{}_{(a;b} R_{|\rho|c;d)} - (3/140)\, R^{\rho}{}_{(a;b} R_{cd);\rho} \\ & +(17/1680)\, R_{(ab}{}^{;\rho} R_{cd);\rho} + (1/105)\, R^{\rho}{}_{\sigma} R^{\sigma}{}_{(a|\rho|b;cd)} + (1/210)\, R^{\rho}{}_{(a;|\sigma|} R^{\sigma}{}_{b|\rho|c;d)} + (1/60)\, R^{\rho}{}_{\sigma;(a} R^{\sigma}{}_{b|\rho|c;d)} \\ & -(2/175)\, R^{\rho}{}_{(a;|\sigma|b} R^{\sigma}{}_{c|\rho|d)} + (11/1050)\, R_{(ab}{}^{;\rho}{}_{\sigma} R^{\sigma}{}_{c|\rho|d)} + (11/1050)\, R^{\rho}{}_{\sigma;(ab} R^{\sigma}{}_{c|\rho|d)} + (2/525)\, R^{\rho}{}_{(a|\sigma|b} \Box R^{\sigma} \\ & -(1/30)\, m^2\, R^{\rho}{}_{(a|\sigma|b} R^{\sigma}{}_{c|\rho|d)} + (2/105)\, R^{\rho\sigma\tau}{}_{(a} R_{|\rho\sigma\tau|b;cd)} + (1/280)\, R^{\rho}{}_{(a|\sigma|b}{}^{;\tau} R^{\sigma}{}_{c|\rho|d);\tau} \\ & +(1/56)\, R^{\rho\sigma\tau}{}_{(a;b} R_{|\rho\sigma\tau|c;d)} - (1/24)\, (\xi - 1/6)\, R R_{(ab} R_{cd)} - (1/90)\, R^{\rho}{}_{(a} R_{|\rho|b} R_{cd)} + (1/630)\, R^{\rho}{}_{(a} R_{|\sigma|b} R^{\sigma}{}_{c|} \\ & +(1/180)\, R^{\rho\sigma} R_{(ab} R_{|\rho|c|\sigma|d)} - (1/30)\, (\xi - 1/6)\, R R^{\rho}{}_{(a|\sigma|b} R^{\sigma}{}_{c|\rho|d)} + (1/180)\, R_{(ab} R^{\rho\sigma\tau}{}_{c} R_{|\rho\sigma\tau|d)} \\ & +(13/1575)\, R^{\rho}{}_{\sigma} R^{\sigma}{}_{(a|\tau|b} R^{\tau}{}_{c|\rho|d)} + (1/63)\, R^{\rho}{}_{(a} R^{\sigma}{}_{b}{}^{\tau}{}_{c} R_{|\rho\sigma\tau|d)} + (2/1575)\, R^{\rho\sigma\tau\kappa} R_{\rho(a|\tau|b} R_{|\sigma|c|\kappa|d)} \\ & +(2/525)\, R^{\rho\kappa\tau}{}_{(a} R_{|\rho\tau|}{}^{\sigma}{}_{b} R_{|\sigma|c|\kappa|d)} + (8/1575)\, R^{\rho\kappa\tau}{}_{(a} R_{|\rho|}{}^{\sigma}{}_{|\tau|b} R_{|\sigma|c|\kappa|d)} + (4/1575)\, R^{\rho\tau\kappa}{}_{(a} R_{|\rho\tau|}{}^{\sigma}{}_{b} R_{|\sigma|c|\kappa|d)} \quad (11 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_0 = {} & -(1/8)\, m^4 + (1/24)\, (\xi - 1/5)\, \Box R - (1/4)\, (\xi - 1/6)\, m^2\, R \\ & -(1/8)\, (\xi - 1/6)^2\, R^2 + (1/720)\, R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} - (1/720)\, R_{\rho\sigma\tau\kappa} R^{\rho\sigma\tau\kappa} \qquad (117a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{0\ a} = {} & (1/48)\, (\xi - 1/5)\, (\Box R)_{;a} - (1/8)\, (\xi - 1/6)\, m^2\, R_{;a} \\ & -(1/8)\, (\xi - 1/6)^2\, R R_{;a} + (1/720)\, R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{;a} - (1/720)\, R_{\rho\sigma\tau\kappa} R^{\rho\sigma\tau\kappa}{}_{;a} \qquad (117b) \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
v_{0\ ab} = & -(1/3360)\,\Box\Box R_{ab} + (1/80)\,(\xi - 4/21)\,(\Box R)_{;ab} + (1/240)\,m^2\,\Box R_{ab} - (1/12)\,(\xi - 3/20)\,m^2\,R_{;ab} \\
& -(1/48)\,m^4\,R_{ab} - (1/12)\,(\xi - 1/6)(\xi - 3/20)\,RR_{;ab} + (1/360)\,(\xi - 1/7)\,R_{;\rho(a}R^{\rho}{}_{b)} + (1/144)\,(\xi - 1/5)\,(\\
& -(1/16)(\xi - 1/6)^2\,R_{;a}R_{;b} - (1/120)\,(\xi - 3/14)\,R_{;\rho}R^{\rho}{}_{(a;b)} + (1/120)\,(\xi - 17/84)\,R_{;\rho}R_{ab}{}^{;\rho} \\
& -(1/24)\,(\xi - 1/6)\,m^2\,RR_{ab} + (1/240)\,(\xi - 1/6)\,R\Box R_{ab} + (1/1008)\,R_{\rho(a}\Box R^{\rho}{}_{b)} - (1/180)\,m^2 R_{\rho a}R^{\rho}{}_{b} \\
& +(11/12600)\,R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma;(ab)} + (1/1440)\,R^{\rho\sigma}{}_{;a}R_{\rho\sigma;b} + (1/4200)\,R^{\rho\sigma}R_{\rho(a;b)\sigma} - (1/3150)\,R^{\rho\sigma}R_{ab;\rho\sigma} \\
& -(1/5040)\,R^{\rho}{}_{a;\sigma}R_{\rho b}{}^{;\sigma} + (1/1008)\,R^{\rho}{}_{a;\sigma}R^{\sigma}{}_{b;\rho} + (1/180)\,(\xi - 3/14)\,R^{;\rho\sigma}R_{\rho a\sigma b} - (1/2520)\,(\Box R^{\rho\sigma})R_{\rho a\sigma b} \\
& +(1/360)\,m^2\,R^{\rho\sigma}R_{\rho a\sigma b} - (1/2520)\,R^{\rho\sigma;\tau}R_{\tau\sigma\rho(a;b)} - (1/3600)\,R^{\rho\sigma}\Box R_{\rho a\sigma b} - (1/1680)\,R^{\rho\sigma;\tau}R_{\rho a\sigma b;\tau} \\
& +(1/3150)\,R^{\rho\sigma;\tau}{}_{(a}R_{|\tau\sigma\rho|b)} - (23/25200)\,R^{\rho}{}_{(a}{}^{;\sigma\tau}R_{|\tau\sigma\rho|b)} + (1/900)\,R^{\rho}{}_{(a}{}^{;\sigma\tau}R_{|\rho\sigma\tau|b)} + (1/1400)\,R^{\rho\sigma\tau\kappa}R_{\rho\sigma\tau(a;b} \\
& -(1/1575)\,R^{\rho\sigma\tau}{}_{a}\Box R_{\rho\sigma\tau b} + (1/360)\,m^2\,R^{\rho\sigma\tau}{}_{a}R_{\rho\sigma\tau b} - (29/25200)\,R^{\rho\sigma\tau\kappa}R_{\rho\sigma\tau\kappa;(ab)} - (1/1680)\,R^{\rho\sigma\tau}{}_{a;\kappa}R_{\rho\sigma\tau b} \\
& -(1/1344)\,R^{\rho\sigma\tau\kappa}{}_{;a}R_{\rho\sigma\tau\kappa;b} - (1/48)\,(\xi - 1/6)^2\,R^2 R_{ab} - (1/180)\,(\xi - 1/6)\,RR_{\rho a}R^{\rho}{}_{b} + (1/4320)\,R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}R \\
& -(1/3780)\,R^{\rho\sigma}R_{\rho a}R_{\sigma b} + (1/360)\,(\xi - 1/6)\,RR^{\rho\sigma}R_{\rho a\sigma b} + (1/7560)\,R^{\rho\tau}R^{\sigma}{}_{\tau}R_{\rho a\sigma b} - (2/4725)\,R^{\rho\sigma}R^{\tau}{}_{(a}R_{|\tau\sigma} \\
& -(1/37800)\,R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\sigma\lambda}R_{\kappa a\lambda b} + (1/360)\,(\xi - 1/6)\,RR^{\rho\sigma\tau}{}_{a}R_{\rho\sigma\tau b} - (1/4320)\,R_{ab}R^{\rho\sigma\tau\kappa}R_{\rho\sigma\tau\kappa} \\
& -(31/75600)\,R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\lambda}{}_{a}R^{\sigma}{}_{\kappa\lambda b} + (1/1200)\,R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\lambda}{}_{a}R^{\sigma}{}_{\lambda\kappa b} - (17/75600)\,R^{\rho\sigma}R^{\kappa\lambda}{}_{\rho a}R_{\kappa\lambda\sigma b} \\
& +(17/30240)\,R^{\kappa}{}_{(a}R^{\rho\sigma\tau}{}_{|\kappa|}R_{|\rho\sigma\tau|b)} + (17/37800)\,R^{\rho\sigma\tau}{}_{\lambda}R_{\rho\sigma\tau\kappa}R^{\lambda}{}_{a}{}^{\kappa}{}_{b} - (1/756)\,R^{\rho\kappa\sigma\lambda}R^{\tau}{}_{\rho\sigma a}R_{\tau\kappa\lambda b} \\
& +(1/1800)\,R^{\rho\kappa\sigma\lambda}R_{\rho\sigma\tau a}R_{\kappa\lambda}{}^{\tau}{}_{b} - (19/18900)\,R^{\rho\sigma\kappa\lambda}R_{\rho\sigma\tau a}R_{\kappa\lambda}{}^{\tau}{}_{b}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
v_1 = & -(1/48)\,m^6 - (1/480)\,(\xi - 3/14)\,\Box\Box R + (1/48)\,(\xi - 1/5)\,m^2\,\Box R - (1/16)\,(\xi - 1/6)\,m^4\,R \\
& +(1/48)\,(\xi - 1/6)\,(\xi - 1/5)\,R\Box R + (1/96)\,[\xi^2 - (2/5)\,\xi + 17/420]\,R_{;\rho}R^{;\rho} - (1/16)\,(\xi - 1/6)^2\,m^2\,R^2 \\
& -(1/720)\,(\xi - 3/14)\,R_{;\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - (1/5040)\,R_{\rho\sigma}\Box R^{\rho\sigma} + (1/1440)\,m^2\,R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} - (1/20160)\,R_{\rho\sigma;\tau}R^{\rho\sigma;\tau} \\
& -(1/10080)\,R_{\rho\tau;\sigma}R^{\sigma\tau;\rho} + (1/3360)\,R_{\rho\sigma\tau\kappa}\Box R^{\rho\sigma\tau\kappa} - (1/1440)\,m^2\,R_{\rho\sigma\tau\kappa}R^{\rho\sigma\tau\kappa} + (1/4480)\,R_{\rho\sigma\tau\kappa;\lambda}R^{\rho\sigma\tau\kappa;\lambda} \\
& -(1/48)\,(\xi - 1/6)^3\,R^3 + (1/1440)\,(\xi - 1/6)\,RR_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} + (1/45360)\,R_{\rho\sigma}R^{\rho}{}_{\tau}R^{\sigma\tau} - (1/15120)\,R_{\rho\sigma}R_{\kappa\lambda}R \\
& -(1/1440)\,(\xi - 1/6)\,RR_{\rho\sigma\tau\kappa}R^{\rho\sigma\tau\kappa} - (1/7560)\,R_{\kappa\lambda}R^{\kappa\rho\sigma\tau}R^{\lambda}{}_{\rho\sigma\tau} + (1/4536)\,R^{\rho\kappa\sigma\lambda}R_{\rho\alpha\sigma\beta}R_{\kappa}{}^{\alpha}{}_{\lambda}{}^{\beta} \\
& +(11/90720)\,R^{\rho\sigma\kappa\lambda}R_{\rho\sigma\alpha\beta}R_{\kappa\lambda}{}^{\alpha\beta}. \qquad (1
\end{aligned}
$$

- Pour les dimensions $d = 7, 8, 9, 10, 11$

- On a développé tout le matériel pour réaliser les calculs explicitement. Mais ils deviennent trop lourds. On notera toutefois l'existence de simplifications considérables dans des espaces-temps particuliers et intéressants du point de vue physique.

VII. AMBIGUÏTÉS ET ANOMALIES DE TRACE

On a déjà noté que la valeur moyenne $\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle_{\text{ren}}$ est unique à un tenseur géométrique près $\Theta_{\mu\nu}$. On peut trouver sa forme générale en supposant qu'il est local et conservé et qu'il ne diverge pas quand $m^2 \to 0$. En notant que (i) $\Theta_{\mu\nu}$ a pour dimension $(\text{masse})^d$ et peut être obtenu par dérivation fonctionnelle à partir de lagrangiens géométriques ayant pour dimension $(\text{masse})^d$ et que (ii) $g_{\mu\nu}$ est sans dimension alors que R, $R_{\mu\nu}$ et $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ont pour dimension $(\text{masse})^2$, on a les résultats suivants:

Pour $d = 3$, il y a deux lagrangians géometriques de dimension $(\text{mass})^3$ qui sont finis pour $m^2 \to 0$: $\mathcal{L} = m^3$ and $\mathcal{L} = mR$. On a donc

$$\Theta_{\mu\nu} = A\, m^3 g_{\mu\nu} + B\, m[R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}] \tag{119}$$

avec A et B qui sont des constantes non-dimensionnées.

Pour $d = 4$, il y a cinq lagrangiens géometriques "indépendants" de dimension $(\text{masse})^4$ qui sont finis pour $m^2 \to 0$: $\mathcal{L} = m^4$, $\mathcal{L} = m^2 R$, $\mathcal{L} = R^2$, $\mathcal{L} = R_{pq}R^{pq}$ and $\mathcal{L} = R_{pqrs}R^{pqrs}$. Par dérivation fonctionnelle, on obtient

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} = {} & A\, m^4 g_{\mu\nu} + B\, m^2[R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}] \\ & + C_1\, H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu} + C_2\, H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu} + C_3\, H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{120}$$

avec A, B, C_1, C_2 et C_3 qui sont des constantes non-dimensionnées. Ici, on a $H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu}$, $H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu}$ et $H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu}$ qui sont les tenseurs de rang 2 et d'ordre 4

$$H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g}\; R^2 \tag{121a}$$

$$\begin{aligned} = {} & 2\, R_{;\mu\nu} - 2\, RR_{\mu\nu} \\ & + g_{\mu\nu}[-2\, \Box R + (1/2)\, R^2], \end{aligned} \tag{121b}$$

$$H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g}\; R_{pq}R^{pq} \tag{122a}$$

$$\begin{aligned} = {} & R_{;\mu\nu} - \Box R_{\mu\nu} - 2\, R^{pq} R_{p\mu q\nu} \\ & + g_{\mu\nu}[-(1/2)\, \Box R + (1/2)\, R_{pq}R^{pq}], \end{aligned} \tag{122b}$$

$$H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^D x\sqrt{-g}\ R_{pqrs}R^{pqrs} \tag{123a}$$

$$= 2\,R_{;\mu\nu} - 4\,\Box R_{\mu\nu} + 4R^{p}{}_{\mu}R_{p\nu} - 4R^{pq}R_{p\mu q\nu}$$
$$-2R^{pqr}{}_{\mu}R_{pqr\nu} + g_{\mu\nu}[(1/2)\,R_{pqrs}R^{pqrs}]. \tag{123b}$$

On peut simplifier le résultat précédent en rappelant que

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\ \mathcal{L}_{(2)}, \tag{124}$$

avec $\mathcal{L}_{(2)}$ qui est le lagrangien de Gauss-Bonnet donné par

$$\mathcal{L}_{(2)} = R^2 - 4R_{pq}R^{pq} + R_{pqrs}R^{pqrs}, \tag{125}$$

est un invariant topologique. Par dérivation fonctionnelle, on obtient

$$H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu} - 4\,H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu} + H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu} = 0 \tag{126}$$

qui permet déliminer $H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu}$.

$\Theta_{\mu\nu}$ donné par (120) peut être utilisé pour modifier l'anomalie de trace (82). On peut enlever le terme en $\Box R$ mais les termes $R_{pq}R^{pq}$ et $R_{pqrs}R^{pqrs}$ ne peuvent être modifiés.

Pour $d = 5$, il y a cinq lagrangiens géometriques "indépendants" de dimension (masse)^5 qui sont finis pour $m^2 \to 0$: $\mathcal{L} = m^5$, $\mathcal{L} = m^3R$, $\mathcal{L} = mR^2$, $\mathcal{L} = mR_{pq}R^{pq}$ and $\mathcal{L} = mR_{pqrs}R^{pqrs}$. Par dérivation fonctionnelle on obtient

$$\Theta_{\mu\nu} = A\,m^5 g_{\mu\nu} + B\,m^3[R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}]$$
$$+C_1\,mH^{(4,2)(1)}_{\mu\nu} + C_2\,mH^{(4,2)(2)}_{\mu\nu} + C_3\,mH^{(4,2)(3)}_{\mu\nu} \tag{127}$$

avec A, B, C_1, C_2 et C_3 qui sont des constantes non-dimensionnées.

Pour $d = 6$, il y a quinze lagrangiens géometriques "indépendants" de dimension (masse)^6 qui sont finis pour $m^2 \to 0$: $\mathcal{L} = m^6$, $\mathcal{L} = m^4R$ et les trois polynomes de Riemann de rang 0 et d'ordre 4 $\mathcal{L} = m^2R^2$, $\mathcal{L} = m^2R_{pq}R^{pq}$, $\mathcal{L} = m^2R_{pqrs}R^{pqrs}$ ainsi que les dix polynomes de Riemann de rang 0 et d'ordre 6 $\mathcal{L} = R\Box R$, $\mathcal{L} = R_{pq}\Box R^{pq}$, $\mathcal{L} = R^3$, $\mathcal{L} = RR_{pq}R^{pq}$, $\mathcal{L} = R_{pq}R^{p}{}_{r}R^{qr}$, $\mathcal{L} = R_{pq}R_{rs}R^{prqs}$, $\mathcal{L} = RR_{pqrs}R^{pqrs}$, $\mathcal{L} = R_{pq}R^{p}{}_{rst}R^{qrst}$, $\mathcal{L} = R_{pqrs}R^{pquv}R^{rs}{}_{uv}$,

$\mathcal{L} = R_{prqs}R^{p\ \ q}_{\ u\ v}R^{rusv}$. Par dérivation fonctionnelle, on obtient

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu\nu} &= A\,m^6 g_{\mu\nu} + B\,m^4[(1/2)Rg_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}] \\ &+C_1\,m^2 H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu} + C_2\,m^2 H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu} + C_3\,m^2 H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu} \\ &+D_1\,H^{\{2,0\}(1)}_{\mu\nu} + D_2\,H^{\{2,0\}(3)}_{\mu\nu} + D_3\,H^{(6,3)(1)}_{\mu\nu} \\ &+D_4\,H^{(6,3)(2)}_{\mu\nu} + D_5\,H^{(6,3)(3)}_{\mu\nu} + D_6\,H^{(6,3)(4)}_{\mu\nu} \\ &+D_7\,H^{(6,3)(5)}_{\mu\nu} + D_8\,H^{(6,3)(6)}_{\mu\nu} + D_9\,H^{(6,3)(7)}_{\mu\nu} \\ &+D_{10}\,H^{(6,3)(8)}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{128}$$

avec A, B, C_1, C_2 et C_3 ainsi que D_1, ..., D_9 et D_{10} qui sont des constantes non dimensionnées. Ici, on utilise les tenseurs de rang 2 et d'ordre 6

$$H^{\{2,0\}(1)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ R\Box R \tag{129}$$

$$H^{\{2,0\}(3)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ R_{pq}\Box R^{pq} \tag{130}$$

$$H^{(6,3)(1)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ R^3 \tag{131}$$

$$H^{(6,3)(2)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ RR_{pq}R^{pq} \tag{132}$$

$$H^{(6,3)(3)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ R_{pq}R^{p}_{\ r}R^{qr} \tag{133}$$

$$H^{(6,3)(4)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ R_{pq}R_{rs}R^{prqs} \tag{134}$$

$$H^{(6,3)(5)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ RR_{pqrs}R^{pqrs} \tag{135}$$

$$H^{(6,3)(6)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ R_{pq}R^{p}_{\ rst}R^{qrst} \tag{136}$$

$$H^{(6,3)(7)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ R_{pqrs}R^{pquv}R^{rs}_{\ \ uv} \tag{137}$$

$$H^{(6,3)(8)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int_{\mathcal{M}} d^Dx\sqrt{-g}\ R_{prqs}R^{p\ \ q}_{\ u\ v}R^{rusv}. \tag{138}$$

(Expressions dans la référence 5b).

On peut simplifier l'expression précédente en notant qu'en dimension 6, le nombre d'Euler

$$\int_{\mathcal{M}} d^6x\sqrt{-g}\ \mathcal{L}_{(3)}, \tag{139}$$

où $\mathcal{L}_{(3)}$ est le lagrangien cubique de Lovelock

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{(3)} = R^3 - 12\, RR_{pq}R^{pq} + 16\, R_{pq}R^{p}{}_{r}R^{qr} \\
&+24\, R_{pq}R_{rs}R^{prqs} + 3\, RR_{pqrs}R^{pqrs} - 24\, R_{pq}R^{p}{}_{rst}R^{qrst} \\
&+4\, R_{pqrs}R^{pquv}R^{rs}{}_{uv} - 8\, R_{prqs}R^{p}{}_{u}{}^{q}{}_{v}R^{rusv},
\end{aligned} \tag{140}$$

est un invariant topologique. Par dérivation fonctionnelle, on a

$$\begin{aligned}
&H_{\mu\nu}^{(6,3)(1)} - 12\, H_{\mu\nu}^{(6,3)(2)} + 16\, H_{\mu\nu}^{(6,3)(3)} \\
&\quad +24\, H_{\mu\nu}^{(6,3)(4)} + 3\, H_{\mu\nu}^{(6,3)(5)} - 24\, H_{\mu\nu}^{(6,3)(6)} \\
&\quad +4\, H_{\mu\nu}^{(6,3)(7)} - 8\, H_{\mu\nu}^{(6,3)(8)} = 0.
\end{aligned} \tag{141}$$

qui permet d'éliminer un des tenseurs d'ordre 2 et de rang 6.

$\Theta_{\mu\nu}$ donné par (128) peut être utilisé pour modifier l'anomalie de trace (83). On peut enlever n'importe quel terme à l'exception de R^3, $RR_{pq}R^{pq}$ and $RR_{pqrs}R^{pqrs}$.

VIII. INFINIS ET ACTIONS GRAVITATIONNELLES

On peut évaluer la partie divergente (62) du tenseur d'impulsion-énergie et exprimer le résultat en puissances de $\sigma^{;a}(x,x')$ puis moyenner sur toutes les directions angulaires selon x'-x. On obtient alors une expression faisant intervenir des tenseurs geometriques conservés qui peut être absorbée dans un lagrangien gravitationnel nu.

Pour $d=3$, la partie divergente du tenseur d'impulsion-énergie s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle_{\text{sing}} &\sim A\frac{g_{\mu\nu}}{\sigma^{3/2}} + B\frac{[R_{\mu\nu}-(1/2)Rg_{\mu\nu}]}{\sigma^{1/2}} \\ &+ \text{termes finis en }\; m^3 g_{\mu\nu}\,\text{et}\, m[R_{\mu\nu}-(1/2)Rg_{\mu\nu}].\end{aligned} \tag{142}$$

et peut être absorbée dans

$$S_{\text{grav}} = -\frac{1}{16\pi G_B}\int_{\mathcal{M}} d^3x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda_B)\,. \tag{143}$$

Pour $d=4$, la partie divergente du tenseur d'impulsion-énergie s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle_{\text{sing}} &\sim A\frac{g_{\mu\nu}}{\sigma^2} + B\frac{[R_{\mu\nu}-(1/2)Rg_{\mu\nu}]}{\sigma} \\ &+ \left(C_1 H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu} + C_2 H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu} + C_3 H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu}\right)\ln\sigma \\ &+ \text{termes finis en }\; m^4 g_{\mu\nu}, m^2[R_{\mu\nu}-(1/2)Rg_{\mu\nu}], H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu}, H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu}\;\text{et}\; H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{144}$$

et peut être absorbée dans

$$\begin{aligned}S_{\text{grav}} = -\frac{1}{16\pi G_B}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\,\Big(&R-2\Lambda_B \\ &+\alpha^{(1)}_B R^2 + \alpha^{(2)}_B R_{pq}R^{pq} + \alpha^{(3)}_B R_{pqrs}R^{pqrs}\Big)\,.\end{aligned} \tag{145}$$

On pourrait utiliser le fait que le nombre d'Euler (124) est un invariant tomologique pour éliminer dans cette action gravitationnelle nue un des scalaires d'ordre 4.

Pour $d=5$, la partie divergente du tenseur d'impulsion-énergie s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle_{\text{sing}} &\sim A\frac{g_{\mu\nu}}{\sigma^{5/2}} + B\frac{[R_{\mu\nu}-(1/2)Rg_{\mu\nu}]}{\sigma^{3/2}} \\ &+ \frac{\left(C_1 H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu} + C_2 H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu} + C_3 H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu}\right)}{\sigma^{1/2}} \\ &+ \text{termes finis en }\; m^5 g_{\mu\nu}, m^3[R_{\mu\nu}-(1/2)Rg_{\mu\nu}], mH^{(4,2)(1)}_{\mu\nu}, mH^{(4,2)(2)}_{\mu\nu}\;\text{and}\; mH^{(4,2)(3)}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{146}$$

et peut être absorbée dans

$$S_{\text{grav}} = -\frac{1}{16\pi G_B}\int_{\mathcal{M}} d^5x\sqrt{-g}\,\Big(R - 2\Lambda_B$$
$$+\alpha_B^{(1)}R^2 + \alpha_B^{(2)}R_{pq}R^{pq} + \alpha_B^{(3)}R_{pqrs}R^{pqrs}\Big)\,. \tag{147}$$

Pour $d = 6$, la partie divergente du tenseur d'impulsion-énergie s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
&\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle_{\text{sing}} \sim A\frac{g_{\mu\nu}}{\sigma^3} + B\frac{[R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}]}{\sigma^2}\\
&+\frac{\Big(C_1H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu} + C_2H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu} + C_3H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu}\Big)}{\sigma}\\
&+\big(D_1H^{\{2,0\}(1)}_{\mu\nu} + D_2H^{\{2,0\}(3)}_{\mu\nu} + D_3H^{(6,3)(1)}_{\mu\nu}\\
&+D_4H^{(6,3)(2)}_{\mu\nu} + D_5H^{(6,3)(3)}_{\mu\nu} + D_6H^{(6,3)(4)}_{\mu\nu}\\
&+D_7H^{(6,3)(5)}_{\mu\nu} + D_8H^{(6,3)(6)}_{\mu\nu} + D_9H^{(6,3)(7)}_{\mu\nu}\\
&+D_{10}H^{(6,3)(8)}_{\mu\nu}\big)\ln\sigma\\
&+\text{termes finis en}\ \ m^6g_{\mu\nu}, m^4[R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}],\\
&\qquad m^2H^{(4,2)(1)}_{\mu\nu}, m^2H^{(4,2)(2)}_{\mu\nu}, m^2H^{(4,2)(3)}_{\mu\nu},\\
&\qquad H^{\{2,0\}(1)}_{\mu\nu}, H^{\{2,0\}(3)}_{\mu\nu}, H^{(6,3)(1)}_{\mu\nu}, H^{(6,3)(2)}_{\mu\nu}, H^{(6,3)(3)}_{\mu\nu},\\
&\qquad H^{(6,3)(4)}_{\mu\nu}, H^{(6,3)(5)}_{\mu\nu}, H^{(6,3)(6)}_{\mu\nu}, H^{(6,3)(7)}_{\mu\nu}\ \text{et}\ H^{(6,3)(8)}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{148}$$

et peut être absorbée dans

$$\begin{aligned}
&S_{\text{grav}} = -\frac{1}{16\pi G_B}\int_{\mathcal{M}} d^6x\sqrt{-g}\,\Big(R - 2\Lambda_B\\
&+\alpha_B^{(1)}R^2 + \alpha_B^{(2)}R_{pq}R^{pq} + \alpha_B^{(3)}R_{pqrs}R^{pqrs}\\
&+\beta_B^{(1)}R^3 + \beta_B^{(2)}RR_{pq}R^{pq} + \beta_B^{(3)}R_{pq}R^p{}_rR^{qr}\\
&+\beta_B^{(4)}R_{pq}R_{rs}R^{prqs} + \beta_B^{(5)}RR_{pqrs}R^{pqrs}\\
&+\beta_B^{(6)}R_{pq}R^p{}_{rst}R^{qrst} + \beta_B^{(7)}R_{pqrs}R^{pquv}R^{rs}{}_{uv}\\
&+\beta_B^{(8)}R_{prqs}R^p{}_u{}^q{}_vR^{rusv}\Big)\,.
\end{aligned} \tag{149}$$

On pourrait utiliser le fait que le nombre d'Euler (139) est un invariant tomologique pour éliminer un des polynomes de Riemann de rang 0 et d'ordre 6 dans cette action gravitationnelle nue.