

# Chapitre 1

## Systemes de n equations de recurrence lineaires d'ordre 1 à coefficients constants

les systemes de n equations de recurrence lineaires d'ordre 1 à coefficients constants sont des systemes de type :

$$\begin{cases} x_{1t+1} = a_{11}x_{1t} + \dots + a_{1j}x_{jt} + \dots + x_{1n}x_{nt} + f_1(t) \\ x_{it+1} = a_{i1}x_{1t} + \dots + a_{ij}x_{jt} + \dots + x_{in}x_{nt} + f_i(t) \\ x_{nt+1} = a_{n1}x_{1t} + \dots + a_{nj}x_{jt} + \dots + x_{nn}x_{nt} + f_n(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

ou, en adoptant l'écriture matricielle :

$$X_{t+1} = AX_t + F(t)$$

où  $X_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{jt} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix}$  et  $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_i(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$  ( $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ) et où  $A$  est une matrice

carrée d'ordre  $n$  à coefficient  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, n$ . L'inconnue de ce système est la suite  $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ , notée  $(X_t)$ . On parle de système d'ordre 1 car tout terme de la suite dépend du seul terme précédent. Dans ce cours, nous traitons seulement des systèmes homogènes, à savoir des systèmes du type

$$X_{t+1} = AX_t \quad (1.2)$$

**Remarque :** n'importe quelle équation de récurrence linéaire d'ordre  $n$  peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire de  $n$  équation d'ordre 1. Ainsi, dans le cas où  $n = 2$  autrement dit l'équation du type  $x_{t+2} = -a_1x_{t+1} - a_0x_t$ , si l'on pose  $X_t = \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{pmatrix}$ , donc  $X_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{t+2} \\ x_{t+1} \end{pmatrix}$ , l'équation est équivalente au système  $X_{t+1} = AX_t$  avec  $A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . De façon plus générale, l'équation d'ordre  $n$  :  $x_{t+n} + a_{n-1}x_{t+n-1} + \dots + a_0x_t = 0$ , peut s'écrire sous

la forme  $X_{t+1} = AX_t$ , avec  $A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $X_t = \begin{pmatrix} x_{t+n-1} \\ \vdots \\ x_{t+1} \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix}$

## 1.1 Détermination des équilibres

*la notion d'équilibre est utilisée en économie pour désigner des situations où "rien ne bouge"*

Les équilibres du processus décrit par l'équation 2.2 sont les suites stationnaires ( $X_e$ ) où  $X_e$  est telle que  $X_e = AX_e \Rightarrow (A - \mathbf{I})X_e = \vec{0}$

Il est que  $X_e = \vec{0}$  est solution de l'équation  $(A - \mathbf{I})X_e = \vec{0}$  et ce pour tout  $A$ . C'est donc un vecteur d'équilibre. Rest à savoir s'il est unique ou non.

*Cas 1 :*  $X_e = \vec{0}$  est l'unique vecteur d'équilibre du processus décrit par l'équation 2.2. C'est le cas ssi le rang de la matrice  $\mathbf{A} - \mathbf{I}$  est égale à  $n$  ( donc si cette matrice est régulière) ou ssi  $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \neq 0$ .

**Exemple :** soit le processus décrit par l'équation

$$X_{t+1} = AX_t \tag{1.3}$$

avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  comme  $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = -2 (\neq 0)$ , le seul vecteur d'équilibre est  $X_e = \vec{0}$ .

*Cas 2* :  $X_e = \vec{0}$  n'est pas l'unique vecteur d'équilibre du processus décrit par l'équation 2.2. C'est le cas ssi  $\det(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = 0$  donc ssi 1 est valeur propre de A. Danc ce ces, l'esemble des vecteurs d'équilibre est le sous espace propre de A associé à 1 (encore noté  $\text{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$ ).

**Exemple** : Soit le processus décrit par l'équation

$$X_{t+1} = AX_t \quad (1.4)$$

avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  comme  $\det(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = 0$ , alors 1 est valeur propre de A et l'ensemble  $E$  des équilibres du processus décrit par 2.4 est le sous-espace propre de A associé à 1.

## 1.2 Résolution

De  $X_{t+1} = AX_t$ , on endeduit  $X_1 = AX_0, X_2 = AX_1 = A^2X_0$ , et par récurrence  $X_t = A^tX_0$ . La solution de l'équation 2.2 pour  $X_0$  donné est donc

$$X_t = A^tX_0$$

Toute difficulté, pour trouver cette solution, réside donc dans le calcul de  $A^t$ . Nous distainguérons deux cas ici : le cas où A est diagonalisable et cas où elle ne l'est pas.

### 1.2.1 Cas où la matrice A est diagonalisable

#### a) Forme de la solution

Si A est diagonalisable, alors  $A = PDP^{-1}$ , où D est une matrice diagonale formée de  $n$  valeurs propres de A et P la matrice des vecteurs propres correspondante. Comme  $A^t = PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^tP^{-1}$  la solution de l'équation 2.2 est  $X_t = PD^tP^{-1}X_0$  autrement dit, de façon plus détaillée :

$$X_t = (P_1 \dots P_n) \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P^{-1}X_0, \text{ ou ce qui}$$

revient au même,  $X_t = (P_1 \dots P_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1^t \\ \vdots \\ \alpha_n \lambda_n^t \end{pmatrix} = \alpha_1 \lambda_1^t P_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^t P_n$ . la solution de l'équation 2.2 est donc

$$X_t = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^t P_i$$

les coefficients  $\alpha_i$  étant obtenu en faisant le produit  $P^{-1}X_0$  ou en résolvant  $X_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$  (que l'on obtien en remplaçant t par 0 dans la solution de 2.2)

**Remarque** Si  $X_0$  et A sont à coefficients réels, il en va alors de même pour la solution de 2.2 même si les valeurs propres de A ne les sont pas.

**b) Forme de la solution réelle lorsque A a des valeurs propres non réelles**

Supposons que A ait une valeur propre non réelle  $\lambda_1$  à laquelle correspond un vecteur propre  $P_1$ . Alors les conjugués  $\overline{\lambda_1}$  et  $\overline{P_1}$  sont repectivment valeur et vecteur propre de A.

**1.2.2 Cas où la matrice A n'est pas diagonalisable**

**a) Forme de la solution**

Si A n'est pas diagonalisable, alors on peut s'écrire  $A = QJQ^{-1}$  où J est une forme réduit de la matrice de Jordan, autrement dit une matrice de la

forme 
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_i & c_i & \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
 avec  $c_i = 1$  ou  $0, \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n$

étant les  $n$  valeurs propres de A et où  $Q = (Q_1 \dots Q_i \dots Q_n), Q_1 \dots Q_i \dots Q_n$  étant  $n$  vecteurs de Jordan linéairement indépendant à  $\lambda_1 \dots, \lambda_i; \dots et \lambda_n$ . On peut donc remplacer A par  $QJQ^{-1}$  dans l'équation 2.2 pour obtenir  $X_{t+1} = QJQ^{-1}X_t$ , ce qui donne en posant  $Z_t = Q^{-1}X_t$  :

$$Z_{t+1} = JZ_t,$$

ou encore

$$\begin{cases} Z_{1t+1} = \lambda_1 Z_{1t} + c_1 Z_{2t} \\ \vdots \\ Z_{it+1} = \lambda_i Z_{it} + c_i Z_{i+1t} \\ \vdots \\ Z_{n-1t+1} = \lambda_{n-1} Z_{n-1t} + c_{n-1} Z_{nt} \\ Z_{nt+1} = \lambda_n Z_{nt} \end{cases} \quad (1.5)$$

le système 2.8 est donc un système de  $n$  équations de recurrence linéaire d'ordre 1 avec ou sans second membre, que l'on peut résoudre en commençant par la dernière équation. Celle-ci est une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre 1, dont la solution est  $Z_{nt} = Z_{n0} \lambda_n^t$ .

### 1.3. ÉTUDE DE LA STABILITÉ DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME DE N ÉQUATIONS DE RÉCURRENCE

On peut alors résoudre la  $n - 1^{me}$  équation du système 2.8 :

$$Z_{n-1t+1} - \lambda_{n-1}Z_{n-1t} = c_{n-1}Z_{n0}\lambda_n^t$$

qui est une équation de récurrence linéaire d'ordre 1. Deux cas sont ici possibles :

— Soit  $C_{n-1} = 0$ , l'équation est homogène et sa solution est :

$$z_{n-1t} = z_{n-10}\lambda_{n-1}^t;$$

—  $c_{n-1} = 1$ , il y a résonance et la solution de l'équation est :

$$z_{n-1t} = (z_{n0}t + z_{n-10})\lambda_n^t, \text{ puisque } \lambda_{n-1} = \lambda_n$$

muni de cette solution, on peut alors résoudre la  $n - 2^{eme}$  équation du système 2.8, en  $z_{n-2t}$ , et ainsi de suite, jusqu'à la première équation. cette résolution du système 2.8 nous permet donc d'établir,  $z_t$ , puis  $X_t$  en prémultipliant  $Z_t$  par  $Q$  ( puisque  $Z_t = Q^{-1}X_t$ ).

**Exemple :** soit le processus décrit par :

$$X_{t+1} = AX_t, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

### 1.3 Étude de la stabilité des solutions d'un système de n équations de récurrence linéaires homogènes

Reprenons le système 2.2 :  $X_{t+1} = AX_t$ .

Nous avons vu que, à chaque condition initiale, correspond une trajectoire unique solution de ce système. La question abordée dans ce paragraphe est de savoir si certains de ces trajectoires convergent vers un vecteur d'équilibre, et, si oui, lesquelles.

Comme dans la section précédente, on dira que le processus est globalement stable ssi, à chaque condition initiale, il converge vers un vecteur d'équilibre. On dira qu'un vecteur d'équilibre est globalement stable ssi toutes les trajectoires convergent vers lui. Le seul vecteur d'équilibre pouvant être globalement stable est le vecteur nul.

**A - Condition d'équilibre lorsque l'on connaît les valeurs propres de la matrice**

a) Cas où la matrice **A** est diagonalisable

## 6 CHAPITRE 1. SYSTÈMES DE N ÉQUATION DE RÉCURRENCE LINÉAIRES D'ORDRE

Comme dans le cas des équations d'ordre  $n$ , le comportement de  $(X_t)$  dépend donc de celui de  $\lambda_i^t$ . On retrouve donc les mêmes conditions nécessaires et suffisantes que dans la section précédente.

*Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité globale de  $\vec{0}$ .*

Le vecteur d'équilibre  $\vec{0}$  est globalement stable (i.e.  $\forall X_0, X_t \rightarrow \vec{0}$ ) ssi toutes les valeurs propres de  $A$  ont un module  $< 1$ .

**Exemple :**  $X_{t+1} = AX_t$  avec  $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

*Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité globale du processus*

le processus décrit par le système 2.2 est globalement stable ssi

— le vecteur d'équilibre  $\vec{0}$  est globalement stable ou

—  $\forall \lambda$  valeur propre de  $A$   $|\lambda| \leq 1$ .

**Exemple :**  $X_{t+1} = AX_t$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3/4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

L'ensemble de stabilité de l'équilibre de  $\vec{0}$  est le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres dont le module est strictement inférieur à 1. Reprenons en effet, le système  $X_{t+1} = AX_t$ . Supposons que  $A$  ait  $m$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  dont  $|\lambda_i| < 1$ , avec  $0 < m < n$  et  $n - m$  valeurs propres dont  $|\lambda_i| \geq 1$ . Il s'ensuit que, pour que  $X_t$ ,

$$X_t = \alpha_1 \lambda_1^t P_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m^t P_m + \dots + \alpha_n \lambda_n^t P_n,$$

converge vers  $\vec{0}$ , il faut et il suffit que  $\alpha_i = 0, \forall i, i = m + 1, \dots, n$ . Les trajectoires qui convergent vers  $\vec{0}$  sont donc de la forme  $(X_t) = (\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^t P_i)$ . or, si  $X_t = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^t P_i$  alors

$$X_0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i$$

. L'ensemble de stabilité de  $\vec{0}$  est donc

$$S_{\vec{0}} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m \right\}$$

### b) Cas où $A$ n'est pas diagonalisable

Nous avons vu que, lorsque  $A$  n'est pas diagonalisable les solutions de 2.2 peuvent s'écrire sous la forme de  $X_t = \sum_{i=1}^m P_i(t) \lambda_i^t Q_i$ , où  $\lambda_i$  est valeur propre de  $A$ ,  $Q_i$  vecteur propre ou vecteur de Jordan associé à  $\lambda_i$  et

### 1.3. ÉTUDE DE LA STABILITÉ DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME DE $N$ ÉQUATIONS DE RÉCU

où  $p_i(t)$  est un polynôme. Ici, le comportement de  $X_t$  dépend donc de celui de  $P_i(t)\lambda_i^t$  qui est un produit d'un polynôme et d'une fonction exponentielle. Comme, lorsque  $t \rightarrow \infty$  l'exponentielle l'emporte sur la fonction polynôme, on associe 4 cas :

1<sup>er</sup> Cas :  $|\lambda| > 1$  ssi  $P_i(t)\lambda_i^t \rightarrow \pm\infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

2<sup>eme</sup> Cas :  $|\lambda| = 1$  on a donc  $P_i(t)\lambda_i^t = P_i(t)$ . Dans ce cas  $P_i(t)\lambda_i^t \rightarrow l \in \mathbb{R}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  ssi  $P_i(t)$  est un polynôme de degré 0 (plus précisément lorsque  $p_i(\cdot) = l$ ). Or, ce-ci est le cas pour tous les termes de la forme  $P_i(t)1^t$  ssi la dimension du sous-espace propre de  $A$  associé à 1 est égale à la multiplicité algébrique de 1. 3<sup>eme</sup> Cas :  $-1 < \lambda_i < 1$  ssi  $p_i(t)\lambda_i^t \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$

4<sup>eme</sup> Cas :  $\lambda \leq -1$  ssi  $p_i(t)\lambda_i^t$  n'a pas de limite.

Au totale,  $p_i(t)\lambda_i^t$  converge vers 0 ssi  $|\lambda| < 1$ ,  $p_i(t)\lambda_i^t \rightarrow l \in \mathbb{R}$  ssi  $\lambda_i = 1$  et  $p_i(t) = l$ , et ne converge pas, du moins vers une limite fini, dans tout autre cas.

Il s'ensuit que : le vecteur d'équilibre  $\vec{0}$  est globalement stable (i.e.  $\forall X_0, X_t \rightarrow \vec{0}$ ) ssi toutes les valeurs propres de  $A$  ont un module strictement inférieur à 1. Et que le processus décrit par le système 2.2 est globalement stable ssi :

- $\vec{0}$  est globalement stable ou
- $\forall \lambda$  valeur propre,  $|\lambda| < 1$  ou  $\lambda = 1$  et la dimension du sous espace propre qui lui est associé devant être égale à la multiplicité algébrique de 1.

#### **B. Condition de stabilité de $\vec{0}$ lorsque on ne connaît pas les valeurs propres de la matrice $A$**

On a vu que  $\vec{0}$  est globalement stable lorsque toutes les valeurs propres de  $A$  sont en module strictement inférieur à 1. Dans ce cas on dit que la matrice est séquentiellement stable.

**a)** Deux conditions nécessaires de stabilité séquentielle de  $A$ . Pour qu'une matrice  $A$  d'ordre  $n$  est séquentiellement stable, il faut que l'on ait  $|Tr(A)| < n$  et  $|det(A)| < 1$ .

En effet, si l'on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ , on a :

$$|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^n |\lambda_i| < n \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| < n \Rightarrow |Tr(A)| < n$$

$$|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n \Rightarrow \prod_{i=1}^n |\lambda_i| < 1 \Rightarrow \left| \prod_{i=1}^n \lambda_i \right| < 1 \Rightarrow |det(A)| < 1$$

**b)** Conditions suffisante de stabilité séquentielle de  $A$ . S'il existe  $n$  réels  $k_i$  strictement positifs tels que l'on ait :  $\forall i, i = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n |a_{ij}|k_j < k_i$ , alors  $A = (a_{ij})$  est séquentiellement stable.

**Remarque :** Si  $A$  est à éléments positif et vérifie ce théorème alors on dit que  $A$  est une matrice productive.

8CHAPITRE 1. SYSTÈMES DE N ÉQUATION DE RÉCURENCE LINÉAIRES D'ORDRE



## Chapitre 2

# Systemes de n equations differentielles lineaires d'ordre 1 à coefficients constants

les systemes de  $n$  equations differentielles lineaires d'ordre 1 à coefficients constants sont des systemes de type :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1j}x_j(t) + \dots + x_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ x_i'(t) = a_{i1}x_1(t) + \dots + a_{ij}x_j(t) + \dots + x_{in}x_n(t) + f_i(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nj}x_j(t) + \dots + x_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

ou, en adoptant l'écriture matricielle :

$$X'(t) = AX(t) + F(t)$$

$$\text{où } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_j(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_i(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}) \text{ et où } A \text{ est une}$$

matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficient  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, n$ , et où  $X'(t)$  désigne la dérivée de la fonction  $X(\cdot)$  en  $t$ . L'inconnue de ce système est la fonction  $X(t)$ ,  $A$  et  $F(t)$  ( $t \in \mathbf{R}_+$ ) étant données. Le système 2.1 est évidemment d'ordre 1 et la condition initiale du processus décrit par 2.1 est le vecteur  $X(t_0)$ . On posera, comme dans le cas générale,  $t_0 = 0$ , alors la

condition initiale est donnée par le vecteur :

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_j(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$$

Dans ce cours, nous traitons seulement des systèmes homogènes, à savoir des systèmes du types

$$X'(t) = AX(t) \quad (2.2)$$

**Remarque :** On peut, comme dans le cas des équations de récurrence, écrire n'importe quelle équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  sous la forme d'un système linéaire de  $n$  équations d'ordre 1.

L'équation d'ordre  $n$  :

$$x^n(t) + a_{n-1}x^{n-1}(t) + \dots + a_i x^i(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0,$$

est, par exemple, équivalente au système  $X'(t) = AX(t)$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x^{n-1}(t) \\ \vdots \\ x^i(t) \\ \vdots \\ x'(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

## 2.1 Détermination des équilibres

*la notion d'équilibre est utilisée en économie pour désigner des situations où "rien ne bouge"*

Les équilibres du processus décrit par l'équation 2.2 sont les fonctions constantes ( $X(\cdot) = X_e$ ) où  $X_e$  est telle que  $AX_e = \vec{0}$ .

$X_e = \vec{0}$  est évidemment solution cette équation, et ce, pour tout  $A$ . C'est donc un vecteur d'équilibre. Rest à savoir s'il est ou non unique.

*Cas 1 :*  $X_e = \vec{0}$  est l'unique vecteur d'équilibre du processus décrit par l'équation 2.2. C'est le cas ssi le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  est égale à  $n$  ( donc si cette matrice est régulière) ou ssi  $\det(A) \neq 0$ .

b) **Exemple** : soit le processus décrit par l'équation

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Comme  $\det(\mathbf{A}) = -2 (\neq 0)$ , le seul vecteur d'équilibre est  $X_e = \vec{0}$ .

*Cas 2* :  $X_e = \vec{0}$  n'est pas l'unique vecteur d'équilibre du processus décrit par l'équation 2.2. C'est le cas ssi  $\det(\mathbf{A}) = 0$  donc ssi 0 est valeur propre de A. Dans ce cas, l'ensemble des vecteurs d'équilibre est le sous espace propre de A associé à 0 (noté aussi  $\text{Ker}(\mathbf{A})$ ).

**Exemple** : Soit le processus décrit par l'équation

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Comme  $\det(\mathbf{A}) = 0$ , alors 0 est valeur propre de A et l'ensemble  $E$  des équilibres du processus décrit par 2.4 est le sous-espace propre de A associé à 0.

## 2.2 Résolution

Pour présenter la résolution de l'équation

$$X'(t) = AX(t),$$

on distinguera deux cas :

### 2.2.1 Cas où la matrice A est diagonalisable

a) **Forme de la solution**

Si A est diagonalisable, alors  $A = PDP^{-1}$ , où D est une matrice diagonale formée de  $n$  valeurs propres de A et P la matrice des vecteurs propres correspondante.

En remplaçant A par  $PDP^{-1}$  dans l'équation 2.2 on obtient

$$X'(t) = PD^tP^{-1}X(t)$$

ce qui donne en prémultipliant les deux membres de la dernière équation par  $P^{-1}$  :  $P^{-1}X'(t) = D^tP^{-1}X(t)$  d'où, en posant  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , et donc  $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$  :

$$Y'(t) = DY(t) \quad (2.5)$$

En notant  $y_i(t), i = 1, \dots, n$ , les éléments de  $y(t)$ , et en développant cette équation, on obtient le système de  $n$  équations différentielles homogènes d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Comme la solution de l'équation  $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$  est de la forme  $y_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t}$ , celle du système 2.5 est de la forme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_i e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

De  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , on en déduit que  $X(t) = PY(t)$ . On a donc

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_i e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \text{ avec } P = (P_1, \dots, P_n)$$

La solution de l'équation 2.2 est donc

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} P_i \quad (2.7)$$

Les  $\alpha_i$  étant solution du système  $X(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$ .

**b) Exemple :** soit le processus décrit par :

$$X'(t) = AX(t), \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### 2.2.2 Cas où la matrice A n'est pas diagonalisable

#### a) Forme de la solution

Si A n'est pas diagonalisable, alors on peut écrire  $A = QJQ^{-1}$  où J est la

matrice de Jordan autrement dit une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $c_i = 1$  ou  $0$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n$  étant les  $n$  valeurs propres de A, et où  $Q = (Q_1 \dots Q_n)$ ,  $Q_1, \dots, Q_n$  étant  $n$  vecteurs de Jordan linéairement indépendants aux valeurs propres de A,  $\lambda_1 \dots, \lambda_n$ . On peut donc remplacer A par  $QJQ^{-1}$  dans l'équation 2.2 pour obtenir  $X'(t) = QJQ^{-1}X(t)$ , ce qui donne en posant  $Z(t) = Q^{-1}X(t)$  :

$$Z'(t) = JZ(t),$$

ou encore

$$\begin{cases} Z'_1(t) = \lambda_1 Z_1(t) + c_1 Z_2(t) \\ \vdots \\ Z'_i(t) = \lambda_i Z_i(t) + c_i Z_{i+1}(t) \\ \vdots \\ Z'_{n-1}(t) = \lambda_{n-1} Z_{n-1}(t) + c_{n-1} Z_n(t) \\ Z'_n(t) = \lambda_n Z_n(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

le système 2.8 est donc un système de  $n$  équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec ou sans second membre, que l'on peut résoudre en commençant par la dernière équation. Celle-ci est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, dont la solution est  $Z_n(t) = Z_n(0)e^{\lambda_n t}$ .

On peut alors résoudre la  $n - 1^{\text{me}}$  équation du système 2.8 :

$$Z'_{n-1}(t) = \lambda_{n-1} Z_{n-1}(t) + c_{n-1} Z_n(t)$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Deux cas sont ici possibles :

— Soit  $c_{n-1} = 0$ , l'équation est homogène et sa solution est :

$$z_{n-1}(t) = z_{n-1}(0)e^{\lambda_{n-1} t};$$

—  $c_{n-1} = 1$ , la solution de l'équation est :

$$z_{n-1}(t) = (z_n(0)t + z_{n-1}(0))e^{\lambda_{n-1}t}, \text{ puisque } \lambda_{n-1} = \lambda_n$$

Avec cette solution, on peut alors résoudre la  $n - 2^{\text{eme}}$  équation du système 2.8, en  $z_{n-2}(t)$ , et ainsi de suite, jusqu'à la première équation.

Cette résolution du système 2.8 nous permet donc d'établir,  $z_t$ , puis  $X_t$  en prémultipliant  $Z_t$  par  $Q$  (puisque  $Z_t = Q^{-1}X_t$ ).

**Exemple :** Soit le processus décrit par :

$$X'(t) = AX(t), \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Étude de la stabilité des solutions d'un système de n équations différentielle linéaires homogènes

Reprenons le système 2.2 :  $X'(t) = AX(t)$ .

Nous avons vu que, à chaque condition initiale, correspond à une solution unique de ce système. La question abordée ici est de savoir si certains de ces trajectoires converge vers un vecteur d'équilibre, et, si oui, lesquelles.

### A - Condition d'équilibre lorsque l'on connaît les valeurs propres de la matrice

#### a) Cas où la matrice A est diagonalisable

Nous avons vu que, lorsque A est diagonalisable, les solutions du systèmes peuvent s'écrire sous la forme de  $X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} P_i$  avec  $\lambda_i$  et  $P_i$  respectivement valeur et vecteur propre associés de A. Le comportement de  $X(t)$  dépend donc de celui de  $e^{\lambda_i t}$ . Or  $e^{\lambda_i t}$  tend vers :

- 0 ssi  $\lambda_i$  est strictement négative.
- 1 ssi  $\lambda_i = 0$
- $\infty$  ssi  $\lambda_i$  est strictement positif.

De ces trois propositions, on peut déduire des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité globale du processus et du vecteur nul.

*Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité globale de  $\vec{0}$ .*

Le vecteur d'équilibre  $\vec{0}$  est globalement stable (i.e.  $\forall X_0, X(t) \rightarrow \vec{0}$ ) ssi les  $\lambda_i$  sont strictement négatives.

### 2.3. ÉTUDE DE LA STABILITÉ DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME DE N ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

**Exemple :** Le vecteur d'équilibre  $\vec{0}$  du processus décrit par :

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est globalement stable. Les trois valeurs propres de A sont en effet : -1, -2 et -3

*Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité globale du processus*

le processus décrit par le système 2.2 est globalement stable ssi

- le vecteur d'équilibre  $\vec{0}$  est globalement stable ou
- Toutes les valeurs propres de A sont strictement négative ou nul.

**Exemple :** Le processus décrit par l'équation :

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est globalement stable. les trois valeurs propres de A sont en effet : -1, -2 et 0.

L'ensemble de stabilité de l'équilibre de  $\vec{0}$  est le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres strictement négative.

#### b) Cas où A n'est pas diagonalisable

Lorsque la matrice A n'est pas diagonalisable, les solutions de 2.2 peuvent s'écrire sous la forme de  $X(t) = \sum_{i=1}^m p_i(t)e^{\lambda_i t} Q_i$ , où  $\lambda_i$  et  $Q_i$  sont respectivement valeurs propre et vecteur de Jordan de A, et  $p_i(t)$  est un polynome. Ici, le comportement de  $X(t)$  depend donc de celui de  $p_i(t)e^{\lambda_i t}$ . Comme, lorsque  $t \rightarrow \infty$  la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction polynome, on associe trois cas :

1<sup>er</sup> Cas :  $\lambda_i < 0$  ssi  $p_i(t)e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

2<sup>eme</sup> Cas :  $\lambda_i = 0$  on a donc  $p_i(t)e^{\lambda_i t} = p_i(t)$ . Dans ce cas  $p_i(t)e^{\lambda_i t} \rightarrow l \in \mathbb{R}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  ssi  $p_i(t)$  est un polynome de degré 0 (lorsque  $p_i(\cdot) = l$ ). Or, ce-ci est le cas pour tous les termes de la forme  $p_i(t)e^{0t}$  ssi la dimension du sous-espace propre de A associé à 0 est égale à la multiplicité algebrique de 0.

3<sup>eme</sup> Cas : Pour  $\lambda_i > 0$ ,  $p_i(t)e^{\lambda_i t}$  ne converge pas vers une limite finie.

Il s'ensuit que que :

Le vecteur d'équilibre  $\vec{0}$  est globalement stable ssi les valeurs propres de A sont strictement negative ;  
et que

le processus est globalement stable ssi :

- $\vec{0}$  est globalement stable ou
- Toutes les valeurs propres de A sont strictement négative ou nulle, la dimension du sous-espace propre associée à la valeur propre 0 est égale à la multiplicité algébrique de 0.

### B. Condition de stabilité de $\vec{0}$ lorsque on ne connaît pas les valeurs propres de la matrice A

Reprenons le système homogène (2.2)

$$X'(t) = AX(t)$$

Les conditions de stabilité que nous avons vu dans le paragraphe précédent ne sont applicables que lorsque on connaît les valeurs propres de A. Nous avons notamment vu que  $\vec{0}$  est globalement stable lorsque toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives. Dans ce cas on dit que la matrice est différentiellement stable ou d-stable.

Il existe un certain nombre de critères permettant d'établir si A est ou non d-stable sans déterminer ses valeurs propres. Ce sont quelques uns de ces critères que nous allons ici donner.

#### a) Conditions nécessaires de stabilité différentielle de A

Pour qu'une matrice A soit d-stable, il faut que  $Tr(A) < 0$

Cette condition est évidente puisque la trace de A est la somme des valeurs propres de A.

Pour qu'une matrice A d'ordre n soit d-stable, il faut que  $(-1)^n \det(A) > 0$

En effet, si les n valeurs propres de A sont strictement négatives, alors leur produit, autrement dit le déterminant de A, est positif si n est pair et négatif si n est impair. Donc le déterminant est du signe de  $(-1)^n$  et on a  $(-1)^n \det(A) > 0$

Pour qu'une matrice A d'ordre n soit d-stable, il faut que toutes

les coefficients du polynôme  $(-1)^n \det(A - \lambda \mathbb{1})$  soit strictement positifs



### 2.3. ÉTUDE DE LA STABILITÉ DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME DE $n$ ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

#### b) Conditions suffisantes de d-stabilité de $A$

On dit que la matrice  $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n$  est à diagonale négative dominante si  $a_{ii} < 0, i = 1, \dots, n$  et s'il existe  $n$  réels strictement positifs  $k_j$ , tels que l'on ait :

$$\sum_{i \neq j} k_j |a_{ij}| < k_i |a_{ii}|$$

Pour que la matrice  $A$  soit d-stable, il suffit qu'elle soit à diagonale négative dominante.