

Substitutions of elements used in computations (some are produced by the computer)

Contents

1 Substitutions coded in initialization data	1
1.1 Substitutions for $g_{\mu\nu}$ in terms of repeated $\widehat{\nabla}$	1
1.2 Substitutions for $g_{\mu\nu}$ in terms of powered $\widehat{\nabla}$	3
1.3 Substitutions for $g^{\mu\nu}$ for one derivative	4
1.4 Substitutions for ∇ on $\mathbb{1}$ in post element	4
1.5 Substitutions for $\nabla^3 \mathbb{1}$ in post element	5
2 Substitutions produced by the computer	6
2.1 Substitutions for $H^{\mu\nu}$	6
2.2 Substitutions for L^μ	10
2.3 Substitutions for Christoffel symbols	13
3 Riemann covariant derivatives (produced by the computer)	19
3.1 Gauge derivatives of u to Christoffel symbols	19
3.2 Gauge derivatives of u to normal coordinates	21
3.3 Gauge derivatives of q to Christoffel symbols	22
3.4 Gauge derivatives of q to normal coordinates	23
3.5 Gauge derivatives of N^μ to Christoffel symbols	25
3.6 Gauge derivatives of N^μ to normal coordinates	26
4 Noncommutative Torus (produced by the computer)	29
4.1 Substitutions for $H^{\mu\nu}$	29
4.2 Substitutions for u	30
4.3 Substitutions for L^μ (P_1 like operator)	31
4.4 Substitutions for q (P_1 like operator)	31
4.5 Substitutions for L^μ (P_2 like operator)	31

1 Substitutions coded in initialization data

1.1 Substitutions for $g_{\mu\nu}$ in terms of repeated $\widehat{\nabla}$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} g_{\nu_3 \nu_4})) \rightarrow \frac{1}{3} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_2 \nu_4} \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{3} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_1 \nu_4} \quad (\#2)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} (\partial_{\nu_3} g_{\nu_4 \nu_5}))) \rightarrow \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_3 \nu_5}) \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_2 \nu_5}) \quad (\#2)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_3 \nu_5}) \quad (\#3)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_2 \nu_5}) \quad (\#4)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_1 \nu_5}) \quad (\#5)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_1 \nu_5}) \quad (\#6)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} (\partial_{\nu_3} (\partial_{\nu_4} g_{\nu_5 \nu_6})))) \rightarrow \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1 \nu_2}^2 R_{\nu_3 \nu_5 \nu_4 \nu_6}) \quad (\#1)$$

[illegible]

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_3 \nu_8} \quad (\#40)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_2 \nu_8} \quad (\#41)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_2 \nu_8} \quad (\#42)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_4 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#43)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#44)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_4 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#45)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#46)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#47)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#48)$$

1.2 Substitutions for $g_{\mu\nu}$ in terms of powered $\widehat{\nabla}$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} g_{\nu_3 \nu_4})) \rightarrow \frac{1}{3} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_2 \nu_4} \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{3} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_1 \nu_4} \quad (\#2)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} (\partial_{\nu_3} g_{\nu_4 \nu_5}))) \rightarrow \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_3 \nu_5}) \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_2 \nu_5}) \quad (\#2)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_3 \nu_5}) \quad (\#3)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_2 \nu_5}) \quad (\#4)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_1 \nu_5}) \quad (\#5)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_1 \nu_5}) \quad (\#6)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} (\partial_{\nu_3} (\partial_{\nu_4} g_{\nu_5 \nu_6})))) \rightarrow \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_4 \nu_6})) \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_3 \nu_6})) \quad (\#2)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_4 \nu_6})) \quad (\#3)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_3 \nu_6})) \quad (\#4)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_2 \nu_6})) \quad (\#5)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_2 \nu_6})) \quad (\#6)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_4 \nu_6})) \quad (\#7)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_3 \nu_6})) \quad (\#8)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_4 \nu_6})) \quad (\#9)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_3 \nu_6})) \quad (\#10)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_2 \nu_6})) \quad (\#11)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_2 \nu_6})) \quad (\#12)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_4 \nu_6})) \quad (\#13)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_3 \nu_6})) \quad (\#14)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_4 \nu_6})) \quad (\#15)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_3 \nu_6})) \quad (\#16)$$

$$+ \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_2 \nu_6})) \quad (\#17)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_2 \nu_6})) \quad (\#18) \\
& + \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_1 \nu_6})) \quad (\#19) \\
& + \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_1 \nu_6})) \quad (\#20) \\
& + \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_1 \nu_6})) \quad (\#21) \\
& + \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_1 \nu_6})) \quad (\#22) \\
& + \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_1 \nu_6})) \quad (\#23) \\
& + \frac{1}{20} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_1 \nu_6})) \quad (\#24) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_4 \nu_8} \quad (\#25) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_4 \nu_6 \nu_3 \nu_8} \quad (\#26) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_4 \nu_8} \quad (\#27) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_3 \nu_8} \quad (\#28) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_4 \nu_6 \nu_2 \nu_8} \quad (\#29) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_2 \nu_8} \quad (\#30) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_1 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_4 \nu_8} \quad (\#31) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_1 \nu_7} R_{\nu_4 \nu_6 \nu_3 \nu_8} \quad (\#32) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_1 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_4 \nu_8} \quad (\#33) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_1 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_3 \nu_8} \quad (\#34) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_1 \nu_7} R_{\nu_4 \nu_6 \nu_2 \nu_8} \quad (\#35) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_1 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_2 \nu_8} \quad (\#36) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_4 \nu_8} \quad (\#37) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_3 \nu_8} \quad (\#38) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_4 \nu_8} \quad (\#39) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_3 \nu_8} \quad (\#40) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_2 \nu_8} \quad (\#41) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_2 \nu_8} \quad (\#42) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_4 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#43) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#44) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_4 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#45) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_2 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#46) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_5 \nu_4 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#47) \\
& + \frac{1}{45} 2 T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_7 \nu_8} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_3 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_1 \nu_8} \quad (\#48)
\end{aligned}$$

1.3 Substitutions for $g^{\mu\nu}$ for one derivative

$$T^{\nu_1}_{\nu_2 \nu_3} (\partial_{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3}) \rightarrow -T^{\nu_1}_{\nu_2 \nu_3} g^{\nu_2 \nu_4} g^{\nu_3 \nu_5} (\partial_{\nu_1} g_{\nu_4 \nu_5}) \quad (\#1)$$

1.4 Substitutions for ∇ on $\mathbb{1}$ in post element

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mu_1} (\nabla_{\mu_2} \mathbb{1})) & \rightarrow + \frac{1}{2} F_{\mu_1 \mu_2} \\
& + \frac{1}{2} (\nabla^2_{\mu_1 \mu_2} \mathbb{1}) \\
& + \frac{1}{2} (\nabla^2_{\mu_2 \mu_1} \mathbb{1})
\end{aligned}$$

$$(\nabla_{\mu_1}(\nabla_{\mu_2}(\nabla_{\mu_3}\mathbb{1}))) \rightarrow +(\nabla_{\mu_1\mu_2\mu_3}^3\mathbb{1})$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mu_1}(\nabla_{\mu_2}(\nabla_{\mu_3}(\nabla_{\mu_4}\mathbb{1})))) &\rightarrow +\frac{1}{4}F_{\mu_1\mu_2}F_{\mu_3\mu_4} \\ &\quad +\frac{1}{4}3(\nabla_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^4\mathbb{1}) \\ &\quad +\frac{1}{4}(\nabla_{\mu_1\mu_2\mu_4\mu_3}^4\mathbb{1}) \\ &\quad +\frac{1}{4}(\nabla_{\mu_2\mu_1\mu_3\mu_4}^4\mathbb{1}) \\ &\quad -\frac{1}{4}(\nabla_{\mu_2\mu_1\mu_4\mu_3}^4\mathbb{1}) \end{aligned}$$

1.5 Substitutions for $\nabla^3\mathbb{1}$ in post element

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mu_1}(\nabla_{\mu_2}(\nabla_{\mu_3}\mathbb{1}))) &\rightarrow +(\nabla_{\mu_1}F_{\mu_2\mu_3}) \\ &\quad +(\nabla_{\mu_1\mu_3\mu_2}^3\mathbb{1}) \\ &\quad -(\nabla_{\mu_3\mu_2\mu_1}^3\mathbb{1}) \\ &\quad +(\nabla_{\mu_2\mu_3\mu_1}^3\mathbb{1}) \end{aligned}$$

2 Substitutions produced by the computer

2.1 Substitutions for $H^{\mu\nu}$

$$T_{\nu_1 \nu_2} H^{\nu_1 \nu_2} \rightarrow T_{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_1 \nu_2} u \quad (\#1)$$

$$T_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_1} (\nabla_{\nu_1} H^{\nu_2 \nu_3}) \rightarrow T_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3} (\nabla_{\nu_1} u) \quad (\#1)$$

$$T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} H^{\nu_3 \nu_4})) \rightarrow -\frac{1}{3} T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_5} g^{\nu_4 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_2 \nu_6} u \quad (\#1)$$

$$-\frac{1}{3} T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_5} g^{\nu_4 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_1 \nu_6} u \quad (\#2)$$

$$+ T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} u)) \quad (\#3)$$

$$T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} H^{\nu_4 \nu_5}))) \rightarrow -\frac{1}{6} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_3 \nu_7}) u \quad (\#1)$$

$$-\frac{1}{6} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_2 \nu_7}) u \quad (\#2)$$

$$-\frac{1}{6} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_3 \nu_7}) u \quad (\#3)$$

$$-\frac{1}{6} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_2 \nu_7}) u \quad (\#4)$$

$$-\frac{1}{6} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_1 \nu_7}) u \quad (\#5)$$

$$-\frac{1}{6} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_1 \nu_7}) u \quad (\#6)$$

$$-\frac{1}{3} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_3 \nu_7} (\nabla_{\nu_1} u) \quad (\#7)$$

$$-\frac{1}{3} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_2 \nu_7} (\nabla_{\nu_1} u) \quad (\#8)$$

$$-\frac{1}{3} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_3 \nu_7} (\nabla_{\nu_2} u) \quad (\#9)$$

$$-\frac{1}{3} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_1 \nu_7} (\nabla_{\nu_2} u) \quad (\#10)$$

$$-\frac{1}{3} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_2 \nu_7} (\nabla_{\nu_3} u) \quad (\#11)$$

$$-\frac{1}{3} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_6} g^{\nu_5 \nu_7} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_1 \nu_7} (\nabla_{\nu_3} u) \quad (\#12)$$

$$+ T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} u))) \quad (\#13)$$

$$T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} (\nabla_{\nu_4} H^{\nu_5 \nu_6})))) \rightarrow -\frac{1}{45} 2 T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_1 \nu_7 \nu_2 \nu_9} R_{\nu_3 \nu_8 \nu_4 \nu_{10}} u \quad (\#1)$$

$$-\frac{1}{45} 2 T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_1 \nu_7 \nu_2 \nu_9} R_{\nu_4 \nu_8 \nu_3 \nu_{10}} u \quad (\#2)$$

$$+ \frac{1}{15} T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_1 \nu_7 \nu_3 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_8 \nu_4 \nu_{10}} u \quad (\#3)$$

$$+ \frac{1}{15} T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_1 \nu_7 \nu_4 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_8 \nu_3 \nu_{10}} u \quad (\#4)$$

$$+ \frac{1}{15} T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_1 \nu_7 \nu_3 \nu_9} R_{\nu_4 \nu_8 \nu_2 \nu_{10}} u \quad (\#5)$$

$$+ \frac{1}{15} T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_1 \nu_7 \nu_4 \nu_9} R_{\nu_3 \nu_8 \nu_2 \nu_{10}} u \quad (\#6)$$

$$-\frac{1}{45} 2 T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_2 \nu_7 \nu_1 \nu_9} R_{\nu_3 \nu_8 \nu_4 \nu_{10}} u \quad (\#7)$$

$$-\frac{1}{45} 2 T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_2 \nu_7 \nu_1 \nu_9} R_{\nu_4 \nu_8 \nu_3 \nu_{10}} u \quad (\#8)$$

$$+ \frac{1}{15} T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_1 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_8 \nu_4 \nu_{10}} u \quad (\#9)$$

$$+ \frac{1}{15} T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_4 \nu_7 \nu_1 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_8 \nu_3 \nu_{10}} u \quad (\#10)$$

$$+ \frac{1}{15} T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_7} g^{\nu_6 \nu_8} g^{\nu_9 \nu_{10}} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_1 \nu_9} R_{\nu_4 \nu_8 \nu_2 \nu_{10}} u \quad (\#11)$$

$$-\frac{1}{3}T_{\nu_5\nu_6}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}g^{\nu_5\nu_7}g^{\nu_6\nu_8}R_{\nu_3\nu_7\nu_1\nu_8}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_4}u)) \quad (\#86)$$

$$-\frac{1}{3}T_{\nu_5\nu_6}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}g^{\nu_5\nu_7}g^{\nu_6\nu_8}R_{\nu_1\nu_7\nu_2\nu_8}(\nabla_{\nu_3}(\nabla_{\nu_4}u)) \quad (\#87)$$

$$-\frac{1}{3}T_{\nu_5\nu_6}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}g^{\nu_5\nu_7}g^{\nu_6\nu_8}R_{\nu_2\nu_7\nu_1\nu_8}(\nabla_{\nu_3}(\nabla_{\nu_4}u)) \quad (\#88)$$

$$+T_{\nu_5\nu_6}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}g^{\nu_5\nu_6}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_3}(\nabla_{\nu_4}u)))) \quad (\#89)$$

2.2 Substitutions for L^μ

$$T_{\nu_1} L^{\nu_1} \rightarrow T_{\nu_1} N^{\nu_1} \quad (\#1)$$

$$T_{\nu_2}^{\nu_1} (\nabla_{\nu_1} L^{\nu_2}) \rightarrow -\frac{1}{3} 2 T_{\nu_2}^{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3} \text{Ric}_{\nu_1 \nu_3} u \quad (\#1)$$

$$+ T_{\nu_2}^{\nu_1} (\nabla_{\nu_1} N^{\nu_2}) \quad (\#2)$$

$$T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} L^{\nu_3})) \rightarrow -\frac{1}{6} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_2 \nu_6}) u \quad (\#1)$$

$$- \frac{1}{6} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_1 \nu_6}) u \quad (\#2)$$

$$- \frac{1}{3} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} \text{Ric}_{\nu_2 \nu_4}) u \quad (\#3)$$

$$- \frac{1}{3} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} \text{Ric}_{\nu_1 \nu_4}) u \quad (\#4)$$

$$- \frac{1}{6} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} \text{Ric}_{\nu_1 \nu_2}) u \quad (\#5)$$

$$- \frac{1}{3} 2 T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} \text{Ric}_{\nu_2 \nu_4} (\nabla_{\nu_1} u) \quad (\#6)$$

$$- \frac{1}{3} 2 T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} \text{Ric}_{\nu_1 \nu_4} (\nabla_{\nu_2} u) \quad (\#7)$$

$$+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} N^{\nu_3})) \quad (\#8)$$

$$T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} L^{\nu_4}))) \rightarrow -\frac{1}{90} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_5 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_7 \nu_3 \nu_9} u \quad (\#1)$$

$$- \frac{1}{90} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_5 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_2 \nu_9} u \quad (\#2)$$

$$- \frac{1}{90} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_5 \nu_6 \nu_1 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_7 \nu_3 \nu_9} u \quad (\#3)$$

$$- \frac{1}{90} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_5 \nu_6 \nu_1 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_2 \nu_9} u \quad (\#4)$$

$$- \frac{1}{90} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_3 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_7 \nu_5 \nu_9} u \quad (\#5)$$

$$- \frac{1}{90} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_3 \nu_8} R_{\nu_5 \nu_7 \nu_2 \nu_9} u \quad (\#6)$$

$$- \frac{1}{90} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_1 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_7 \nu_5 \nu_9} u \quad (\#7)$$

$$- \frac{1}{90} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_3 \nu_6 \nu_1 \nu_8} R_{\nu_5 \nu_7 \nu_2 \nu_9} u \quad (\#8)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_2 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_5 \nu_9} u \quad (\#9)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_6 \nu_2 \nu_8} R_{\nu_5 \nu_7 \nu_3 \nu_9} u \quad (\#10)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_1 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_5 \nu_9} u \quad (\#11)$$

$$+ \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_6 \nu_1 \nu_8} R_{\nu_5 \nu_7 \nu_3 \nu_9} u \quad (\#12)$$

$$- \frac{1}{18} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_8 \nu_2 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_5 \nu_9} u \quad (\#13)$$

$$- \frac{1}{18} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_8 \nu_2 \nu_6} R_{\nu_5 \nu_7 \nu_3 \nu_9} u \quad (\#14)$$

$$- \frac{1}{18} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_8 \nu_1 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_5 \nu_9} u \quad (\#15)$$

$$- \frac{1}{18} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_8 \nu_1 \nu_6} R_{\nu_5 \nu_7 \nu_3 \nu_9} u \quad (\#16)$$

$$- \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_8 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_9 \nu_3 \nu_7} u \quad (\#17)$$

$$- \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_8 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_9 \nu_2 \nu_7} u \quad (\#18)$$

$$- \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_8 \nu_5 \nu_1 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_9 \nu_3 \nu_7} u \quad (\#19)$$

$$- \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_8 \nu_5 \nu_1 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_9 \nu_2 \nu_7} u \quad (\#20)$$

$$- \frac{1}{45} 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} g^{\nu_6 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_8 \nu_3 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_9 \nu_7} u \quad (\#21)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{10} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_1} (\widehat{\nabla}_{v_2} \text{Ric}_{v_3 v_5})) u \quad (\#59) \\
& -\frac{1}{10} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_1} (\widehat{\nabla}_{v_3} \text{Ric}_{v_2 v_5})) u \quad (\#60) \\
& -\frac{1}{20} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_1} (\widehat{\nabla}_{v_5} \text{Ric}_{v_2 v_3})) u \quad (\#61) \\
& -\frac{1}{10} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_2} (\widehat{\nabla}_{v_1} \text{Ric}_{v_3 v_5})) u \quad (\#62) \\
& -\frac{1}{10} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_3} (\widehat{\nabla}_{v_1} \text{Ric}_{v_2 v_5})) u \quad (\#63) \\
& -\frac{1}{20} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_5} (\widehat{\nabla}_{v_1} \text{Ric}_{v_2 v_3})) u \quad (\#64) \\
& -\frac{1}{10} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_2} (\widehat{\nabla}_{v_3} \text{Ric}_{v_1 v_5})) u \quad (\#65) \\
& -\frac{1}{20} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_2} (\widehat{\nabla}_{v_5} \text{Ric}_{v_1 v_3})) u \quad (\#66) \\
& -\frac{1}{10} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_3} (\widehat{\nabla}_{v_2} \text{Ric}_{v_1 v_5})) u \quad (\#67) \\
& -\frac{1}{20} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_5} (\widehat{\nabla}_{v_2} \text{Ric}_{v_1 v_3})) u \quad (\#68) \\
& -\frac{1}{20} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_3} (\widehat{\nabla}_{v_5} \text{Ric}_{v_1 v_2})) u \quad (\#69) \\
& -\frac{1}{20} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_5} (\widehat{\nabla}_{v_3} \text{Ric}_{v_1 v_2})) u \quad (\#70) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} g^{v_6 v_7} (\widehat{\nabla}_{v_6} R_{v_2 v_5 v_3 v_7}) (\nabla_{v_1} u) \quad (\#71) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} g^{v_6 v_7} (\widehat{\nabla}_{v_6} R_{v_3 v_5 v_2 v_7}) (\nabla_{v_1} u) \quad (\#72) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} g^{v_6 v_7} (\widehat{\nabla}_{v_6} R_{v_1 v_5 v_3 v_7}) (\nabla_{v_2} u) \quad (\#73) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} g^{v_6 v_7} (\widehat{\nabla}_{v_6} R_{v_3 v_5 v_1 v_7}) (\nabla_{v_2} u) \quad (\#74) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} g^{v_6 v_7} (\widehat{\nabla}_{v_6} R_{v_1 v_5 v_2 v_7}) (\nabla_{v_3} u) \quad (\#75) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} g^{v_6 v_7} (\widehat{\nabla}_{v_6} R_{v_2 v_5 v_1 v_7}) (\nabla_{v_3} u) \quad (\#76) \\
& -\frac{1}{3} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_2} \text{Ric}_{v_3 v_5}) (\nabla_{v_1} u) \quad (\#77) \\
& -\frac{1}{3} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_3} \text{Ric}_{v_2 v_5}) (\nabla_{v_1} u) \quad (\#78) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_5} \text{Ric}_{v_2 v_3}) (\nabla_{v_1} u) \quad (\#79) \\
& -\frac{1}{3} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_1} \text{Ric}_{v_3 v_5}) (\nabla_{v_2} u) \quad (\#80) \\
& -\frac{1}{3} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_3} \text{Ric}_{v_1 v_5}) (\nabla_{v_2} u) \quad (\#81) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_5} \text{Ric}_{v_1 v_3}) (\nabla_{v_2} u) \quad (\#82) \\
& -\frac{1}{3} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_1} \text{Ric}_{v_2 v_5}) (\nabla_{v_3} u) \quad (\#83) \\
& -\frac{1}{3} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_2} \text{Ric}_{v_1 v_5}) (\nabla_{v_3} u) \quad (\#84) \\
& -\frac{1}{6} T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} (\widehat{\nabla}_{v_5} \text{Ric}_{v_1 v_2}) (\nabla_{v_3} u) \quad (\#85) \\
& -\frac{1}{3} 2 T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} \text{Ric}_{v_3 v_5} (\nabla_{v_1} (\nabla_{v_2} u)) \quad (\#86) \\
& -\frac{1}{3} 2 T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} \text{Ric}_{v_2 v_5} (\nabla_{v_1} (\nabla_{v_3} u)) \quad (\#87) \\
& -\frac{1}{3} 2 T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} g^{v_4 v_5} \text{Ric}_{v_1 v_5} (\nabla_{v_2} (\nabla_{v_3} u)) \quad (\#88) \\
& + T_{v_4}^{v_1 v_2 v_3} (\nabla_{v_1} (\nabla_{v_2} (\nabla_{v_3} N^{v_4}))) \quad (\#89)
\end{aligned}$$

2.3 Substitutions for Christoffel symbols

$$T_{\nu_1}^{\nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_1} \rightarrow 0$$

$$T_{\nu_2}^{\nu_1 \nu_3 \nu_4} (\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_2}) \rightarrow \frac{1}{6} T_{\nu_2}^{\nu_1 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_2 \nu_5} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_4 \nu_5} \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{6} T_{\nu_2}^{\nu_1 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_2 \nu_5} R_{\nu_4 \nu_3 \nu_1 \nu_5} \quad (\#2)$$

$$+ \frac{1}{6} T_{\nu_2}^{\nu_1 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_2 \nu_5} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_3 \nu_5} \quad (\#3)$$

$$+ \frac{1}{6} T_{\nu_2}^{\nu_1 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_2 \nu_5} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_1 \nu_5} \quad (\#4)$$

$$- \frac{1}{6} T_{\nu_2}^{\nu_1 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_2 \nu_5} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_5 \nu_4} \quad (\#5)$$

$$- \frac{1}{6} T_{\nu_2}^{\nu_1 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_2 \nu_5} R_{\nu_5 \nu_3 \nu_1 \nu_4} \quad (\#6)$$

$$T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} \Gamma_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_3})) \rightarrow \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_5 \nu_6}) \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_5 \nu_4 \nu_2 \nu_6}) \quad (\#2)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_5 \nu_6}) \quad (\#3)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_2 \nu_6}) \quad (\#4)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_5 \nu_4 \nu_1 \nu_6}) \quad (\#5)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_1 \nu_6}) \quad (\#6)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_4 \nu_6}) \quad (\#7)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_2 \nu_6}) \quad (\#8)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_4 \nu_6}) \quad (\#9)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_2 \nu_6}) \quad (\#10)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_4 \nu_5 \nu_1 \nu_6}) \quad (\#11)$$

$$+ \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_1 \nu_6}) \quad (\#12)$$

$$- \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_6 \nu_5}) \quad (\#13)$$

$$- \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_6 \nu_4 \nu_2 \nu_5}) \quad (\#14)$$

$$- \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_6 \nu_5}) \quad (\#15)$$

$$- \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_2 \nu_5}) \quad (\#16)$$

$$- \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_6 \nu_4 \nu_1 \nu_5}) \quad (\#17)$$

$$- \frac{1}{12} T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} g^{\nu_3 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_1 \nu_5}) \quad (\#18)$$

$$T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} (\partial_{\nu_3} \Gamma_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_4}))) \rightarrow \frac{1}{45} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_4 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_2 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_6 \nu_9} \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{45} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_4 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_2 \nu_8} R_{\nu_6 \nu_7 \nu_3 \nu_9} \quad (\#2)$$

$$+ \frac{1}{45} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_4 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_3 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_7 \nu_6 \nu_9} \quad (\#3)$$

$$- \frac{1}{30} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_4 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_6 \nu_8} R_{\nu_2 \nu_7 \nu_3 \nu_9} \quad (\#4)$$

$$+ \frac{1}{45} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_4 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_3 \nu_8} R_{\nu_6 \nu_7 \nu_2 \nu_9} \quad (\#5)$$

$$- \frac{1}{30} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_4 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_5 \nu_6 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_2 \nu_9} \quad (\#6)$$

$$+ \frac{1}{45} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_4 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_2 \nu_5 \nu_1 \nu_8} R_{\nu_3 \nu_7 \nu_6 \nu_9} \quad (\#7)$$

$$+ \frac{1}{18} T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_6} g^{\nu_4 \nu_7} g^{\nu_8 \nu_9} R_{\nu_1 \nu_7 \nu_3 \nu_8} R_{\nu_9 \nu_5 \nu_2 \nu_6} \quad (\#82)$$

$$-\frac{1}{40}T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_5\nu_6}g^{\nu_4\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}R_{\nu_2\nu_5\nu_1\nu_6})) \quad (\#156)$$

3 Riemann covariant derivatives (produced by the computer)

3.1 Gauge derivatives of u to Christoffel symbols

$$u \rightarrow u \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1}(\nabla_{\nu_1} u) \rightarrow T^{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} u) \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2} u)) \rightarrow T^{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_3} u) \quad (\#1)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} u)) \quad (\#2)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_3} u))) \rightarrow T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u) \quad (\#1)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u) \quad (\#2)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_3} u)) \quad (\#3)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#4)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#5)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_3} u))) \quad (\#6)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_3}(\nabla_{\nu_4} u)))) \rightarrow -T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_5 \nu_4}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_2 \nu_6}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_7} u) \quad (\#1)$$

$$- T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_4}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_3 \nu_5}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_2 \nu_6}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_7} u) \quad (\#2)$$

$$- T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_7} u) \quad (\#3)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_5 \nu_7}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#4)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_7}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_5 \nu_4}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#5)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_4}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_7}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_3 \nu_5}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#6)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_6}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_7}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#7)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_6}^{\nu_5}(\partial_{\nu_2} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_6})(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#8)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_6}^{\nu_5}(\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_6})(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#9)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_5}(\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_5}^{\nu_6})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#10)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\partial_{\nu_1}(\partial_{\nu_2} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_5}))(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#11)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_4}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u)) \quad (\#12)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#13)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#14)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_6}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#15)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_6}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u)) \quad (\#16)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_6}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u)) \quad (\#17)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_6}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u)) \quad (\#18)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#19)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_4}^{\nu_5}) (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} u)) \quad (\#20)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\partial_{\nu_2} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_5}) (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} u)) \quad (\#21)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_5}) (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} u)) \quad (\#22)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} u))) \quad (\#23)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} u))) \quad (\#24)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_4}^{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} u))) \quad (\#25)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} u))) \quad (\#26)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_4}^{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} u))) \quad (\#27)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_5} u))) \quad (\#28)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)))) \quad (\#29)$$

3.2 Gauge derivatives of u to normal coordinates

$$u \rightarrow u \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1}(\nabla_{\nu_1} u) \rightarrow T^{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} u) \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2} u)) \rightarrow T^{\nu_1 \nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} u)) \quad (\#1)$$

$$\begin{aligned} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_3} u))) &\rightarrow \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} R_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#1) \\ &+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} R_{\nu_3 \nu_2 \nu_1 \nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#2) \\ &+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_2 \nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#3) \\ &+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_1 \nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#4) \\ &- \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} R_{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#5) \\ &- \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} R_{\nu_4 \nu_2 \nu_1 \nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} u) \quad (\#6) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_3} u))) \quad (\#7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_3}(\nabla_{\nu_4} u)))) &\rightarrow \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#1) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_4 \nu_3 \nu_2 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#2) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_4 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#3) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_2 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#4) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_4 \nu_3 \nu_1 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#5) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_1 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#6) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_3 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#7) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_2 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#8) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_3 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#9) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_2 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#10) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_1 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#11) \\ &+ \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_3} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_1 \nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#12) \\ &- \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#13) \\ &- \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_5 \nu_3 \nu_2 \nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#14) \\ &- \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_5 \nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#15) \\ &- \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_2 \nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#16) \\ &- \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} R_{\nu_5 \nu_3 \nu_1 \nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#17) \\ &- \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_1 \nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_6} u) \quad (\#18) \\ &+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#19) \\ &+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_2 \nu_1 \nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#20) \\ &+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_2 \nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#21) \\ &+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_1 \nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_2 \nu_5 \nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#23) \\
& -\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_5 \nu_2 \nu_1 \nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)) \quad (\#24) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_2 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#25) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_4 \nu_2 \nu_1 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#26) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_2 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#27) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_1 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#28) \\
& -\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_2 \nu_5 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#29) \\
& -\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_5 \nu_2 \nu_1 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#30) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#31) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_4 \nu_3 \nu_2 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#32) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_3 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#33) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_2 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#34) \\
& -\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#35) \\
& -\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_5 \nu_3 \nu_2 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#36) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#37) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_4 \nu_3 \nu_1 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#38) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_3 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#39) \\
& +\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_1 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#40) \\
& -\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_5 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#41) \\
& -\frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_5 \nu_3 \nu_1 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} u)) \quad (\#42) \\
& + T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)))) \quad (\#43)
\end{aligned}$$

3.3 Gauge derivatives of q to Christoffel symbols

$$q \rightarrow q \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1} (\nabla_{\nu_1} q) \rightarrow T^{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} q) \quad (\#1)$$

$$\begin{aligned}
T^{\nu_1 \nu_2} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} q)) & \rightarrow T^{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} q) \quad (\#1) \\
& + T^{\nu_1 \nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} q)) \quad (\#2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} q))) & \rightarrow T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_5}^{\nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} q) \quad (\#1) \\
& + T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_4}) (\widehat{\nabla}_{\nu_4} q) \quad (\#2) \\
& + T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} q)) \quad (\#3) \\
& + T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} q)) \quad (\#4) \\
& + T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} q)) \quad (\#5) \\
& + T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} q))) \quad (\#6)
\end{aligned}$$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} (\nabla_{\nu_4} q)))) \rightarrow -T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_5 \nu_4}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_2 \nu_6}^{\nu_7} (\widehat{\nabla}_{\nu_7} q) \quad (\#1)$$

$$\begin{aligned}
& -T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_4}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_3\nu_5}^{\nu_6}\Gamma_{\nu_2\nu_6}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_7}q) \quad (\#2) \\
& -T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_2}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_6}\Gamma_{\nu_5\nu_6}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_7}q) \quad (\#3) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_2}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_5\nu_7}^{\nu_6}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}q) \quad (\#4) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_3}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_7}^{\nu_6}\Gamma_{\nu_5\nu_4}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}q) \quad (\#5) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_4}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_7}^{\nu_6}\Gamma_{\nu_3\nu_5}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}q) \quad (\#6) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_7}^{\nu_6}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_7}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q) \quad (\#7) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_6}^{\nu_5}(\partial_{\nu_2}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_6})(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q) \quad (\#8) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_2\nu_6}^{\nu_5}(\partial_{\nu_1}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_6})(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q) \quad (\#9) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_5}(\partial_{\nu_1}\Gamma_{\nu_2\nu_5}^{\nu_6})(\widehat{\nabla}_{\nu_6}q) \quad (\#10) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\partial_{\nu_1}(\partial_{\nu_2}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_5}))(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q) \quad (\#11) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_4}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_3}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q)) \quad (\#12) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_3}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}q)) \quad (\#13) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_2}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}q)) \quad (\#14) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_3}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_4}q)) \quad (\#15) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q)) \quad (\#16) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q)) \quad (\#17) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_2\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_6}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q)) \quad (\#18) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\partial_{\nu_1}\Gamma_{\nu_2\nu_3}^{\nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_4}q)) \quad (\#19) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\partial_{\nu_1}\Gamma_{\nu_2\nu_4}^{\nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q)) \quad (\#20) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\partial_{\nu_2}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q)) \quad (\#21) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\partial_{\nu_1}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q)) \quad (\#22) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_2}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_4}q))) \quad (\#23) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_3}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_4}q))) \quad (\#24) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_1\nu_4}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q))) \quad (\#25) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_2\nu_3}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_4}q))) \quad (\#26) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_2\nu_4}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q))) \quad (\#27) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\Gamma_{\nu_3\nu_4}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q))) \quad (\#28) \\
& +T^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_4}q)))) \quad (\#29)
\end{aligned}$$

3.4 Gauge derivatives of q to normal coordinates

$$q \rightarrow q \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1}(\nabla_{\nu_1}q) \rightarrow T^{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}q) \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1\nu_2}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}q)) \rightarrow T^{\nu_1\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}q)) \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_3}q))) \rightarrow \frac{1}{6}T^{\nu_1\nu_2\nu_3}g^{\nu_4\nu_5}R_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}q) \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} R_{\nu_3 \nu_2 \nu_1 \nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5} q) \quad (\#2)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} (\nabla_{\nu_4} q)))) \rightarrow \frac{1}{12} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5}) (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q) \quad (\#1)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_4 \nu_3 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#33)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_2 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#34)$$

$$- \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_2 \nu_3 \nu_5 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#35)$$

$$- \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_5 \nu_3 \nu_2 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#36)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_4 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#37)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_4 \nu_3 \nu_1 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#38)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_4 \nu_3 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#39)$$

$$+ \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_3 \nu_4 \nu_1 \nu_5} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#40)$$

$$- \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_1 \nu_3 \nu_5 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#41)$$

$$- \frac{1}{6} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} R_{\nu_5 \nu_3 \nu_1 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} q)) \quad (\#42)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} q)))) \quad (\#43)$$

3.5 Gauge derivatives of N^μ to Christoffel symbols

$$T_{\nu_1} N^{\nu_1} \rightarrow T_{\nu_1} N^{\nu_1} \quad (\#1)$$

$$T_{\nu_2}^{\nu_1} (\nabla_{\nu_1} N^{\nu_2}) \rightarrow -T_{\nu_2}^{\nu_1} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_2} N^{\nu_3} \quad (\#1)$$

$$+ T_{\nu_2}^{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} N^{\nu_2}) \quad (\#2)$$

$$T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} N^{\nu_3})) \rightarrow T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{\nu_1 \nu_5}^{\nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_4}^{\nu_3} N^{\nu_5} \quad (\#1)$$

$$- T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} (\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_4}^{\nu_3}) N^{\nu_4} \quad (\#2)$$

$$+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_4} (\widehat{\nabla}_{\nu_4} N^{\nu_3}) \quad (\#3)$$

$$- T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{\nu_1 \nu_4}^{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} N^{\nu_4}) \quad (\#4)$$

$$- T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} \Gamma_{\nu_2 \nu_4}^{\nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} N^{\nu_4}) \quad (\#5)$$

$$+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} N^{\nu_3})) \quad (\#6)$$

$$T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} N^{\nu_4}))) \rightarrow T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_5}^{\nu_4} \Gamma_{\nu_3 \nu_6}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_7}^{\nu_6} N^{\nu_7} \quad (\#1)$$

$$- T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_7}^{\nu_6} N^{\nu_7} \quad (\#2)$$

$$- T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_3 \nu_6}^{\nu_4} \Gamma_{\nu_5 \nu_7}^{\nu_6} N^{\nu_7} \quad (\#3)$$

$$+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_5 \nu_7}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_3 \nu_6}^{\nu_4} N^{\nu_7} \quad (\#4)$$

$$+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_7}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_4} N^{\nu_7} \quad (\#5)$$

$$- T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_5}^{\nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_7}^{\nu_6} \Gamma_{\nu_3 \nu_6}^{\nu_5} N^{\nu_7} \quad (\#6)$$

$$- T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_6}^{\nu_5} \Gamma_{\nu_2 \nu_5}^{\nu_7} \Gamma_{\nu_3 \nu_7}^{\nu_4} N^{\nu_6} \quad (\#7)$$

$$+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_6}^{\nu_5} (\partial_{\nu_2} \Gamma_{\nu_3 \nu_5}^{\nu_4}) N^{\nu_6} \quad (\#8)$$

$$+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_2 \nu_6}^{\nu_5} (\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_3 \nu_5}^{\nu_4}) N^{\nu_6} \quad (\#9)$$

$$+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_3 \nu_5}^{\nu_4} (\partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_6}^{\nu_5}) N^{\nu_6} \quad (\#10)$$

$$- T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\partial_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} \Gamma_{\nu_3 \nu_5}^{\nu_4})) N^{\nu_5} \quad (\#11)$$

$$- T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \Gamma_{\nu_1 \nu_5}^{\nu_4} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_6} (\widehat{\nabla}_{\nu_6} N^{\nu_5}) \quad (\#12)$$

$$\begin{aligned}
& -T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_3}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_6}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}N^{\nu_6}) \quad (\#13) \\
& -T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_2}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_3\nu_6}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}N^{\nu_6}) \quad (\#14) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_3}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}N^{\nu_4}) \quad (\#15) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_2\nu_5}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}N^{\nu_6}) \quad (\#16) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_3\nu_5}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}N^{\nu_6}) \quad (\#17) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_2\nu_6}^{\nu_5}\Gamma_{\nu_3\nu_5}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}N^{\nu_6}) \quad (\#18) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\partial_{\nu_1}\Gamma_{\nu_2\nu_3}^{\nu_5})(\widehat{\nabla}_{\nu_5}N^{\nu_4}) \quad (\#19) \\
& -T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\partial_{\nu_1}\Gamma_{\nu_2\nu_5}^{\nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_3}N^{\nu_5}) \quad (\#20) \\
& -T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\partial_{\nu_2}\Gamma_{\nu_3\nu_5}^{\nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_1}N^{\nu_5}) \quad (\#21) \\
& -T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\partial_{\nu_1}\Gamma_{\nu_3\nu_5}^{\nu_4})(\widehat{\nabla}_{\nu_2}N^{\nu_5}) \quad (\#22) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_2}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}N^{\nu_4})) \quad (\#23) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_3}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}N^{\nu_4})) \quad (\#24) \\
& -T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_1\nu_5}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}N^{\nu_5})) \quad (\#25) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_2\nu_3}^{\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_5}N^{\nu_4})) \quad (\#26) \\
& -T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_2\nu_5}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}N^{\nu_5})) \quad (\#27) \\
& -T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}\Gamma_{\nu_3\nu_5}^{\nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}N^{\nu_5})) \quad (\#28) \\
& +T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}N^{\nu_4}))) \quad (\#29)
\end{aligned}$$

3.6 Gauge derivatives of N^μ to normal coordinates

$$T_{\nu_1}N^{\nu_1} \rightarrow T_{\nu_1}N^{\nu_1} \quad (\#1)$$

$$T_{\nu_2}^{\nu_1}(\nabla_{\nu_1}N^{\nu_2}) \rightarrow T_{\nu_2}^{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}N^{\nu_2}) \quad (\#1)$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu_3}^{\nu_1\nu_2}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}N^{\nu_3})) & \rightarrow -\frac{1}{6}T_{\nu_3}^{\nu_1\nu_2}g^{\nu_3\nu_4}R_{\nu_1\nu_2\nu_5\nu_4}N^{\nu_5} \quad (\#1) \\
& -\frac{1}{6}T_{\nu_3}^{\nu_1\nu_2}g^{\nu_3\nu_4}R_{\nu_5\nu_2\nu_1\nu_4}N^{\nu_5} \quad (\#2) \\
& -\frac{1}{6}T_{\nu_3}^{\nu_1\nu_2}g^{\nu_3\nu_4}R_{\nu_1\nu_5\nu_2\nu_4}N^{\nu_5} \quad (\#3) \\
& -\frac{1}{6}T_{\nu_3}^{\nu_1\nu_2}g^{\nu_3\nu_4}R_{\nu_2\nu_5\nu_1\nu_4}N^{\nu_5} \quad (\#4) \\
& +\frac{1}{6}T_{\nu_3}^{\nu_1\nu_2}g^{\nu_3\nu_4}R_{\nu_1\nu_2\nu_4\nu_5}N^{\nu_5} \quad (\#5) \\
& +\frac{1}{6}T_{\nu_3}^{\nu_1\nu_2}g^{\nu_3\nu_4}R_{\nu_4\nu_2\nu_1\nu_5}N^{\nu_5} \quad (\#6) \\
& +T_{\nu_3}^{\nu_1\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}N^{\nu_3})) \quad (\#7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_3}N^{\nu_4}))) & \rightarrow -\frac{1}{12}T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}g^{\nu_4\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}R_{\nu_2\nu_3\nu_6\nu_5})N^{\nu_6} \quad (\#1) \\
& -\frac{1}{12}T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}g^{\nu_4\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}R_{\nu_6\nu_3\nu_2\nu_5})N^{\nu_6} \quad (\#2) \\
& -\frac{1}{12}T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}g^{\nu_4\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}R_{\nu_1\nu_3\nu_6\nu_5})N^{\nu_6} \quad (\#3) \\
& -\frac{1}{12}T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}g^{\nu_4\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_6}R_{\nu_1\nu_3\nu_2\nu_5})N^{\nu_6} \quad (\#4) \\
& -\frac{1}{12}T_{\nu_4}^{\nu_1\nu_2\nu_3}g^{\nu_4\nu_5}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}R_{\nu_6\nu_3\nu_1\nu_5})N^{\nu_6} \quad (\#5)
\end{aligned}$$

$$+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\widehat{\nabla}_{\nu_1} (\widehat{\nabla}_{\nu_2} (\widehat{\nabla}_{\nu_3} N^{\nu_4}))) \quad (\#43)$$

4 Noncommutative Torus (produced by the computer)

4.1 Substitutions for $H^{\mu\nu}$

$$T_{\nu_1 \nu_2} H^{\nu_1 \nu_2} \rightarrow T_{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_1 \nu_2} k k \quad (\#1)$$

$$\begin{aligned} T_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_1} (\nabla_{\nu_1} H^{\nu_2 \nu_3}) &\rightarrow T_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3} (\delta_{\nu_1} k) k \quad (\#1) \\ &+ T_{\nu_2 \nu_3}^{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3} k (\delta_{\nu_1} k) \quad (\#2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} H^{\nu_3 \nu_4})) &\rightarrow T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_2} k) (\delta_{\nu_1} k) \quad (\#1) \\ &+ T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_1} k) (\delta_{\nu_2} k) \quad (\#2) \\ &+ T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) k \quad (\#3) \\ &+ T_{\nu_3 \nu_4}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} k (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} H^{\nu_4 \nu_5}))) &\rightarrow T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k) (\delta_{\nu_1} k) \quad (\#1) \\ &+ T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) (\delta_{\nu_2} k) \quad (\#2) \\ &+ T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_3} k) (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#3) \\ &+ T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) (\delta_{\nu_3} k) \quad (\#4) \\ &+ T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_2} k) (\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) \quad (\#5) \\ &+ T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_1} k) (\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k) \quad (\#6) \\ &+ T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k) k \quad (\#7) \\ &+ T_{\nu_4 \nu_5}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} k (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k) \quad (\#8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} (\nabla_{\nu_4} H^{\nu_5 \nu_6})))) &\rightarrow T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_3 \nu_4}^2 k) (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#1) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_2 \nu_4}^2 k) (\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) \quad (\#2) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_1 \nu_4}^2 k) (\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k) \quad (\#3) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k) (\delta_{\nu_1 \nu_4}^2 k) \quad (\#4) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) (\delta_{\nu_2 \nu_4}^2 k) \quad (\#5) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) (\delta_{\nu_3 \nu_4}^2 k) \quad (\#6) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_2 \nu_3 \nu_4}^3 k) (\delta_{\nu_1} k) \quad (\#7) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_1 \nu_3 \nu_4}^3 k) (\delta_{\nu_2} k) \quad (\#8) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_4}^3 k) (\delta_{\nu_3} k) \quad (\#9) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_4} k) (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k) \quad (\#10) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k) (\delta_{\nu_4} k) \quad (\#11) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_3} k) (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_4}^3 k) \quad (\#12) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_2} k) (\delta_{\nu_1 \nu_3 \nu_4}^3 k) \quad (\#13) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_1} k) (\delta_{\nu_2 \nu_3 \nu_4}^3 k) \quad (\#14) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^4 k) k \quad (\#15) \\ &+ T_{\nu_5 \nu_6}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\nu_5 \nu_6} k (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^4 k) \quad (\#16) \end{aligned}$$

4.2 Substitutions for u

$$u \rightarrow kk \quad (\#1)$$

$$\begin{aligned} T^{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_1} u) &\rightarrow T^{\nu_1}(\delta_{\nu_1} k)k \quad (\#1) \\ &+ T^{\nu_1} k(\delta_{\nu_1} k) \quad (\#2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{\nu_1 \nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2} u)) &\rightarrow T^{\nu_1 \nu_2}(\delta_{\nu_2} k)(\delta_{\nu_1} k) \quad (\#1) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2}(\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2} k) \quad (\#2) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2}(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k)k \quad (\#3) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2} k(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_3} u))) &\rightarrow T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k)(\delta_{\nu_1} k) \quad (\#1) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k)(\delta_{\nu_2} k) \quad (\#2) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_3} k)(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#3) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k)(\delta_{\nu_3} k) \quad (\#4) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_2} k)(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) \quad (\#5) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k) \quad (\#6) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k)k \quad (\#7) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} k(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k) \quad (\#8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\widehat{\nabla}_{\nu_1}(\widehat{\nabla}_{\nu_2}(\widehat{\nabla}_{\nu_3}(\widehat{\nabla}_{\nu_4} u)))) &\rightarrow T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_3 \nu_4}^2 k)(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#1) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_2 \nu_4}^2 k)(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) \quad (\#2) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_4}^2 k)(\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k) \quad (\#3) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k)(\delta_{\nu_1 \nu_4}^2 k) \quad (\#4) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k)(\delta_{\nu_2 \nu_4}^2 k) \quad (\#5) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k)(\delta_{\nu_3 \nu_4}^2 k) \quad (\#6) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_2 \nu_3 \nu_4}^3 k)(\delta_{\nu_1} k) \quad (\#7) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_3 \nu_4}^3 k)(\delta_{\nu_2} k) \quad (\#8) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_4}^3 k)(\delta_{\nu_3} k) \quad (\#9) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_4} k)(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k) \quad (\#10) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k)(\delta_{\nu_4} k) \quad (\#11) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_3} k)(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_4}^3 k) \quad (\#12) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_2} k)(\delta_{\nu_1 \nu_3 \nu_4}^3 k) \quad (\#13) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2 \nu_3 \nu_4}^3 k) \quad (\#14) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^4 k)k \quad (\#15) \\ &+ T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} k(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^4 k) \quad (\#16) \end{aligned}$$

4.3 Substitutions for L^μ (P_1 like operator)

$$T_{\nu_1} L^{\nu_1} \rightarrow 2 T_{\nu_1} g^{\nu_1 \nu_2} k(\delta_{\nu_2} k) \quad (\#1)$$

$$T_{\nu_2}^{\nu_1} (\nabla_{\nu_1} L^{\nu_2}) \rightarrow 2 T_{\nu_2}^{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3} (\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_3} k) \quad (\#1)$$

$$+ 2 T_{\nu_2}^{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3} k(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) \quad (\#2)$$

$$T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} L^{\nu_3})) \rightarrow 2 T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k)(\delta_{\nu_4} k) \quad (\#1)$$

$$+ 2 T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_2} k)(\delta_{\nu_1 \nu_4}^2 k) \quad (\#2)$$

$$+ 2 T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2 \nu_4}^2 k) \quad (\#3)$$

$$+ 2 T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} k(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_4}^3 k) \quad (\#4)$$

$$T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} (\nabla_{\nu_3} L^{\nu_4}))) \rightarrow 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k)(\delta_{\nu_1 \nu_5}^2 k) \quad (\#1)$$

$$+ 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k)(\delta_{\nu_2 \nu_5}^2 k) \quad (\#2)$$

$$+ 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k)(\delta_{\nu_3 \nu_5}^2 k) \quad (\#3)$$

$$+ 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k)(\delta_{\nu_5} k) \quad (\#4)$$

$$+ 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_3} k)(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_5}^3 k) \quad (\#5)$$

$$+ 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_2} k)(\delta_{\nu_1 \nu_3 \nu_5}^3 k) \quad (\#6)$$

$$+ 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} (\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2 \nu_3 \nu_5}^3 k) \quad (\#7)$$

$$+ 2 T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} g^{\nu_4 \nu_5} k(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5}^4 k) \quad (\#8)$$

4.4 Substitutions for q (P_1 like operator)

$$q \rightarrow g^{\nu_1 \nu_2} k(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#1)$$

$$T^{\nu_1} (\nabla_{\nu_1} q) \rightarrow T^{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3} (\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k) \quad (\#1)$$

$$+ T^{\nu_1} g^{\nu_2 \nu_3} k(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k) \quad (\#2)$$

$$T^{\nu_1 \nu_2} (\nabla_{\nu_1} (\nabla_{\nu_2} q)) \rightarrow T^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k)(\delta_{\nu_3 \nu_4}^2 k) \quad (\#1)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_2} k)(\delta_{\nu_1 \nu_3 \nu_4}^3 k) \quad (\#2)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} (\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2 \nu_3 \nu_4}^3 k) \quad (\#3)$$

$$+ T^{\nu_1 \nu_2} g^{\nu_3 \nu_4} k(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^4 k) \quad (\#4)$$

4.5 Substitutions for L^μ (P_2 like operator)

$$T_{\nu_1} L^{\nu_1} \rightarrow T_{\nu_1} h^{\nu_1 \nu_2} k(\delta_{\nu_2} k) \quad (\#1)$$

$$+ T_{\nu_1} h^{\nu_1 \nu_2} (\delta_{\nu_2} k) k \quad (\#2)$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu_2}^{\nu_1}(\nabla_{\nu_1} L^{\nu_2}) &\rightarrow T_{\nu_2}^{\nu_1} h^{\nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_3} k) \quad (\#1) \\
&+ T_{\nu_2}^{\nu_1} h^{\nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_3} k)(\delta_{\nu_1} k) \quad (\#2) \\
&+ T_{\nu_2}^{\nu_1} h^{\nu_2 \nu_3} k(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) \quad (\#3) \\
&+ T_{\nu_2}^{\nu_1} h^{\nu_2 \nu_3}(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) k \quad (\#4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2} L^{\nu_3})) &\rightarrow T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} h^{\nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k)(\delta_{\nu_4} k) \quad (\#1) \\
&+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} h^{\nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_2} k)(\delta_{\nu_1 \nu_4}^2 k) \quad (\#2) \\
&+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} h^{\nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2 \nu_4}^2 k) \quad (\#3) \\
&+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} h^{\nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_2 \nu_4}^2 k)(\delta_{\nu_1} k) \quad (\#4) \\
&+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} h^{\nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_4}^2 k)(\delta_{\nu_2} k) \quad (\#5) \\
&+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} h^{\nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_4} k)(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#6) \\
&+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} h^{\nu_3 \nu_4} k(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_4}^3 k) \quad (\#7) \\
&+ T_{\nu_3}^{\nu_1 \nu_2} h^{\nu_3 \nu_4}(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_4}^3 k) k \quad (\#8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\nabla_{\nu_1}(\nabla_{\nu_2}(\nabla_{\nu_3} L^{\nu_4}))) &\rightarrow T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k)(\delta_{\nu_1 \nu_5}^2 k) \quad (\#1) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k)(\delta_{\nu_2 \nu_5}^2 k) \quad (\#2) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k)(\delta_{\nu_3 \nu_5}^2 k) \quad (\#3) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_3 \nu_5}^2 k)(\delta_{\nu_1 \nu_2}^2 k) \quad (\#4) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_2 \nu_5}^2 k)(\delta_{\nu_1 \nu_3}^2 k) \quad (\#5) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_1 \nu_5}^2 k)(\delta_{\nu_2 \nu_3}^2 k) \quad (\#6) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k)(\delta_{\nu_5} k) \quad (\#7) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_3} k)(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_5}^3 k) \quad (\#8) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_2} k)(\delta_{\nu_1 \nu_3 \nu_5}^3 k) \quad (\#9) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_1} k)(\delta_{\nu_2 \nu_3 \nu_5}^3 k) \quad (\#10) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_2 \nu_3 \nu_5}^3 k)(\delta_{\nu_1} k) \quad (\#11) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_1 \nu_3 \nu_5}^3 k)(\delta_{\nu_2} k) \quad (\#12) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_5}^3 k)(\delta_{\nu_3} k) \quad (\#13) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_5} k)(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^3 k) \quad (\#14) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5} k(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5}^4 k) \quad (\#15) \\
&+ T_{\nu_4}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3} h^{\nu_4 \nu_5}(\delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_5}^4 k) k \quad (\#16)
\end{aligned}$$