UNIVERSITÉ DES COMORES

FACULTÉ DES SCIENCE ET TECHNIQUES

L3 de Mathematique (année 2017-2018)

Topologie 2 TD1

I) généralités sur les topologies

Exercice N° I-1 :

1) On considere l'ensemble IR des réels :
Déterminer les points d'acumulation de l'ensemble A dans chacun des cas suivants

- **a)** $A = IR$ (ensemble de nombres réels)
- **b)** A est l'intervalle d'extremité $a, et\ b$ semi ouvert en $a(ave \quad a \leq b$;
- **c)** $A = [3, 12[\cup \{45\}$
- **d)** $A = IN$

2) On rappelle qu'un ensemble est fermé ssi son conmplémentaire est ouvert

- **a)** Montrer que l'union d'un nombre fini de fermés est fermé ;
- **b)** Montrer que l'intersection de toute famille de fermés est fermé ;
- **c)** Soit $A \subset IR^2$;
  Montrer que (A est fermé)$\Leftrightarrow$ (A contient tous ses points d'accumilation)

Exercice N° I-2 :

1) On rappelle $(E, T_1)\ et\ (F, T_2)$ étant deux espaces topologiques,
$f : E \to F$ est continue ssi $\forall A \in T_2, f^{-1}(A) \in T_1$

- **a)** $T_1\ et\ T_2$ sont deux topologies sur E ;
  On considere l application identité $Id_E : (E, T_1) \to (E, T_2)$
  - **(i)** Montrer que si $T_2 \subset T_1$, alors Id_E est continue
  - **(ii))** Montrer que si Id_E est continue , alors $T_2 \subset T_1$
- **b)** On considère une famille T de sous-ensembles de E tels que :
  $A \in T$ si et seulement si $A = \oslash$ ou le complémentaire de A est de cardinal fini
  - **(i)** Montrer que T est une topologie sur E ;
  - **(ii)** Caractériser les fermés de T

2) Soit (E, T) un espace topologique

- **a)** Donner la définition du voisinage de $x \in E$
- **b)** Montrer que $A \subset E(A \neq \oslash)$ est ouvert ssi A est voisinage de chacun de ses points
- **c)** Soit $x \in E$. On note U_x l ensemble des voisinage de x.
  - **(i)** Montrer que $\forall u \in U_x, \Rightarrow u \neq \oslash$;
  - **(ii)** Montrer que si $u \in U_x$, alors $\forall v \subset E, u \subset v \Rightarrow v \in U_x$;
  - **(iii)** Soient $u_1, u_2 \in U_x$. Montrer que $u_1 \cap u_2\ et\ u_1 \cup u_2 \in U_x$

Exercice N° I-3 :

On considere un ensemble E

Pour tout $x \in E$ on defininit une famille V_x non vide de parties de E telle que :

- **(i)** Pour tout $u \in V_x$, on a , $x \in u$;
- **(ii)** Si $u \in V_x, et\ u \subset v, alors\ v \in V_x$;
- **(iii)** Si $u \in V_x\ et\ w \in V_x\ alors\ u \cap w \in V_x$
- **(iv)** pour tout $u \in V_x, \exists v \in V_x (avec\ v \neq \oslash), tq, u \in V_y, \forall y \in v$
- **1)** Montrer qu on peut definir une topologie sur E à partir de ces familles V_x(on definira les ouverts de cette topologie)
- **2)** Montrer que pour cette topologie, $\forall x \in E, V_x$ est une famille de voisinages de x ;
- **3)** Pouvez-vous déterminer les fermés de cette topologie ?

Exercice N° I-4 :

$X\ et\ Y$ sont deux espaces topologiques et $f; E \to F$;

- **1)** On admet que :
  - **(i)** f est continue au point $x_0 \in E \Leftrightarrow \quad \forall\ v$ voisinage de $f(x_0), \exists w$ voisinage de $x_0, tq\ f(w) \subset v$;
  - **(ii)** f est continue sur E ssi elle est continue en tout point de $x \in E$;
  - **a)** Montrer que f est continue au point $x_0 \in E \Leftrightarrow \quad \forall\ v$ voisinage de $f(x_0), f^{-1}(v)$ est un voisinage de x_0 ;
  - **b)** Montrer que f est continue sur E ssi $\forall O$ ouvert de $F, f^{-1}(O)$ est ouvert de E
- **2)** Montrer que f est continue sur E ssi $\forall O$ ouvert de $F, f^{-1}(O)$ est ouvert de E ;
- **3)** Soit $G \subset F$. On suppose que $f(E) \subset G$

  Soit $g : E \to G, tq\ \forall x \in E, g(x) = f(x)$;

  Montrer que f est continue ssi g est continue

Exercice N° I-5 :

On considère l'ensemble IR des réels ;

- **1)** On co,sodère l'application :

  $f : IR \to IR, tq,\ f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
  - **a)** L'application f est-elle continue ?
  - **b)** Déterminer $f(IR)$;
  - **c)** Peut-on dire que $f(IR)$ Est un ouvert ? est-il fermé ?
- **2)** $f : IR \to IR$ est une application quelconque qui est continue ;
  - **a)** Peut-on dire que $f(IR)$ est un fermé ?
  - **b)** Peut-on dire que $f(IR)$ est un intervalle ?

Exercice N° I-6 On considère une application $f : IR^n \to IR^n$ avec la topologie définie par les boule ouverte de IR^n ;

- **1)** On suppose que f est telle que $f(x) = x$
  - **a)** Soit $a \in IR^n$. Montrer que f est continue en a ;
  - **b)** Vérifier si f est continue sur IR^n
- **2)** On suppose que f est une application quelconque définie sur IR^n ;
  - **(i)** Soit $A \subset IR^n, et, a \in \overline{A}$;

    Montrer que : f continue en $a \Rightarrow f(a) \in \overline{f(A)}$;
  - **(ii)** Soit $(x_k)_k \subset IR^n$ une suite qui converge vers $x \in IR^n$;

    Montrer que si f continue en x , alors $(f(x_k)_k$ converge vers $f(x)$

II) Espace métrique

Exercice N° II-1

On considere une suite $(x_n)_n$ dans un espace metique E et on note $\mathcal{A}$ l ensemble des points d accumilation de $(x_n)_n$:

1) Pour tout $k \in IN$, on pose $V_k = \{x_n, n \succ k\}$;
  a) Soit $k \in IN, r \in IR^+$ *et* $x \in E$. Montrer que si $B(x,r) \cap V_k = \oslash$, alors $\exists \alpha \in IR^+, tq, B(x,\alpha) \cap \{x_n, n \in IN\} = \oslash$;
  b) Montrer que $x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \overline{V_n}\ \forall n \in IN$;
  c) Deduire que $\mathcal{A} \subset \bigcap_{n\in IN}(\overline{V_n})$
2) Soit $x \in \bigcap_{n\in IN}(\overline{V_n}$;
  a) Verifier que $\forall U$ voisinage de $x, U \cap V_n \neq \oslash, \forall n \in IN$,
  b) Déduire que $\mathcal{A} = \bigcap_{n\in IN}(\overline{V_n})$
3) Soit $F \subset E$: Montrer qu'il ya équivalence entre les propriétés suivantes :
  (i) F est fermé ;
  (ii) $\forall (x_n)_n$ *suite* $\subset F$ *et* $\forall\ x \in E$, si $(x_n)_n$ converge vers x, *alors* $x \in E$;

Exercice N° II-2

E *et* F sont deux espace métriques et $f : E \to F$;
On rappelle que f est continue en $x_0 \in E \Leftrightarrow \forall, \epsilon \succ 0, \exists \alpha \succ 0, tq$:
$(d(x_0,x)) \prec \alpha) \Rightarrow (d(f(x), f(x_0)) \prec \epsilon)$

1) Montrer qu'on a équivalence entre les propriétés suivantes :
  (i) f est continue en $x_0 \in E$;
  (ii) $\forall, \epsilon \succ 0, \exists \alpha \succ 0, tq, x \in B(x_0,\alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\epsilon)$;
  (iii) $\forall, \epsilon \succ 0, \exists \alpha \succ 0, tq, B(x_0,\alpha) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon))$;
  (iv) $\forall\ V$ voisinage de $f(x_0), f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0
2) Montrer que f est continue au point $x \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de E ;
si $lim x_n = x; alors, lim f(x_n) = f(x)$

Exercice N° II-3

Dans l'espace métrique compact E, on considere une suite $(x_n)_n$ et la famille $(V_i)_i$ définie dans l'exercice N°1 ;
On pose $F_n = \overline{V_n} \forall n \in IN$;
On rappelle que ($x \in E$ et une valeur d'adherence de la suite $(x_n)_n) \Leftrightarrow$ (x est la limite d'une sous-suite de $(x_n)_n$)

1) Montrer que la famille $(F_n)_n$ est décroissante ;
2) Montrer que $F_n \neq \oslash, \forall n$ *et que* $\bigcap_n (F_n) \neq \oslash$;
3) Déduire que dans un espace métrique compact, toute suite $(x_n)_n$ admet sous-suite convergeante

Exercice N° II-4 : Quelques propriétés des compacts

1) Soit un espace metrique $E\ et\ K \subset E$;
On veut montrer que $K, compact, \Rightarrow K$ fermé ; Soit $x \in K^c$
a) Montrer que $\forall y \in K$, on peut trouver un ouvert$O_{x,y}$ contenant x et un ouvert O_y contenant y qui sont disjoints ;
b) en utilisant le fait que $(O_y)_{y \in K}$ forme un recouvrement de K , montrer que $\exists O$ ouvert tq $x \in O\ et\ O \cap K = \oslash$;
c) Déduire que K^c est ouvert
2) Montre que si K est compact, alors tout fermé A de K est compact ;
3) Montrer que tout compact de E est borné ;
4 Montrer qu'une union finie de compacts de E est compact ;
5) Montrer qu'une intersection de compacts de E est compact
6) $E\ et\ F$ étant deux espaces metriques et $f : E \to F$;
Montrer que si K est un compact de E alors $f(K)$ est un compact de F

Exercice N° II-5

Soit $f : (E, D), \to (IR, |.|), et\ K \subset E$;
1) Montrer que si K est compacte , alors $f(K)$ est borné ;
2) On veut montrer le theoreme fondamental :
a) Montrer que $\exists \alpha \succ 0, tq, \forall \epsilon \succ 0, \exists x \in K\ verifiant, \alpha - \epsilon \prec f(x) \leq \alpha$;
b) En remplaçant $\epsilon\ par\ \frac{1}{n}, n \in IN^*$, montrer qu'on obtient ainsi une suite $(x_n)_n, tq\ lim(f(x_n)) = \alpha$;
c) Montrer que $\exists x \in K, tq, f(x) = \alpha$

Exercice N° II-6

Soit E un espace métrique. On veut montrer quie si E est compact , alors il est complet ;
1) Montrer que si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors elle est convergente ;
2) Déduire que tout espace métrique compact est complet

Exercice N° II-7 : (espace complet) ;

1) Montrer que tout sous-ensemble fermé d'un espace complet est complet ;
2) Soit E un espace métrique complet ;
On rappelle que $\forall A \subset E$, le diametre de A est le réel $\delta(A) = Sup(x, y), x, y \in A$;
On considere une famille $(F_n)_n$ de fermés de E ; Montrer que si $lim_n \delta(F_n) = 0$, alors il existe $x \in E(unique), tq\ (\bigcap F_n) = \{x\}$;
3) Montrer que tout espace métrique compact est complet ;
4) Théorème du point fixe :
a) Donner la définition d'une application contractante (d'un espace métrique E vers un espace métrique F)
b) Montrer que (f càntractante)$\Rightarrow$ f continue
c) Montrer que (f càntractante)$\Rightarrow$ $\exists x(unique), tq\ f(x) = x$;
d) f étant une application de l'espace métroque complet $E\ dans\ E$, Montrer que si f^n est contractante , alors f admet un point fixe (unique) dans E

Exercice N° II-8 : (espace métrique connexe) ; Soit E un espace métrique ; On rappelle que E est connexe , s'il vérifie la propriété suivante :
Si $E = U_1 \bigcup U_2$ $avec$ U_1 U_2 deux ouverts disjoints , alors l'un des deux ouverts est vide ;

1) Montrer qu'il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) E connexe ;

(ii) Si E est l'union de deux férmés disjoints , alors l'un des deux est vide ;

(iii) Si $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrete et $f : E \to \{0,1\}$ une application continue , aalors f est constante sur E

2) Montrer que l'image d'un connex par une application continue est un complexe de l'espace image ;

3) Soit f estune application définie et continue sur un intermalle ouvert $I \subset IR$;
Montrer que si a' et $b' \in I(avec\, a' \neq b')$, alors pour tout $c \in J$(intervalle fermé d'extremité $f(a')$ $etf(a'), \exists\ x \in I_1$(intervalle férmé d'extrémités a' et $b'), tq$ $f(x) = c$;

4) Soit $(U_n)_n$ une familles de sous-ensembles connexes de E ;
Montrer que si $\bigcap_n U_n \neq \oslash, alors$ $\bigcup_n U_n$ est connexe