MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE I

–DEUG SM-1 ET MIAS-1–

LA FORMULE DE STOKES

P. ARNOUX, S. LAZZARINI

RÉSUMÉ. Le but de ce polycopié est de donner tous les éléments pour pouvoir comprendre et utiliser la formule de Stokes dans des calculs relatifs à la description de situations physiques.

Notes de cours, année 2003-04, disponibles sur
http ://www.cpt.univ-mrs.fr/~sel/COURS/mmp1.html

TABLE DES MATIÈRES

Date: 3 février 2004.

-1. Avertissement

Ce polycopié est une version encore très préliminaire et incomplète. Il vous est fourni comme aide pour la préparation de l'examen, dans l'idée qu'il est préférable d'avoir des notes de cours plutôt que rien.

Nous tenons cependant à avertir le lecteur qu'il contient sûrement de nombreuses fautes de frappe, et probablement un certain nombre d'erreurs et d'imprécisions mathématiques.

Nous sommes intéressés par toutes les remarques du lecteur étudiant : fautes de frappes, erreurs diverses ainsi que par votre opinion sur ce polycopié. Si un passage vous semble incompréhensible, ou au contraire s'il vous éclaire, nous aimerions bien le savoir, pour pouvoir améliorer ce texte pour les cours suivants. N'hésitez pas à nous communiquer vos suggestions.

Les étudiants qui nous auront remis des listes de fautes de frappe, et des remarques pertinentes sur le polycopié, pourront prétendre à un bonus dans la note finale.

Tous nos remerciements aux étudiants suivants de l'année 2000-01 pour leur lecture assidue de ce polycopié
ACHKAR José (MIAS)
LECONTE Sylvain (SM)
PETTINATO Aurélie (MIAS)

0. Introduction

Résumé : Dans ce chapitre, on donne quelques exemples simples (formule fondamentale de l'analyse élémentaire, exemples de flux discrets ou pour des fluides incompressibles) où l'on voit une relation entre une somme prise sur un domaine, et une somme prise sur le bord de ce domaine.

On énonce ensuite la formule de Stokes, et on explique le plan du livre, dont le but est de comprendre cette formule et de pouvoir l'appliquer sur des exemples explicites.

0.1. **La formule fondamentale de l'analyse.** La formule la plus importante de l'analyse élémentaire est probablement celle qui relie la dérivée et l'intégrale :

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

Comme c'est cette formule qu'on utilise souvent pour calculer les intégrales, en passant par la recherche d'une primitive, on a tendance à la trouver naturelle, en oubliant son caractère étonnant, puisque les définitions de la dérivée (pente de la tangente à la courbe) et de l'intégrale (aire de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses) sont au départ tout-à-fait distinctes.

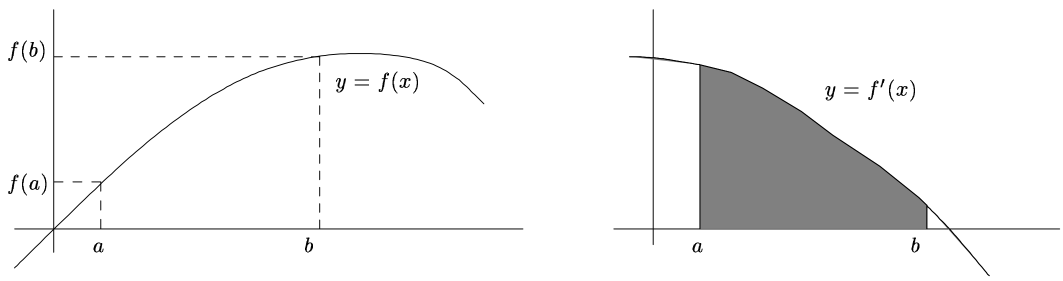

FIG. 1. Une représentation géométrique de la formule

Une propriété importante de cette formule est qu'elle relie une donnée sur un intervalle $[a, b]$, et une donnée sur le bord de cet intervalle. On peut en donner différents exemples physiques :

a) vitesse et position : on peut relier la vitesse sur un intervalle de temps, et la différence de position à l'instant initial et à l'instant final. Remarque : on peut prendre pour f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, mais aussi une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, à condition de prendre aussi une vitesse vectorielle ; ce sera une des généralisations que nous donnerons ultérieurement.

b) gradient de température : ici, f représente, par exemple, la température le long d'un fil métallique, et sa dérivée représente la variation de température.

c) gradient de potentiel : ici, f représente le potentiel électrique le long d'un conducteur, et f' le gradient de potentiel (différence de potentiel par unité de longueur).

d) densité et poids : si f' représente la densité d'une barre en fonction de la position, $f(b) - f(a)$ représente le poids total de la barre.

Il est intéressant de remarquer que, dans tous ces exemples, f et f' sont exprimées dans des unités différentes ; en particulier, un changement de paramétrage de l'intervalle $[a, b]$ modifiera la valeur de f', pas celle de f (le changement de paramétrage le plus fréquent, mais pas le seul, est le changement d'unité). Dans l'exemple b), si l'on mesure le fil en cm au lieu de mètres, la valeur de f n'est pas modifiée, mais la valeur de f' l'est. De même, dans l'exemple d), le poids total de la barre ne dépend pas de l'unité de longueur choisie, mais il n'en est pas de même de la densité : on n'obtient pas le même chiffre selon qu'on l'exprime en g/m ou en g/cm. On verra plus tard que f et f' (qu'on écrira plutôt $f'(x)\,dx$) sont des objets mathématiques différents.

0.2. **Quelques généralisations possibles.** On voudrait généraliser cette formule, et en particulier, le faire à plusieurs dimensions, au lieu de se restreindre seulement à un intervalle. Voici un exemple très simple :

Si l'on veut connaître la population contenue dans un édifice public (par exemple un musée), supposé vide au début de la journée, il suffit de connaître le flux d'entrée-sortie aux portes de cet édifice (c'est d'ailleurs la méthode utilisée, au moyen d'un portillon automatique, dans certains édifices qui doivent respecter des normes de sécurité). Comme dans le cas précédent, on a une relation entre une quantité mesurée sur un ensemble, et une quantité mesurée sur le bord de cet ensemble. Remarquez bien que cela ne fonctionne qu'à cause d'une hypothèse implicite de conservation de la quantité : si des gens disparaissent à l'intérieur de l'édifice (spectateur frappé de crise cardiaque...) ou s'ils apparaissent, on n'a plus de relation simple entre le flux d'entrée-sortie et la population interne. Un exemple où cela se produit est celui d'une maternité, où la population est plus élevée que le comptage des personnes entrées ne le laisserait prévoir ! un exemple plus sérieux est celui de l'évolution de la population d'un pays : la comptabilité des passages aux frontières ne permet pas à elle seule, à long terme, de savoir l'évolution de la population.

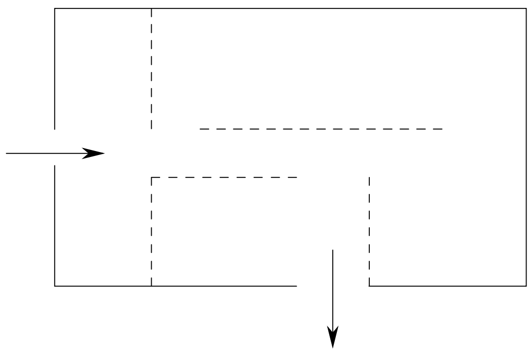

FIG. 2. Le flux aux portes d'un édifice

On n'a ici qu'un exemple “discret” : il n'y a qu'un nombre fini de sorties. Un modèle physique proche est donné par l'étude de la mécanique des fluides ; si l'on considère un tuyau rempli d'eau, on peut distinguer une portion du tuyau, formant un cylindre avec deux faces d'entrée-sortie. L'eau étant incompressible, le flux d'entrée à travers la première face est toujours égal au flux de sortie à travers la seconde. Si l'on suppose la vitesse constante sur chaque face, le flux à travers cette face est égal au produit de la vitesse par l'aire. On en déduit en particulier que, plus l'aire est petite, plus la vitesse doit être grande. C'est là une constatation que l'on peut aussi faire sur les autoroutes : un rétrécissement provoque souvent un embouteillage, mais l'embouteillage se produit en général avant le rétrécissement, là où il reste plusieurs voies ; quand on arrive à l'endroit où il n'y a qu'une voie, on constate en général que la vitesse augmente.

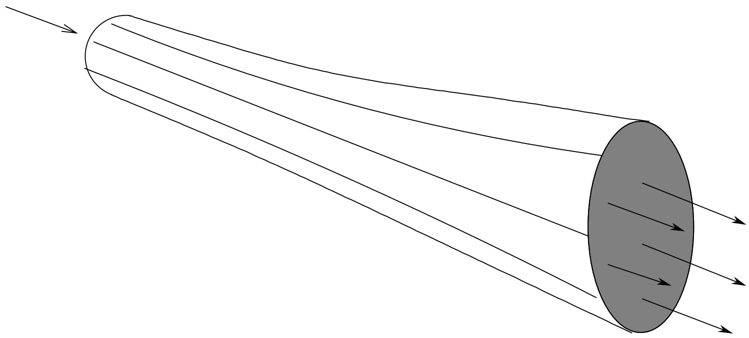

FIG. 3. Un exemple en mécanique des fluides

Un modèle physique réaliste dans la moindre des situations imposerait de prendre une frontière continue, et d'évaluer le "flux" (à préciser plus tard !) à travers cette frontière ; on pourrait, par exemple, relier l'évolution d'une quantité de gaz dans une boule (ou un volume quelconque) et le flux de gaz à travers la sphère qui borde cette boule. On voit que ce flux devra être calculé par une intégrale, et que l'on sera ainsi conduit à écrire l'égalité de deux intégrales, l'une sur une boule, et l'autre sur une sphère. De telles considérations permettent par exemple facilement de montrer que la puissance, en W/m^2, rayonnée par une source thermique ou lumineuse décroit en $1/r^2$ si elle est dispersée de manière isotrope dans toutes les directions ; par contre, l'énergie d'une vague issue d'un point (obtenue par exemple en lançant un caillou dans l'eau) décroit en $1/r$.

0.3. **Le but de ce cours.** Le but de ce cours est de montrer une formule qui contient les exemples précédents, la formule de Stokes :

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega$$

A ce stade, il est impossible d'expliquer complètement cette formule. Disons seulement que K est une région de dimension p (c'est-à-dire un fil, une plaque, ou un volume, suivant que $p = 1, 2$ ou 3) dans l'espace ou le plan, et que ∂K est le bord de K, donc une région de dimension $p - 1$ (le bord d'un segment est constitué de 2 points, le bord d'une surface par un segment, etc...). La formule propose l'égalité de deux intégrales, l'une prise sur K, l'autre sur son bord. Le but du cours est d'expliquer ce qu'est ω, comment on peut le dériver pour obtenir $d\omega$, et comment on peut en calculer l'intégrale sur un ensemble convenable.

L'intérêt de cette formule est de regrouper en une seule plusieurs formules classiques de mathématiques très utilisées en physique ; en particulier, on regroupe des formules sur la droite (formule fondamentale de l'analyse, ex. 1), sur le plan (formule de Green-Riemann, mi XIXème, voir ci-dessous), et dans l'espace (formule de Gauss-Ostrogradsky, pour un volume et la surface qui le borde, début XIXème, et formule de Stokes, pour une surface dans $\mathbb{R}^3$ et la courbe qui la borde, donnée pour la première fois dans un texte d'examen d'une université anglaise, vers 1880) ; en fait, on pourrait énoncer la formule de Stokes pour une région à p dimensions d'un espace à n dimensions ; durant tout le cours, rassurez-vous, on se contentera des exemples utiles pour la physique, c'est-à-dire la dimension 2 et 3 (quoique la dimension 4, correspondant à l'espace temps, puisse aussi être utile en physique, en particulier en électromagétisme).

Nous essaierons de montrer tout au long du cours que ce point de vue permet de résumer en quelques mécanismes simples, utilisables par tout étudiant qui sait calculer des dérivées et des primitives de fonctions d'une variable réelle, plusieurs opérations d'un abord assez compliqué.

Le plan du cours est le suivant :

Les trois premiers chapitres forment des préliminaires : définition et calcul des intégrales multiples, théorème de changement de variable, définition et étude des courbes et des surfaces paramétrées ; c'est ce dont on a besoin pour pouvoir définir un domaine de dimension p dans $\mathbb{R}^n$ et son bord, et calculer une intégrale sur ce domaine (penser au flux d'un courant à travers une surface de $\mathbb{R}^3$, ou à la masse d'une calotte sphérique de densité variable pour avoir des exemples physiques de telles intégrales)

Le chapitre 4 définit l'objet fondamental de ce cours : les formes différentielles de degré p dans $\mathbb{R}^n$. Les chapitres 5 à 7 définissent les principales opérations sur ces formes différentielles : image réciproque par une application différentiable, dérivation extérieure, et intégration sur un domaine de dimension adaptée (pour cette dernière définition, on commence par l'intégration d'une forme de degré n dans $\mathbb{R}^n$, ce qui consiste simplement à l'intégrale ordinaire d'une fonction, et on ramène le cas général à celui-là en prenant l'image réciproque par un paramétrage convenable du domaine d'intégration, ce qui utilise les chapitres 3 et 5).

Enfin, le chapitre 8, but de ce cours, donne la formule de Stokes et certaines de ses applications.

> *A retenir* : **Se rappeler de la formule de Stokes, qui sert de fil conducteur au cours de ce polycopié, et retenir les différents exemples donnés.**

1. Intégrales multiples (définition et calcul)

Résumé : Après un rappel sur la définition et les propriétés de l'intégrale simple, on consacre deux sections à définir l'intégrale d'une fonction de deux variables, d'abord sur un rectangle, puis sur un domaine quarrable. On montre ensuite que la valeur de l'intégrale double peut être obtenue en calculant successivement deux intégrales simples (*Théorème de Fubini*), ce qui, dans les bons cas, fournit un moyen effectif de calcul. Une dernière section explique comment généraliser au cas de 3 variables ou plus, ce qui ne pose pas de grandes difficultés quand on a compris le cas de deux variables.

1.1. **Intégrale simple (rappel).** Rappelons simplement que l'intégrale simple de la fonction f entre les points a et b est l'aire, comptée algébriquement, de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $y = f(x)$ et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Dans le cas où la fonction est constante, de valeur K, la valeur de l'intégrale est donc bien évidemment $K(b-a)$; de là, on passe facilement au cas d'une fonction en escalier, en découpant l'intervalle en un nombre fini de morceaux.

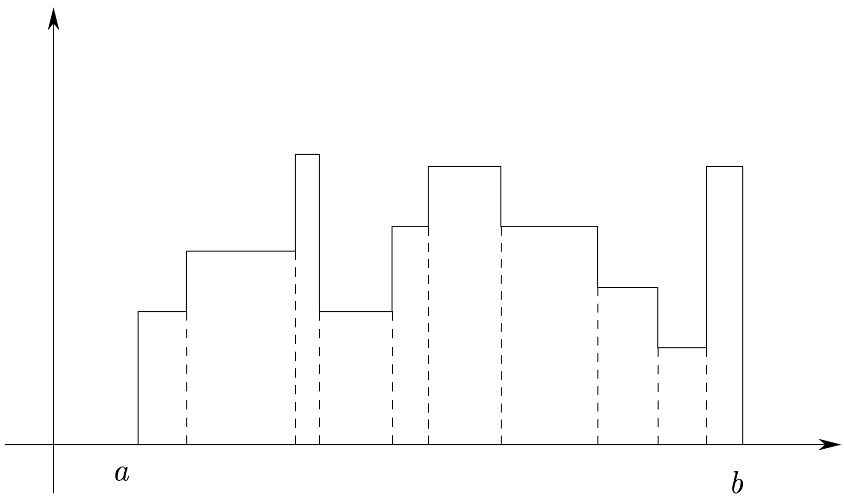

Fig. 4. L'intégrale d'une fonction en escalier

Il est beaucoup moins évident de le faire pour une fonction générale ; l'idée est d'approximer au-dessus et au-dessous par des fonctions en escalier, et de passer à la limite si c'est possible, en encadrant la fonction donnée par deux fonctions en escalier qui diffèrent de moins de ϵ. On montre, et nous ne le ferons pas ici, que cela marche pour toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné :

Théorème 1. *(non évident, et non démontré) : toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est intégrable.*

L'intégrale d'une fonction continue a quelques propriétés simples : si l'on fixe l'intervalle $[a, b]$, et que l'on pose $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, l'intégrale possède les deux propriétés suivantes :

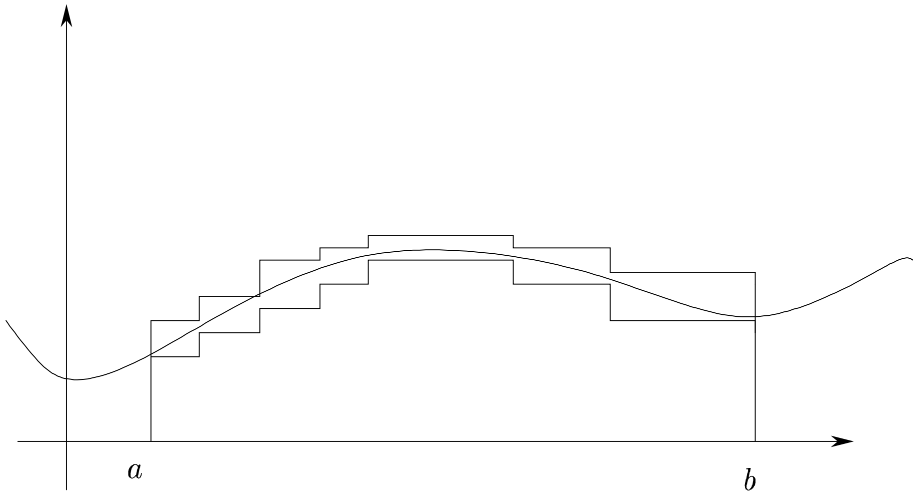

FIG. 5. L'approximation de l'intégrale d'une fonction continue par des fonctions en escalier

- Linéarité : $I(f+g) = I(f) + I(g)$ et $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.
- Positivité : si f est positive, alors $I(f) \geq 0$.

Ces propriétés sont élémentaires, mais souvent fort utiles en pratique, et elles seront encore valides pour les intégrales multiples.

Une autre propriété est la relation de Chasles (additivité par rapport au domaine) :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

qui est évidemment vraie si $a < b < c$, et qui reste vraie dans le cas général si l'on pose par définition $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

On veut généraliser à 2 dimensions; cela se complique parce que : la fonction a deux variables, mais aussi parce que le domaine sur lequel on intègre est plus compliqué qu'un intervalle. Le plus simple est de remplacer l'intervalle par un rectangle, mais ce n'est pas toujours suffisant, il faut bien au moins avoir des cercles. On va commencer par le plus simple, puis on va généraliser

1.2. **Intégrale d'une fonction de deux variables sur un rectangle.** On cherche donc à généraliser à 2 dimensions, pour une fonction $f(x,y)$ de 2 variables (par exemple, $(x,y) \mapsto x^2 + 2xy$, ou $(x,y) \mapsto \cos(xy)$). On va d'abord essayer d'intégrer sur un rectangle$R$ défini par $a < x < b$, $c < y < d$ (voir figure 6). On veut garder les mêmes propriétés : linéarité, positivité, et on voudrait que l'intégrale $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ représente le volume sous le graphe de la fonction. On voit donc que, pour une fonction constante, l'intégrale doit être $K(b-a)(c-d)$. On a envie, comme avant, de passer à des fonctions constantes par morceaux.

On procède en 3 étapes, que nous donnons brièvement :

Etape 1 : subdivision d'un rectangle R : on coupe le rectangle en tranches verticales et horizontales, ce qui le découpe en sous-rectangles de petite taille.

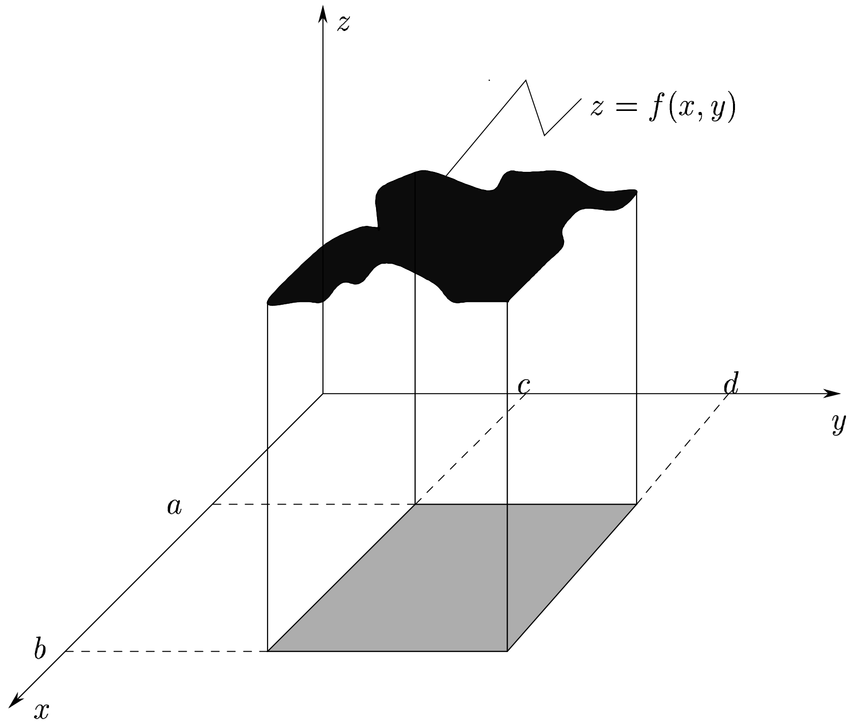

FIG. 6. Intégration sur un domaine rectangulaire

Etape 2 : On intègre des fonctions en escalier sur ces rectangles, ce qui est possible par la formule ci-dessus ; on définit ainsi $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ pour une telle fonction.

Etape 3 : une fonction f définie sur un rectangle est intégrable si, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escalier g et h telles que $g < f < h$ et $\iint h(x,y)\,dx\,dy - \int g(x,y)\,dx\,dy < \epsilon$.

Dans ce cas, on a :

$$\sup_{g<f} \iint_R g(x,y)\,dx\,dy = \inf_{h>f} \iint_R h(x,y)\,dx\,dy$$

La valeur commune est l'intégrale de f, que l'on notera aussi $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

(remarque : il existe des fonctions qui ne peuvent pas être encadrées par deux fonctions en escalier proches ; ces fonctions très irrégulières n'ont pas d'intégrale, mais on n'en rencontrera pas ici, en particulier à cause du théorème suivant).

Théorème 2. *(non évident, et non démontré) toute fonction continue sur un rectangle est intégrable.*

1.3. **Domaines quarrables, aire d'un domaine quarrable.** Un domaine K borné du plan est toujours contenu dans un rectangle R bien choisi (il suffit de prendre le rectangle assez grand). Si f est une fonction définie sur K, on peut étendre f en une fonction f_R définie sur R en posant : $f_K(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in K$, $f(x,y) = 0$ sinon.

On pourrait alors définir l'intégrale de f sur K comme l'intégrale de f_R sur R. On montre facilement que cela ne dépend pas du rectangle choisi, mais il n'est pas clair que l'intégrale soit bien définie : même si f est continue sur K, il est probable que f n'est pas continue sur R. Pour avoir un exemple, on peut considérer la fonction f définie sur l'ensemble des points à coordonnées dans $\mathbb{Q}$, et qui vaut 1 sur cet ensemble. Comme f est constante, elle est évidemment continue, et pourtant f_R n'est continue nulle part, et n'est pas intégrable au sens ci-dessus !

En fait, pour que l'intégrale soit bien définie, il faut que le domaine K soit assez "régulier" ; d'où la définition suivante, qui est exactement ce dont on a besoin :

Définition 1. On dit que le domaine K est quarrable si, pour tout ϵ strictement positif, il existe un domaine K_1 fait de petits rectangles de côtés parallèles aux axes, et un domaine K_2 fait de petits rectangles de côtés parallèles aux axes, tels que $K_1 \subset K \subset K_2$, et que l'aire de $K_2 - K_1$ soit inférieure à ϵ.

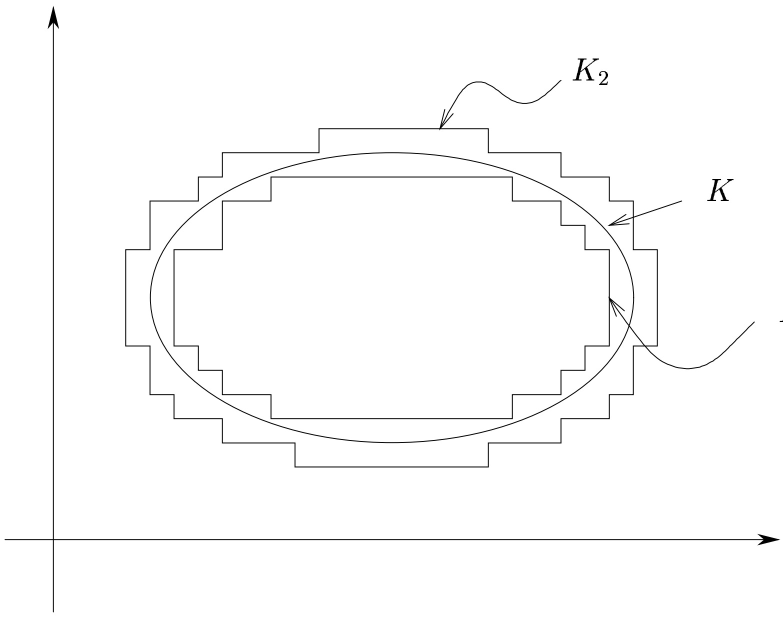

FIG. 7. Un exemple de domaine quarrable

Si K est quarrable, il a une aire bien définie, qui est la limite commune des aires de K_1 et K_2 quand ϵ tend vers 0.

On peut donner la même définition en dimension 3 (avec des parallélépipèdes de côtés parallèles aux axes), ou en dimension quelconque (on ne parle d'aire qu'en dimension 2 ; en dimension 3, on parle de volume, et en dimension quelconque, on parle de mesure)

Remarque importante : tous les domaines que vous serez amenés à rencontrer seront quarrables. Il est très difficile de donner un exemple de domaine non quarrable ; en fait, si l'on prend une définition légèrement différente, on peut définir les ensembles **mesurables***, ce qui est une généralisation de quarrable, et on montre (c'est très dur) qu'il est possible de prendre pour axiome l'axiome de Solovay : dans* $\mathbb{R}^n$*, tous les ensembles sont mesurables.*

On pourrait, après cette remarque, se demander pourquoi j'ai passé une section à définir les ensembles quarrables, si tous les ensembles que l'on rencontrera sont tous quarrables. Il y a à cela trois raisons : d'abord, pour insister sur le fait que le domaine d'intégration est un élément très important d'une intégrale multiple. Ensuite, parce que la définition même d'un domaine quarrable amène à réfléchir sur ce que c'est que l'aire d'un domaine, et comment ça se calcule. Enfin, et peut-être surtout, parce que ce polycopié risque d'être lu par certains de nos collègues, qui considèreraient comme une faute professionnelle que nous ne parlions pas de la question de la quarrabilité (il y a certainement déjà beaucoup d'autres fautes professionnelles dans ce texte !)

1.4. **Intégrale sur un domaine quarrable.** On peut remplacer le domaine quarrable par une réunion de rectangles, intégrer la fonction sur ces rectangles, pour obtenir une approximation de l'intégrale ; alternativement, on peut comme on l'a proposé ci-dessus étendre la fonction par 0 hors du domaine. Quelle que soit la méthode utilisée, on a le théorème suivant :

Théorème 3. *(admis) Une fonction continue sur un domaine quarrable est intégrable.*

1.5. **Calcul effectif des intégrales.** Les parties précédentes nous ont dit ce qu'est une intégrale, et quand elle existe ; mais on ne sait pas encore la calculer. Une première approche serait d'encadrer par des fonctions en escalier ; une autre méthode classique (et effectivement utilisée en calcul numérique) est de prendre les valeurs de la fonction en certains points (sommes de Darboux) : voir la figure ci-dessous. Mais, dans les exemples que nous rencontrerons, il y a des méthodes plus utiles.

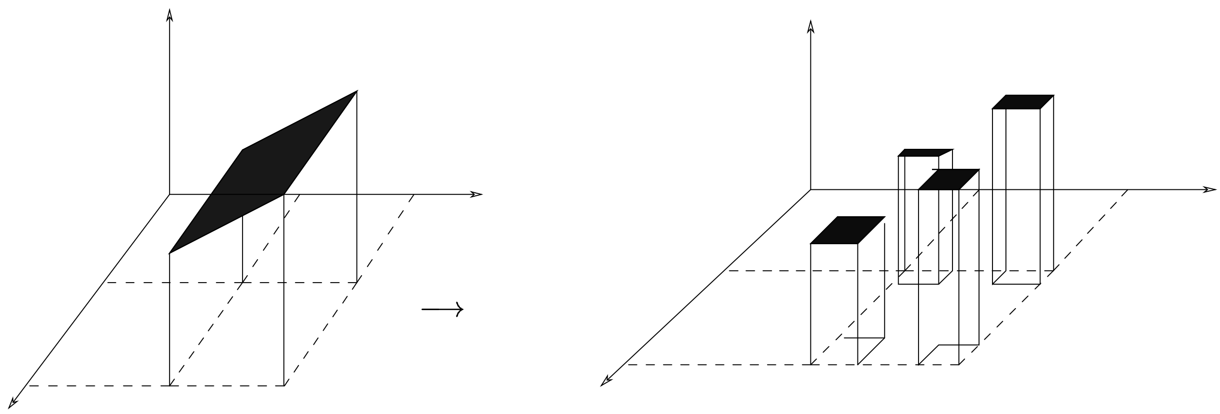

FIG. 8. Calcul effectif d'une intégrale

Calcul effectif sur un rectangle : on peut décomposer le rectangle en tranches fines, sur lesquelles on se ramène à une intégrale simple (principe de Cavalieri) ; cela marche par le théorème suivant (**Très important**) :

Théorème 4. *(Fubini)*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

Calcul effectif sur un domaine plus général : On suppose le domaine K de la forme $a \leq x \leq b$, $h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$. On a alors la modification suivante du théorème de Fubini :

Théorème 5. *(Fubini, bis)*

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Naturellement, si le domaine peut se mettre sous la forme $c \leq y \leq d$, $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$, il existe une formule analogue, en échangeant x et y, que nous laissons au lecteur le soin d'écrire.

1.6. **Intégrales triples.** On peut tout refaire pareil, sauf que c'est plus long à écrire : on prend des cubes, on calcule des volumes, on définit des domaines cubables, etc... Le point essentiel est que de la même façon , les fonctions continues sur des domaines cubables sont intégrables, et surtout, que les intégrales triples peuvent se calculer par trois intégrations simples successives, avec des bornes constantes si l'on intègre sur un parallélépipède aux côtés parallèles aux axes, et variables dans le cas général, comme on l'a vu ci-dessus.

Les dimensions supérieures à 3 (qui peuvent arriver dans un problème, si on a par exemple à considérer la position de deux points, ou une position et une vitesse) se traitent de la même façon ; il n'y a pas de difficultés théoriques supplémentaires, même si, bien sûr, les calculs peuvent devenir formidables.

Exercice final, pour préparer le chapitre 3 : calculer, par tout moyen à votre goût (géométrie élémentaire, intégration, algèbre...) l'aire du parallélogramme délimité par les vecteurs (a,b) et (c,d) dans $\mathbb{R}^2$, puis le volume du parallélépipède délimité par (a,b,c), (d,e,f), (g,h,i) (suggestion : pour calculer l'aire du parallélogramme sur $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (c,d)$, on pourra étudier la fonction $A(\vec{u},\vec{v})$ qui donne l'aire (positive ou négative) du parallélogramme orienté défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pris dans cet ordre, en s'inspirant de la figure ci-dessous.

> *A retenir* : **Il est essentiel de connaître le théorème de Fubini, et la technique de calcul des intégrales doubles ou triples par calcul successif d'intégrales simples (dont les bornes et la fonction, peuvent dépendre d'un paramètre). Il faut d'abord connaître le théorème, puis le pratiquer sur de nombreux exercices. Rappelez-vous que le domaine d'intégration joue un rôle dans le calcul, il faut donc pouvoir caractériser le domaine par des inégalités ; la plupart des intégrales doubles n'ont pas pour domaine un rectangle parallèle aux axes !**
>
> **Si vous savez calculer une intégrale double ou triple, ce qui correspond au contenu des sections 5 et 6, il est utile de réfléchir sur la définition même de l'intervalle, en essayant de comprendre pourquoi on a fabriqué le symbole $\int$ à partir du symbole $\sum$ en considérant l'intégrale comme la limite de la somme d'un très grand nombre de termes très petits.**

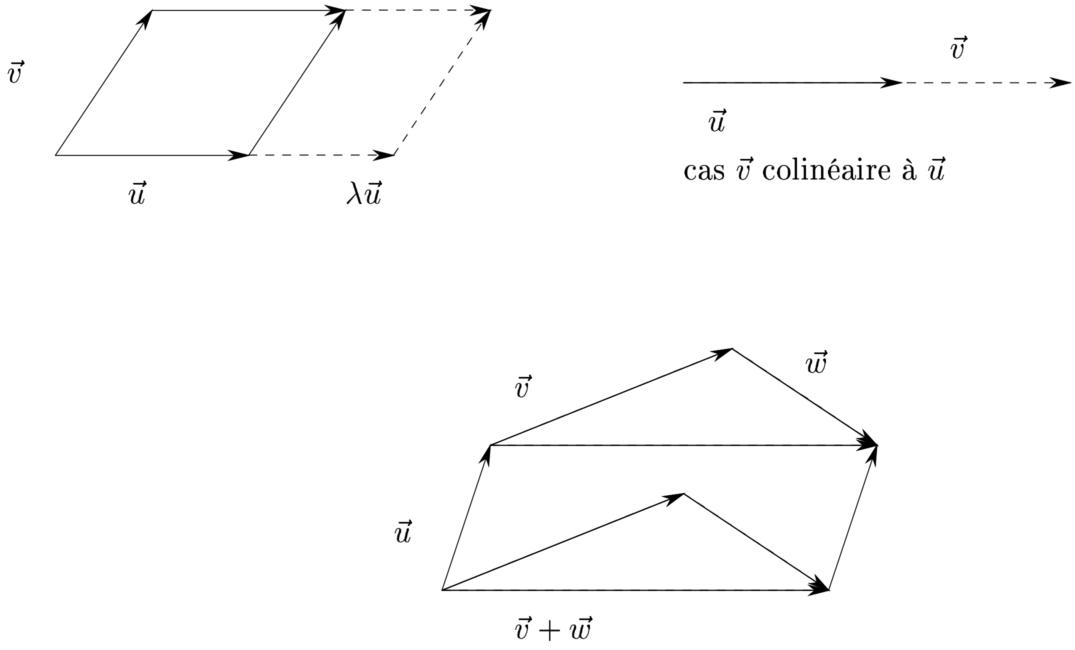

FIG. 9. Propriétés de l'aire du parallélogramme

2. Intégrales multiples (changement de variables)

Résumé : Ce chapitre est consacré aux éléments nécessaires pour effectuer un changement de variables dans une intégrale multiple.

On définit donc d'abord le déterminant d'un système de vecteurs, en donnant une motivation géométrique, puis une définition algébrique. On définit ensuite le déterminant d'une application linéaire, et on interprète ce déterminant comme le facteur par lequel cette application linéaire modifie le volume.

On définit la différentielle d'une application en un point comme l'application linéaire tangente, et la matrice jacobienne comme la matrice de cette application linéaire tangente, et on montre comment calculer effectivement cette matrice jacobienne. On définit le jacobien comme le déterminant de la matrice jacobienne, et on interprète ce jacobien comme le facteur par lequel l'application distord le volume au point considéré.

On peut alors, dans la section 4, énoncer la formule de changement de variable dans les intégrales simples, et dans la section 5 (sans preuve) la formule de changement de variables dans les intégrales multiples, qui fait agir la valeur absolue du jacobien.

2.1. **Déterminant, volume du parallélogramme et du parallélépipède.** Reprenons l'exercice qui termine le chapitre 1.

On veut calculer l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (c,d)$. On peut le faire géométriquement, par $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\phi$, où ϕ est l'angle entre les deux vecteurs. On peut calculer le sinus à partir du cosinus, et le cosinus à partir du produit scalaire, par exemple. Le calcul donne $|ad-bc|$. On peut aussi essayer de calculer cette surface par une intégrale.

On peut essayer de calculer de la même façon le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Le calcul est faisable : l'idée est de calculer un vecteur de norme 1 orthogonal aux deux premiers, et de faire son produit scalaire avec le troisième, pour définir la "hauteur" du parallélépipède.

On peut préférer une méthode moins calculatoire : notons $A(\vec{u},\vec{v})$ l'aire (concept non vraiment défini) du parallélogramme sur $\vec{u},\vec{v}$; quelles sont les propriétés que devraient avoir une telle fonction A ? Elles sont suggérées par la figure 9 :

- elle est certainement continue (sinon, on ne pourrait la mesurer).
- elle est linéaire par rapport à chaque variable, car on voit bien sur la figure que $A(\lambda\vec{u},\vec{v}) = \lambda A(\vec{u},\vec{v})$ et que $A(\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{v}) = A(\vec{u}_1,\vec{v}) + A(\vec{u}_2,\vec{v})$
- elle vérifie la propriété $A(\vec{u},\vec{u}) = 0$ pour tout vecteur.
- enfin, il est raisonnable de poser $A(\vec{i},\vec{j}) = 1$ (aire unité)

Cela entraîne des propriétés remarquables ; par exemple, de $A(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}) = 0$ et de la linéarité, on déduit facilement $A(\vec{v},\vec{u}) = -A(\vec{u},\vec{v})$ (on dit que cette fonction de deux variables est *alternée*). En fait, on montre sans difficultés que ces conditions déterminent complètement la fonction A : à proportionnalité près, il existe sur $\mathbb{R}^2$ une seule forme bilinéaire alternée.

Avec ces propriétés, on refait facilement le calcul ci-dessus, et on trouve tout de suite le résultat.

Remarquons que l'on retrouverait aussi le même résultat en prenant pour aire du parallélogramme engendré par deux vecteurs horizontaux la coordonnée verticale du produit vectoriel ; ce n'est pas un hasard, car on vérifie facilement que cette composante vérifie exactement les propriétés ci-dessus, et cela peut fournir une règle mnémotechnique simple pour se rappeler la formule.

Remarque : pour que ça marche bien, il faut une aire algébrique, et non géométrique (on doit tenir compte de l'orientation).

On trouve de même le volume du parallélépipède par cette méthode (faire le calcul : il y aura 6 produits de 3 termes, 3 produits avec le signe $+$, et 3 produits avec le signe $-$). Il existe de nombreux moyens mnémotechniques de retenir ces trois produits ; il est rentable à long terme de passer tout de suite du temps à trouver le moyen que vous retenez le mieux.

Ces formules se généralisent sans grande difficulté à la dimension n ; il existe une formule explicite utilisant les permutations, et la signature d'une permutation, mais nous n'en aurons pas besoin dans ce cours (la signature d'une permutation vaut $+1$ si la permutation est engendrée par un nombre pair d'échanges de deux éléments, et -1 sinon).

2.2. **Applications linéaires, déterminants et changements de volume.** Dans cette partie, on va aller très vite. On ne considèrera que des applications linéaires d'un espace dans un espace de même dimension.

Rappelons qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est une application du type $(x,y) \mapsto (ax+cy, bx+dy)$ qui ne contient que des polynômes du premier degré sans terme constant ; une telle application se caractérise par la propriété (linéarité) $f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

On peut toujours considérer un système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues comme donné par une telle application, et c'est dans ce cadre (issu de plein de problèmes pratiques) que l'on a pour la première fois rencontré des déterminants (Cramer, 18ème siècle) ; en particulier, la condition pour qu'un système de n équations à n inconnues possède une solution et une seule est que son déterminant soit non nul.

Si l'on veut comprendre comment une telle application change les volumes, on est conduit à calculer le déterminant du tableau de nombre (matrice) donné par les images des vecteurs de base. On travaille d'abord en considérant le carré de base, puis, par approximation, pour un domaine quarrable quelconque, approximé par une réunion de petits carrés.

Par exemple, supposons que nous voulions calculer l'aire du domaine délimité par l'ellipse d'équation $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. On peut calculer cette aire par un calcul d'intégrale un peu pénible (et qui nécessitera finalement un changement de variable) ; on peut aussi remarquer que l'application $(x,y) \mapsto (ax,by)$, qui est évidemment de déterminant ab, envoie le disque de rayon 1 et de centre 0 sur le domaine considéré ; comme on sait depuis le CM2 que l'aire de ce disque est π, on en déduit que l'aire de l'intérieur de l'ellipse est πab.

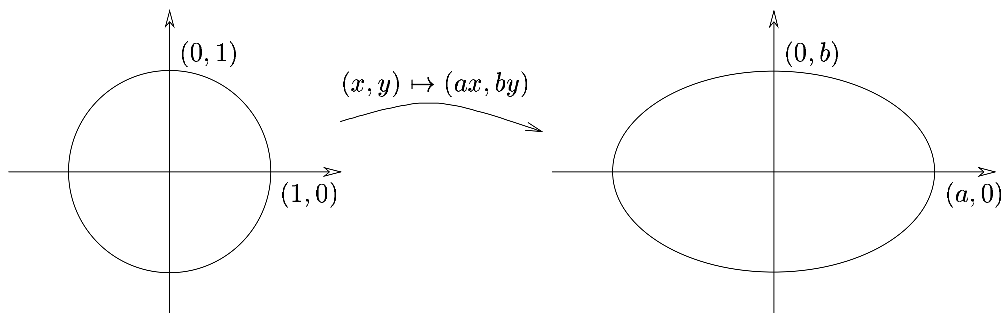

FIG. 10. L'aire de l'ellipse

2.3. **Approximation d'une application non-linéaire par une application linéaire : matrice jacobienne, jacobien.** On voudrait faire la même chose pour une application quelconque, plus forcément linéaire : par exemple pour l'application des coordonnées polaires $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Un raisonnement géométrique, ou physique, permet de conjecturer que le coefficient de changement de volume est proportionnel à r (voir figure 11, représentant cette application ; on voit que les droites horizontales sont envoyées, en préservant la longueur, sur des droites passant par l'origine, alors que les segments verticaux de longueur 2π sont envoyés sur des cercles de longueur $2\pi r$).

Bien entendu, dans ce cas, le coefficient de changement de volume n'a plus de raison d'être constant, il dépend du point considéré.

L'idée est de remplacer, en un point donné, une application par une application linéaire qui lui est proche au voisinage de ce point ; cette application, en un point fixé, est ce qu'on appelle l'application linéaire tangente au point considérée, ou encore la différentielle en ce point.

Attention à une confusion fréquente : si l'on change de point, l'application linéaire tangente change aussi (de même que, pour une fonction d'une variable réelle, la dérivée n'a pas de raison d'être constante, sauf pour une application affine du type $x \mapsto ax + b$). On peut donc considérer l'application qui, à chaque point, associe l'application linéaire tangente en ce point ; c'est ce qu'on appelle la différentielle (sous-entendu : globale, et non plus en un point fixé) de la fonction. Quand on parle de différentielle, il faut toujours savoir si c'est en un point fixé (et c'est alors une application linéaire) ou si c'est la différentielle globale (qui n'a pas de raison d'être linéaire).

Un exemple : si l'on considère l'application $x \mapsto x^3$, la différentielle au point 1 est l'application $h \mapsto 3h$; plus généralement, la différentielle au point x est l'application $h \mapsto 3x^2h$, dont on vérifie qu'elle est linéaire (x est constant, c'est h la variable). Par contre, l'application différentielle globale est l'application qui à x associe l'application $h \mapsto 3x^2h$; c'est maintenant x la variable, et cette application n'est pas linéaire !

Définition 2. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \quad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$. On appelle matrice jacobienne de Φ la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Définition 3. On appelle jacobien de Φ le déterminant de sa matrice jacobienne.

Le jacobien décrit de quelle façon l'application considérée dilate les volumes. Il y a deux applications principales :

- si le jacobien est non nul en un point, l'application est localement une bijection.
- la formule de changement de variables, à laquelle est consacrée les deux paragraphes qui suivent.

2.4. **Le changement de variable en dimension 1.** On connait la formule de dérivation d'une fonction composée :

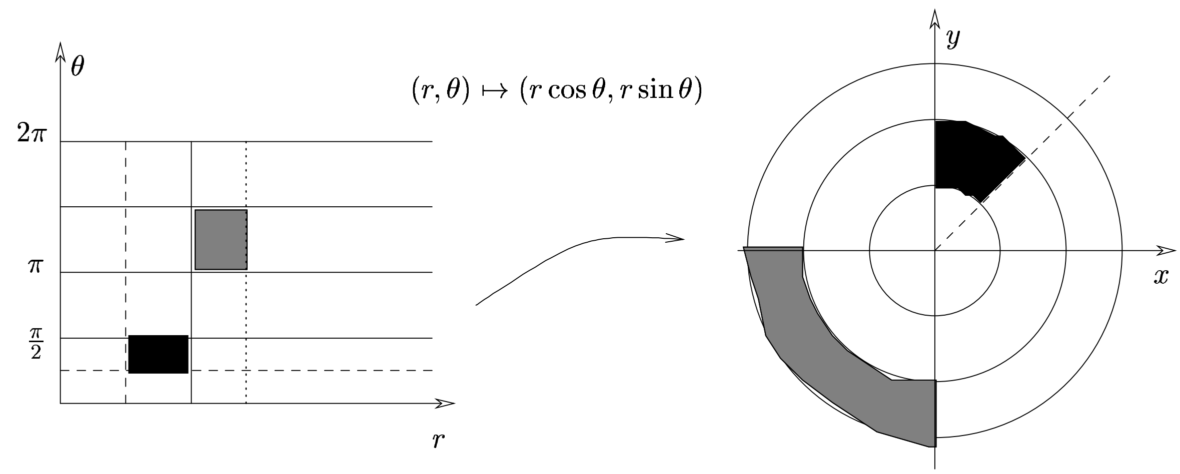

FIG. 11. Le changement de variables en coordonnées polaires

$$(F \circ \phi)'(t) = F' \circ \phi(t).\phi'(t)$$

Si l'on pose $F' = f$, on en déduit que, si toutes les fonctions considérées sont assez "bonnes" (disons, de classe C^1, c'est-à-dire dérivables et à dérivée continue, ce qui sera toujours le cas ici), on a (formule de changement de variable) :

$$\int_a^b f(\phi(t)).\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$$

Cette formule se vérifie immédiatement, puisque les deux intégrales, par la formule fondamental du calcul différentiel et intégral, valent $F(\phi(b)) - F(\phi(a))$.

Si ϕ est une bijection sur le domaine considéré, on peut définir ϕ^{-1}, l'application réciproque ; dans ce cas, on préfère souvent écrire :

$$\int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} f(\phi(t)).\phi'(t)\,dt = \int_c^d f(x)\,dx$$

Ce qui est plus commode, car l'intégrale de droite est du type que l'on rencontre habituellement, et on la remplace par celle de gauche, pour une fonction ϕ convenable. On posera ègalement $x = \phi(t)$ et $dx = \phi'(t)dt$.

Exemple : pour calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$ (qui donne l'aire d'un quart de disque ; voyez-vous pourquoi ?), on fait le changement de variables $x = \sin\theta$. Comme $\sin^{-1}(0) = 0$ et $\sin^{-1}(1) = \pi/2$, et que, sur $[0, \pi/2]$, on a $\sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$, on se trouve ramené à calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$, qui vaut $\pi/4$.

Attention ! il y a trois points à vérifier quand on change de variable : la variable elle-même, le symbole d'intégration (dx), et les bornes du domaine d'intégration.

Remarque : il n'est pas évident de donner une interprétation physique de la formule de changement de variables. On peut cependant essayer de la façon suivante : supposons que l'on veuille mesurer la température moyenne le long d'un segment de route de 100 kilomètres. Il suffit de promener le long de la route, à vitesse constante, un thermomètre enregistreur qui prend des mesures à intervalle régulier. En fait, si $T(x)$ est la température au point x, ce que l'on veut calculer, c'est juste $1/100 \int_0^{100} T(x)\,dx$. Si l'on se promène à 100km/h, on paramètre la route par le temps, avec $x = 100t$ (si la distance est exprimée en km, et le temps en heure, et on vérifiera que la température moyenne est maintenant $\int_0^1 T(t)\,dt$. Si par contre on parcourt les premiers 50 kilomètres à 150 km/h, ce qui prend 20 minutes, et les derniers 50 km à 75km/h, ce qui prend 40 minutes, on a aussi parcouru le chemin en une heure ; mais si l'enregistreur a continué à prendre ses mesures à intervalles constant, il a pris 2 fois plus de mesures dans la deuxième moitié de la route, ce qui fausse complètement le résultat ! il faut donc prendre autant de mesures dans les 20 premières minutes que dans les 40 dernières ; un petit calcul montre qu'il faut appliquer un coefficent 1,5 au debut, et 0,75 à la fin : c'est le terme en $f'(t)\,dt$ du changement de variable.

Remarque : comment définir $\int_b^a f(x)\,dx$? Il y a deux façons raisonnables de le faire :

- une façon "géométrique", par exemple si l'on considère f comme une densité, et l'intégrale comme la masse totale ; dans ce cas, un changement du sens de parcours ne devrait pas modifier le résultat, mais alors, il faudrait mettre une

valeur absolue dans la formule de changement de variable, car le changement $x \mapsto -x$ ne devrait pas modifier le résultat. De plus, la formule d'addition des domaines ne serait plus valable. En fait, on pourrait le faire, mais il faudrait changer toutes nos habitudes.
- une façon "algébrique" : on pose $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. C'est le même genre de chose que l'on a été conduit à faire pour la mesure algébrique des volumes, et cela rend les calculs bien plus commodes. C'est de plus physiquement justifié pour des calculs tels que celui d'une différence de hauteur, de potentiel, ou d'énergie.

En dimension 1, on utilise toujours la définition algébrique. Si nous insistons sur ce point, c'est que la situation est bien moins claire en dimension 2 ou plus ; nous allons voir qu'en fait, pour les intégrales multiples en dimension supérieure, on utilise toujours une définition géométrique, donc une valeur absolue apparaît dans le changement de variables, car l'intégrale d'une fonction positive doit toujours être positive. On arrivera plus tard à généraliser l'idée "algébrique", par l'usage des formes différentielles ; c'est plus difficile, mais c'est bien plus beau.

2.5. **Le changement de variables en dimension 2 et plus.** Donnons d'abord la formule : soit ϕ une bijection de $\phi^{-1}(K)$ dans K, et soit J_ϕ son jacobien ; on a :

$$\int_K f(x,y)\,dxdy = \int_{\phi^{-1}(K)} f(\phi(u,v))|J_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

Il est hors de question de prouver réellement cette formule, mais on peut donner un idée de la raison pour laquelle elle marche (aire d'un domaine infinitésimal).

Exemple : coordonnées polaires, cylindriques, sphériques : je laisse au lecteur le soin de retrouver les formules de ces changements de variables (voir les feuilles d'exercices) et de calculer leur jacobien.

Exemple d'utilisation : aire du disque, volume de la boule.

> *A retenir* : **Bien évidemment, la seule chose à retenir de ce chapitre est la formule de changement de variables, avec les trois modifications à effectuer dans l'intégrale : sur les variables, sur le symbole d'intégration $dx\,dy$ remplacé par $|J_\phi|\,du\,dv$, et sur le domaine. Mais pour pouvoir effectuer ce changement de variables, il faut, sauf si on le connaît par coeur (cas de coordonnées polaires, cylindriques et sphériques) être capable de calculer un jacobien, ce qui impose d'être capable de calculer la différentielle d'une fonction, et de savoir calculer un déterminant.**
>
> **De toute façon, ces connaissances, en particulier le calcul de la différentielle, seront indispensables plus tard (chapitre 6), autant s'y mettre tout de suite...**

3. Chemins paramétrés et nappes paramétrées

Résumé : Dans ce chapitre, on définit ce qu'est une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et une surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$, ou plus généralement une nappe paramétrée de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

On explique ce qu'est une orientation d'une nappe paramétrée, on mentionne le problème de l'orientabilité d'une surface (ruban de Moebius), et on explique comment on peut donner une orientation naturelle au bord d'une nappe orientée.

3.1. Courbes paramétrées dans le plan et l'espace.

Définition 4. On appelle chemin (ou courbe) paramétré(e) dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) une application différentiable définie sur un intervalle $[a, b]$ et à valeur dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).

Un chemin paramétré dans le plan pourra donc s'écrire sous la forme

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Il est important, quand on écrit ce genre de formule, de bien comprendre dans quel ensemble se trouve chacun des objets que l'on manipule : γ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)$ est un point de $\mathbb{R}^2$, qui a deux coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, ce qui sous-entend que x et y ne sont pas, dans le cadre de cet énoncé, des nombres réels, mais des fonctions $x : [a, b] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto x(t)$.

Le vecteur tangent à la courbe, qui est souvent utile, est le vecteur $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$.

3.2. Surfaces paramétrées dans l'espace.

Définition 5. On appelle surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ une application différentiable définie sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ et à valeur dans $\mathbb{R}^3$.

Il faudrait définir plus précisément ce qu'est un "domaine" de $\mathbb{R}^2$, mais cela nous entrainerait dans de grosses difficultés ; en pratique, les surfaces que nous considèrerons seront paramétrées par un domaine simple : rectangle, disque, secteur, ou le plan tout entier.

Un exemple particulièrement simple de surface est le graphe d'une fonction, par exemple la fonction $x^2 + y^2$, qui décrit le paraboloïde de révolution :

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2).$$

Un exemple plus complexe est donné par le paramétrage usuel (en physique) de la sphère unité (de rayon 1) :

$$\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad (\theta, \phi) \mapsto (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

Ou encore le paramétrage usuel en géographie par la longitude et la latitude :

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3 \quad (\phi, \theta) \mapsto (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta).$$

Remarquons que, pour une surface, il n'y a pas qu'un vecteur tangent, il y a (tout du moins aux points assez réguliers) un plan tangent, engendré par deux vecteurs tangents, donnés par les dérivées partielles par rapport aux coordonnées. En pratique, ces deux vecteurs tangents sont donnés par les colonnes de la matrice jacobienne.

3.3. Nappes paramétrées de dimension p dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 6. De façon plus générale, on appelle nappe paramétrée de dimension p de $\mathbb{R}^n$ une application différentiable (de différentielle non dégénérée) d'un domaine de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Le domaine de dimension p de $\mathbb{R}^n$ (non paramétré) est l'image de l'application.

En pratique, nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser dans ce cours de nappe de dimension plus grande que 2 (courbes et surfaces) à l'exception des volumes de $\mathbb{R}^3$, qui sont paramétrés de façon évidente par eux-mêmes, et pour lesquels cette définition ne sert à rien ; elle pourrait par contre être utile dans $\mathbb{R}^4$, qui est utilisé en relativité.

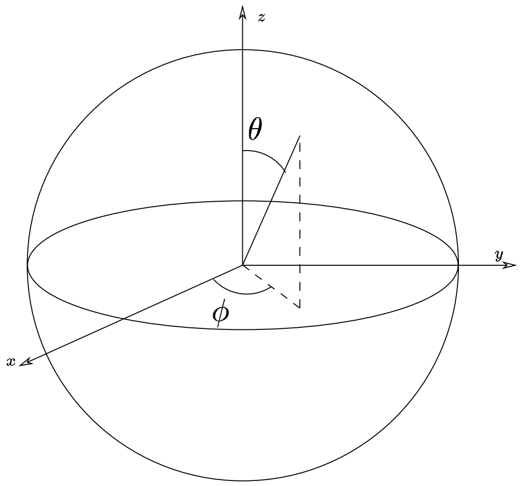

FIG. 12. Le paramétrage physique de la sphère unité

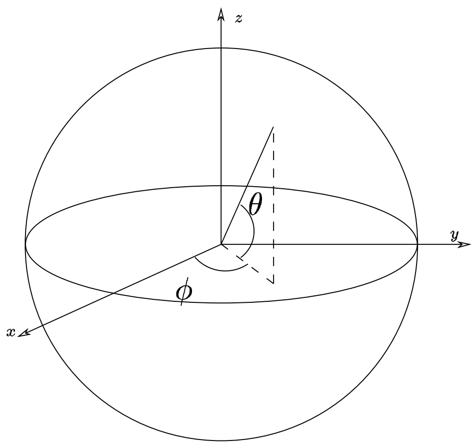

FIG. 13. Le paramétrage géographique de la sphère

3.4. **Bord d'une nappe paramétrée.** Nous ne donnerons pas de définition formelle du bord d'une nappe paramétrée, l'intuition est suffisante pour faire tous les exercices, et toute définition rigoureuse conduit à un formalisme assez délicat qui sort de l'objectif de ce cours.

Nous ferons seulement une remarque : le bord ∂K de K peut être vide (cas de la sphère), mais sinon on a dimension(K)=dimension(∂K)+1 : le bord d'une courbe non fermée (ouverte) est formé de deux points, le bord d'une surface est formé de courbes, etc...

3.5. **Orientation d'un espace vectoriel.** Si nous considérons un espace vectoriel de dimension finie (disons $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), et deux bases de cet espace, on sait qu'il existe une et une seule application linéaire qui envoie la première base sur la seconde.

Définition 7. On dit que deux bases de $\mathbb{R}^n$ ont même orientation si l'application linéaire qui passe de l'une à l'autre a un déterminant positif; dans le cas contraire, on dit qu'elles ont une orientation opposée.

C'est un bon exercice d'algèbre linéaire de montrer le théorème suivant :

Théorème 6. *la relation "avoir même orientation" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de* $\mathbb{R}^n$*, qui possède exactement deux classes d'équivalence.*

Démonstration. Ce théorème repose sur les deux faits suivants : si f et g sont deux applications linéaires bijectives de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, alors $\det(f \circ g) = \det f . \det g$, et $\det f^{-1} = 1/\det f$ □

Par définition, orienter l'espace, c'est choisir une des deux classes d'équivalence comme étant l'ensemble des bases orientées positivement. C'est un choix conventionnel("sens inverse des aiguilles d'une montre" dans le plan, choix de la droite ou de la gauche dans l'espace) ; il n'existe pas de raison de choisir comme orientation positive une des deux classes plutôt qu'une autre, mais certains phénomènes physiques ("bonhomme d'Ampère") sont liés à une orientation particulière de l'espace.

Remarquez que si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$: l'ordre dans lequel on énumère une base est fondamental pour l'orientation, et en toute rigueur il aurait fallu, ce que nous avons déjà sous entendu plus haut, parler de "bases ordonnées" de $\mathbb{R}^n$.

3.6. **Orientation d'une nappe paramétrée.**

Définition 8. Orienter une nappe paramétrée, c'est choisir une orientation en tout point de l'espace tangent, de façon continue.

Ce n'est pas toujours possible, comme le montre la figure ci-dessous :

Le ruban de Möbius possède une foule de qualités interessantes, toutes dues à sa non-orientabilité : il n'a qu'un seul côté (on peut le peindre sur les deux faces sans jamais lever le pinceau), si on le découpe suivant la longueur avec des ciseaux (en suivant la courbe pointillée sur la figure), on n'obtient qu'un seul morceau, etc...

Cependant, toutes les surfaces que nous rencontrerons dans ce cours sont orientables ; il ne serait pas possible de travailler sur une surface non orientable (en particulier, cela n'a pas de sens de calculer un flux à travers une surface non orientable, car on ne peut pas définir de façon cohérente une direction sortante.

3.7. **Orientation induite sur le bord.** Soit K une nappe paramétrée orientée de dimension p, et ∂K son bord. Soit Q un point du bord. Alors, l'espace F tangent à ∂K en Q est un sous-espace de dimension $p-1$ de l'espace E tangent à K en Q. Soit $\vec{n}$ un vecteur de E qui n'est pas dans F, et qui est dirigé vers l'extérieur (vecteur sortant). Une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{p-1})$ de F est dite positivement orientée ou base directe (pour l'orientation choisie sur E) si la base $(\vec{n}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{p-1})$ est une base positivement orientée de E.

En pratique, nous aurons uniquement à choisir l'orientation du bord d'une surface ou d'un volume ; pour l'orientation du bord d'une surface, on se ramène à la règle bien connue "laisser la surface sur sa gauche lorsqu'on parcourt le bord", c'est un peu plus compliqué pour le bord d'un volume ; la règle est résumée dans le dessin ci-dessous :

A retenir : **Il faut savoir reconnaître une courbe et une surface, et savoir trouver un paramétrage d'une courbe ou d'une surface définie de façon géométrique. Il est aussi important pour la**

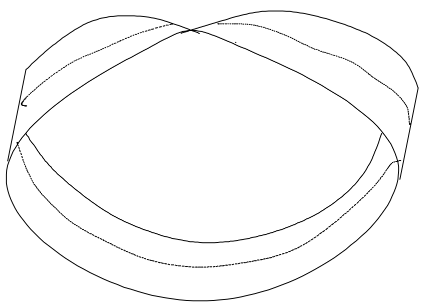

FIG. 14. Le ruban de Möbius

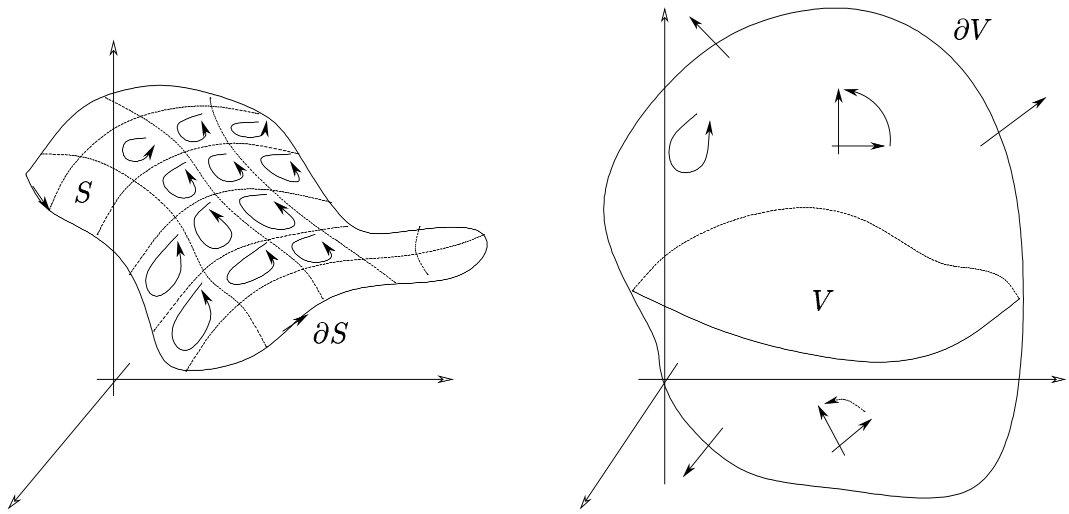

FIG. 15. L'orientation du bord pour les surfaces et les volumes

suite de savoir trouver l'orientation canonique du bord d'une surface orientée.

4. Formes différentielles de degré p dans $\mathbb{R}^n$

Résumé : On définit de façon formelle les formes différentielles de degré p dans $\mathbb{R}^n$. On donne des exemples pour diverses valeurs de p et n (en particulier, la différentielle d'une fonction est une forme de degré 1).

On définit le produit extérieur de deux formes de degrés respectifs p et q, qui est une forme de degré $p+q$. On donne les règles de manipulation du produit extérieur ; en particulier, $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, ce qui entraîne que $dx \wedge dx = 0$. Une conséquence importante est que dans $\mathbb{R}^n$, toute forme de degré supérieur à n est nulle.

4.1. **Formes différentielles en coordonnées : Définition, exemples.**

Définition 9. On considère l'espace $\mathbb{R}^n$, muni des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On appelle forme différentielle de degré p dans $\mathbb{R}^n$ une somme d'un nombre fini de termes du type $f_{i_1,\ldots,i_p}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$

Cette définition est purement formelle : nous n'avons défini qu'une notation, et introduit sans dire ce qu'ils recouvrent les termes dx_i. On peut donner un sens plus précis, mais cela nous entrainerait trop loin. Nous allons d'abord donner quelques exemples, puis voir comment on peut manipuler ces formes, et en particulier quelles sont les règles qui gouvernent l'usage du produit extérieur $\wedge$; elles sont assez semblables, comme la notation l'indique, aux règles d'usage du produit vectoriel usuel.

Tout d'abord, une forme de degré 0 n'est rien d'autre qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$.

Une forme de degré 1 est une somme de termes de la forme $f_i(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i$; en dimension 1, où il n'y a qu'une variable x, elle est de la forme $f(x)\, dx$. En dimension 2, avec deux variables habituellement appelées x et y, elle est de la forme $f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$.

De manière générale, on voit qu'une forme différentielle de degré 1 dans $\mathbb{R}^n$ est complètement déterminée par n fonctions (les coefficients de dx_i).

Un cas particulier de forme de degré 1 est donné par la différentielle d'une fonction : si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$df = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

est une forme de degré 1 ; nous verrons au chapitre 6 une généralisation de cette construction.

4.2. **Produit extérieur : règles d'usage.** Nous n'avons pas encore défini les règles qui régissent le produit extérieur ; il y en a deux :

- le produit extérieur est associatif ; c'est pour cela que nous n'avons pas besoin de parenthèse pour $dx \wedge dy \wedge dz$, qui vaut $(dx \wedge dy) \wedge dz$ ou $dx \wedge (dy \wedge dz)$
- le produit extérieur est antisymétrique : $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

Attention ! De la dernière règle, on déduit que $dz \wedge dx \wedge dy = dx \wedge dy \wedge dz$; en effet, pour faire passer le dz devant, il faut faire commuter deux fois, ce qui rétablit le signe de départ !

Une conséquence très importante de l'antisymétrie est le théorème suivant :

Théorème 7. *on a :* $dx \wedge dx = 0$

En effet, on doit avoir, en échangeant les deux termes, $dx \wedge dx = -dx \wedge dx$, d'où le résultat.

Une conséquence est que, si dans un produit $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, deux des termes sont identiques, alors, en faisant commuter, on peut les mettre l'un à côté de l'autre, et le produit est nul ; pour que le produit soit non nul, il faut que tous les termes soient distincts. Ceci n'est possible que s'il y a au plus n termes, d'où le résultat :

Théorème 8. *Dans $\mathbb{R}^n$, toute forme de degré $p > n$ est nulle.*

4.3. **Produit extérieur de deux formes différentielles.** De façon plus générale, on peut définir le produit extérieur de deux formes α et ω ; il suffit de le définir pour 2 termes, et d'étendre par distributivité.

Définition 10. Soient $\alpha = f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ et $\omega = g(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}$ deux formes différentielles de degré respectif p et q. Le produit extérieur de α et ω, prises dans cet ordre, est $\alpha \wedge \omega = f(x_1, \ldots, x_n) g(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}$, qui est une forme de degré $p + q$

La règle d'antisymétrie s'étend de la façon suivante :

Théorème 9. *si α et ω sont deux formes différentielles de degré respectif p et q, on a : $\alpha \wedge \omega = (-1)^{pq} \omega \wedge \alpha$.*

4.4. **Forme canonique d'une forme de degré 2 ou 3 dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.** Dans $\mathbb{R}^2$, on a deux variables x et y ; puisque $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, on peut mettre $dx \wedge dy$ en facteur, et on voit que toute forme de degré 2 dans $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme $f(x, y) dx \wedge dy$.

De même dans $\mathbb{R}^3$, un calcul un peu plus compliqué montre que toute forme de degré 3 peut s'écrire sous la forme $f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$.

C'est un résultat général : dans $\mathbb{R}^n$, toute forme de degré n est entièrement déterminée par une seule fonction.

On a donc complètement décrit les formes différentielles dans $\mathbb{R}^2$: en degré 0, ce sont des fonctions, en degré 1, elles sont déterminées par 2 fonctions, en degré 2, elles sont déterminées par une seule fonction, en degré plus grand, elles sont nulles.

Dans $\mathbb{R}^3$, il reste à considérer les formes de degré 2 ; un calcul simple montre que ces formes peuvent toujours se mettre sous la forme $A(x, y, z) dy \wedge dz + B(x, y, z) dz \wedge dx + C(x, y, z) dx \wedge dy$, et on voit qu'une telle forme est complètement déterminée par les 3 fonctions A, B, C.

En résumé, dans $\mathbb{R}^3$, les formes de degré 0 et 3 sont définies par une seule fonction, les formes de degré 1 et 2 sont définies par 3 fonctions, et les formes de degré supérieur à 3 sont nulles.

4.5. **Forme canonique d'une forme différentielle de degré p en dimension quelconque.** Si l'on regarde le nombre de fonction nécessaire pour déterminer une forme dans $\mathbb{R}^n$, on voit que, pour les petites dimensions, on trouve le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

Ceci devrait vous rappeler quelque chose : c'est le début du triangle de Pascal, qui donne les coefficients du binôme. Effectivement, on peut montrer que, pour définir une forme de degré p dans $\mathbb{R}^n$, il faut C_n^p fonctions, ce qui permet de retenir facilement les valeurs ci-dessus.

A retenir :**Il faut connaître la définition d'une forme différentielle, savoir reconnaître le degré d'une forme, et savoir manipuler le produit extérieur.**

Il faut retenir, et savoir manipuler, l'antisymétrie du produit extérieur (règles $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ et $dx \wedge dx = 0$).

Il faut savoir que toute forme de degré supérieur à n dans $\mathbb{R}^n$ est nulle, ce qui simplifie souvent les calculs.

Il faut savoir qu'une forme de degré 0 est une fonction, qu'une forme de degré n dans $\mathbb{R}^n$ est entièrement déterminée par une fonction, et qu'une forme de degré 1 ou $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ est entièrement déterminée en coordonnées par n fonctions ; ces cas recouvrent tous ceux qu'on aura à traiter en pratique, le premier cas non couvert par cette règle étant celui d'une forme de degré 2 dans $\mathbb{R}^4$, que nous ne rencontrerons pas dans ce cours.

5. Image réciproque d'une forme différentielle de degré p par une application différentiable

Résumé : On montre comment calculer explicitement l'image réciproque d'une forme différentielle par une application différentiable, ce qui est particulièrement utile pour étudier la restriction d'une forme différentielle à une nappe paramétrée.

5.1. **Image réciproque d'une forme par une application différentiable.** Etant donnée une application différentiable ϕ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, et une forme α de degré q dans $\mathbb{R}^n$, on peut définir l'image réciproque de α par ϕ ; c'est une forme de degré q dans $\mathbb{R}^p$, notée $\phi^*(\alpha)$. On donne seulement le mode de calcul :

Si l'on prend des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sur $\mathbb{R}^n$, et $(y_1, \dots, y_p)$ dans $\mathbb{R}^p$, on peut définir ϕ par des fonctions $x_i(y_1, \dots, y_p)$. On obtient l'image réciproque en remplaçant dx_i par $\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$.

Il est clair sur cette expression que cette opération ne change pas le degré de la forme.

Remarquons en particulier, car c'est le cas qui sert le plus souvent en pratique, que si α est de degré p, et si $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est une nappe paramétrée de dimension p dans $\mathbb{R}^n$, alors $\phi^*(\alpha)$ est une forme de degré p dans $\mathbb{R}^p$, donc elle est complètement déterminée par une seule fonction, comme on l'a vu dans le chapitre précédent.

A retenir :**Il faut être capable de calculer explicitement l'image réciproque d'une forme par une application différentiable**

$$(y_1, \dots, y_p) \mapsto (x_1(y_1, \dots, y_p), \dots, x_n(y_1, \dots, y_p)),$$

ce qui se fait en remplaçant dans l'expression de la forme x_i par sa valeur $x_i(y_1, \dots, y_p)$, et dx_i par la 1-forme différentielle $dx_i(y_1, \dots, y_p)$. Cette opération ne change pas le degré de la forme.

6. Dérivation extérieure

Résumé : On explique comment calculer la différentielle extérieure $d\omega$ d'une forme ω de degré p. $d\omega$ est une forme de degré $p+1$.

On montre la formule $d \circ d = 0$.

6.1. **Définition de la dérivation extérieure.** Pour définir la dérivation extérieure d'une forme différentielle ω, il suffit de définir la dérivation d'un terme, et d'étendre par linéarité ; la dérivée extérieure d'un terme se définit de la façon suivante :

Définition 11. La dérivée de $\omega = f(x_1, \dots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ est

$$d\omega = \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Remarquons d'abord que, d'après cette formule, la dérivée extérieure d'une forme de degré p est une forme de degré $p+1$; en particulier, la dérivée extérieure d'une forme de degré maximum n est toujours nulle.

Une autre remarque est que la dérivée extérieure d'une forme de degré 0, c'est-à-dire d'une fonction f, n'est rien d'autre que sa différentielle $df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j$.

Si l'on sait calculer des dérivées partielles (ce qui demande simplement de savoir dériver des fonctions usuelles) et manipuler le produit extérieur, le calcul de la dérivée extérieure d'une forme donnée ne présente aucune difficulté.

6.2. **Propriétés fondamentales de la dérivation extérieure.**

Théorème 10. $d \circ d = 0$. *Autrement dit, si l'on prend deux fois de suite la dérivée extérieure d'une forme différentielle, on obtient toujours 0.*

C'est un bon exercice de vérifier cette propriété sur des formes différentielles données : on a automatiquement la correction de l'exercice, puisqu'on doit trouver 0 à la fin.

On peut facilement prouver ce théorème dans le cas d'une forme de degré 0, c'est-à-dire une fonction f ; un petit calcul montre que la nullité de ddf est équivalente au fait que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

ce qui est toujours vrai pour une fonction de classe C^2 (théorème de Schwarz).

Théorème 11. *Si α et ω sont deux formes différentielles de degré respectif p et q, on a : $d(\alpha \wedge \omega) = d\alpha \wedge \omega + (-1)^p \alpha \wedge d\omega$.*

6.3. **Interprétation vectorielle de la dérivation extérieure.** On a vu dans les feuilles d'exercice que, dans $\mathbb{R}^3$, les formes de degré 0 et 3 correspondent à des fonctions, tandis que les formes de degré 1 et 2, qui sont déterminées par trois fonctions, correspondent à des champs de vecteurs.

Au champs de vecteurs de coordonnées (A, B, C) (où A, B, C sont trois fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$) on fait correspondre, s'il s'agit de calculer une circulation, la 1-forme $A\,dx + B\,dy + C\,dz$; pour calculer un flux, on lui fait correspondre la 2-forme $A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy$.

On peut ainsi, suivant les degrés, faire correspondre à la dérivation extérieure des opérations sur les fonctions et les champs de vecteurs. À la dérivation extérieure d'une fonction, qui donne une 1-forme, correspond une opération qui, à une fonction, fait correspondre un champ de vecteurs : c'est le gradient. À la dérivation extérieure d'une 1-forme, qui donne une 2-forme, correspond une opération qui, à un champ de vecteurs, associe un autre champ de vecteurs ; c'est le rotationnel. Enfin, à la dérivation extérieure d'une 2-forme, qui donne une 3-forme, correspond une opération qui, à un champ de vecteurs, associe une fonction : c'est la divergence.

La formule $d \circ d = 0$ correspond ainsi à deux formules classiques : $\vec{rot}(\vec{grad}) = 0$ et $div(\vec{rot}) = 0$.

A retenir : **Il faut savoir, ce qui est facile, calculer explicitement la dérivée extérieure d'une forme différentielle donnée.**

Il faut savoir que la dérivation extérieure augmente le degré de 1, et que le carré de la dérivation extérieur est toujours nul : si on prend deux fois de suite la dérivée extérieure d'une forme différentielle, quelle que soit la forme, on trouve 0

Il faut retenir, à cause de leurs nombreuses applications en physique, les interprétations en termes de champs de vecteurs des formes différentielles et de la dérivation extérieure.

7. Intégration des formes différentielles

Résumé : Une forme différentielle de degré p peut être intégrée sur une nappe paramétrée de degré p. On explique comment le faire dans le cas de degré maximum n, où cela revient à une intégrale multiple ordinaire, puis comment faire dans le cas général, en prenant l'image réciproque de la forme par le paramétrage de la nappe, ce qui nous ramène à une forme de degré p sur un domaine de $\mathbb{R}^p$, et donc au cas précédent.

7.1. Intégration d'une forme différentielle de degré 2 dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 12. Soit ω une forme de degré 2 sur $\mathbb{R}^2$; posons $\omega = f(x,y)\,dx \wedge dy$. Soit K une région bornée de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de ω sur K, notée $\int_K \omega$, est le nombre $\int_K f(x,y)\,dx\,dy$.

À remarquer que l'ordre des coordonnées est important pour le signe de l'intégrale : c'est le problème de l'orientation.

7.2. Intégration d'une forme de degré maximum dans $\mathbb{R}^n$. De la même façon que dans la section précédente, on se ramène à l'intégration d'une fonction, en retirant les $\wedge$. Autrement dit, si K est un sous-ensemble de dimension maximale de $\mathbb{R}^n$, et si $\omega = f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ est une forme de degré n, alors, par définition :

$$\int_K \omega = \int \ldots \int_K f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$$

7.3. Intégration d'une forme de degré 1 sur un chemin. Exemple de $\mathbb{R}^2$: on paramètre le chemin en $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, et on remplace dx par $x'(t)\,dt$ et dy par $y'(t)\,dt$.

On voit que le résultat obtenu ne dépend que de la forme donnée et du chemin orienté, mais que pour le calcul effectif, le paramétrage est indispensable ; ce paramétrage permet de se ramener à intégrer une 1-forme sur $\mathbb{R}$.

On va généraliser aux formes de degré p ; on les intègre sur un domaine de dimension p, qu'il faut paramétrer par un domaine de $\mathbb{R}^p$, sur lequel on ramène la forme pour l'intégrer, comme on l'a fait ci-dessus. On utilise donc tous les outils que l'on a défini dans les chapitres précédents : paramétrage d'un domaine de dimension p de $\mathbb{R}^n$, image réciproque d'une forme par une application différentiable, et pour finir, intégrale d'une forme de degré p sur un domaine de $\mathbb{R}^p$.

7.4. Intégration d'une forme de degré p sur un sous-ensemble de dimension p de $\mathbb{R}^n$. Les formes différentielles de degré p sont faites pour être intégrées sur des ensembles de dimension p. On vient de voir que les formes différentielles de degré 1 s'intègrent sur des chemins. De manière analogue, on paramètre le sous-ensemble de dimension p par un domaine de $\mathbb{R}^p$, et on prend l'image réciproque de la forme. On obtient une forme de degré p sur un domaine de $\mathbb{R}^p$, on peut donc intégrer comme dans la première section. On a le théorème non évident suivant :

Théorème 12. *Soit K un domaine orientable de dimension p de $\mathbb{R}^n$, et soit α une forme de degré p. Soit $\phi : B \subset \mathbb{R}^p \to K$ un paramétrage qui respecte l'orientation. On appelle intégrale de α sur K, et on note $\int_K \alpha$, l'intégrale de $\phi^*\alpha$ sur B. Cette intégrale ne dépend pas du paramétrage ϕ choisi.*

Il est hors de question de démontrer ce théorème ; en dimension 1, c'est le théorème de changement de variable.

7.5. **Exemples : travail, flux.** On vient de voir qu'une forme de degré p s'intègre sur une nappe de dimension p. En particulier, une fonction s'intègre sur un domaine de dimension 0, c'est–dire sur un point : intégrer f au point p, c'est simplement calculer $f(p)$!

Passons à quelque chose de moins trivial : une forme de degré 1 dans $\mathbb{R}^3$ s'intègre sur une courbe ; comme on a vu précédemment, cette forme correspond à un champ de vecteurs, et intégrer la forme sur la courbe correspond exactement à calculer la circulation du champ de vecteur le long de la courbe.

Une forme de degré 2, elle, s'intègre sur une surface ; elle correspond aussi à un champ de vecteur, mais ce que l'on calcule maintenant, c'est le flux de ce champ de vecteur à travers la surface.

> *A retenir* : **Le fait qu'une forme différentielle de degré p s'intègre sur un ensemble de dimension p. Cela n'a pas de sens d'intégrer une forme de degré 2 sur une courbe.**
>
> **La méthode pour calculer explicitement une telle intégrale : paramétrer explicitement le domaine, prendre l'image réciproque de la forme et se ramener à une intégrale multiple.**

8. Formule de Stokes

Résumé : On énonce la formule de Stokes ; on en donne différents cas suivant les valeurs de p et q, et on amorce la preuve dans le cas le plus simple.

On tire quelques conséquences et extensions de la formule de Stokes (théorème de Poincaré, intégration d'une forme fermée sur le bord d'un domaine, et d'une forme exacte sur un domaine sans bord)

8.1. **La formule de Stokes : énoncé.** Nous en savons maintenant assez pour énoncer la formule générale de Stokes :

Théorème 13. *Soit α une forme différentielle de degré p dans $\mathbb{R}^n$, et K un domaine orienté de dimension $p+1$ dans $\mathbb{R}^n$. On note ∂K le bord orienté de K (c'est un domaine de dimension p) ; on a :*

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha$$

Nous avons appris dans les chapitres précédents ce qu'est α (forme différentielle de degré p sur $\mathbb{R}^n$), comment on calcule $d\alpha$, et comment on peut intégrer α sur un domaine de dimension p (on paramètre le domaine par un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et on prend l'image réciproque de la forme α par le paramétrage en question, on obtient ainsi une forme de degré p sur $\mathbb{R}^p$, que l'on peut intégrer en se ramenant à l'intégration d' une fonction).

Rappelons que l'orientation du bord est obtenue en prenant un vecteur tangent à K qui pointe vers l'extérieur, et en décidant que toute base de l'espace tangent au bord qui complète ce vecteur en une base positive de l'espace tangent est une base positive de l'espace tangent au bord (voir le chapitre 3). Donnons tout de suite deux corollaires importants :

Corollaire 1. *L'intégrale sur un domaine sans bord de la dérivée d'une forme différentielle est nulle.*

En effet, si ∂K est vide (cas par exemple de la sphère), on a $\int_K d\alpha = \int_\emptyset \alpha = 0$.

Corollaire 2. *si une forme est de dérivée nulle, son intégrale sur le bord d'un domaine est toujours nulle.*

Même raisonnement.

On reverra plus tard ces corollaires, qui admettent des prolongements considérables.

8.2. **Un cas trivial : la formule du gradient.** Le cas le plus simple est celui où la forme est d'ordre 0, c'est-à-dire que c'est une fonction f ; la dérivée $d\alpha$ est donc dans ce cas la différentielle df. Le domaine K doit être de dimension 1 : c'est donc un chemin orienté, et son bord est constitué de deux points.

On peut encore simplifier, en supposant que tout se passe dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, le chemin orienté est un intervalle $[a, b]$, dont le bord est $b, -a$.

On a alors $\int_{\partial K} f = f(b) - f(a)$, et $df = f'(t)\, dt$, donc $\int_K df = \int_a^b f'(t)\, dt$; dans ce cas, le théorème se réduit à la formule bien connue :

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$$

.

Remarquez que cette formule n'est pas évidente : si l'on regarde uniquement la définition (surface sous la courbe, tangente à la courbe), il n'est pas clair conceptuellement que l'intégration soit la procédure inverse de la dérivation.

Si l'on se place dans $\mathbb{R}^n$, les choses deviennent plus compliquées. Prenons $n = 2$, cela marche de façon semblable en dimension plus grande. On a une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ de deux variables, de différentielle $df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$, et un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, de bord $(-\gamma(a), \gamma(b))$

On a alors $\int_{\partial\gamma} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Pour l'autre intégrale, il faut un peu plus calculer : on paramètre le chemin par $[a, b]$, et on tire la forme df en arrière par le paramétrage ; au point $\gamma(t)$, la forme différentielle obtenue est $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, dy$;l'application linéaire tangente à γ est l'application $h \mapsto \gamma'(t).h = (x'(t).h, y'(t).h)$; l'image réciproque de la forme par l'application linéaire tangente est la forme $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)\, dt$ (attention, nous sommes en dimension 1, il n'y a donc que dt ! l'image réciproque de dy par γ est $y'(t)\, dt$.

La forme obtenue est donc : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)\right)\, dt$; il n'est pas très difficile de vérifier qu'il s'agit là de la différentielle de la fonction $f \circ \gamma$, fonction d'une variable : $t \mapsto f(x(t), y(t))$. Notre formule, après changement de variable, se réduit donc à la précédente.

Une autre manière de l'exprimer : la circulation du gradient d'une fonction le long d'un chemin est égale à la différence des valeurs de la fonction entre l'extrémité et l'origine du chemin.

Remarquons que, pour qu'une 1-forme soit un gradient, il est nécessaire que sa différentielle extérieure soit nulle ; on peut montrer (théorème de Poincaré) que c'est aussi suffisant quand on est dans $\mathbb{R}^n$, ou plus généralement dans un domaine convexe.

8.3. **Un cas particulier : la formule de Green Riemann ; idée de la preuve.** Nous supposons maintenant le cas suivant : α est une 1-forme dans $\mathbb{R}^2$, K est un domaine du plan dont le bord est une courbe γ, orientée pour laisser K à sa gauche.

On peut donc poser $\alpha = Pdx + Qdy$, où P et Q sont deux fonctions de 2 variables ; au point (x, y), la forme différentielle α définit la forme linéaire $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$.

On calcule facilement la dérivée $d\alpha$, qui est une 2-forme dans $\mathbb{R}^2$, donc déterminée par une seule fonction. On a :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

On va supposer que $\alpha = Q\, dy$, l'autre composante s'étudie de la même façon. On va aussi supposer que le domaine K est le carré $[a, b] \times [c, d]$; c'est un travail purement technique, quoique difficile, de montrer que, si l'on sait montrer la formule sur un carré, on peut toujours passer à la limite, et la montrer pour un domaine K régulier quelconque.

On a donc, d'un côté,

$$\begin{aligned}\int_K d\alpha &= \int_K \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_c^d Q(b,y) - Q(a,y)\, dy\end{aligned}$$

où le seul pas important est de remarquer que, pour y fixé, on a $\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\, dx = Q(b,y) - Q(a,y)$, ce qui est simplement la formule du gradient en dimension 1.

Il reste à paramétrer le chemin ; on peut le faire en 4 morceaux, le premier est $t \mapsto (a+t(b-a), c)$,le second est $t \mapsto (b, c+t(d-c))$, le troisième $t \mapsto (b+t(a-b), d)$, et le dernier $t \mapsto (a, d+t(c-d))$ (on a paramétré les 4 morceaux sur $[0,1]$, on pourrait en se fatiguant tout faire sur $[0,4]$).

On vérifie facilement que l'intégrale de la forme $Q\, dy$ est nulle sur le premier et le troisième morceau, car l'image réciproque de la forme est nulle. Sur le second morceau, l'intégrale est $\int_c^d Q(b,y)\, dy$, et sur le quatrième, elle est $\int_d^c Q(a,y)\, dy$; en tenant compte de l'orientation du chemin, on retrouve bien la formule précédente.

8.4. **Une application de la formule de Green Riemann : le calcul des surfaces, et l'aire de la boucle du folium de Descartes.** Pour calculer l'aire de K dans $\mathbb{R}^2$, on intègre la fonction 1 sur K, ou, ce qui revient au même, la forme $dx \wedge dy$; cette forme est la dérivée de $x\, dy$ ou de $-y\, dx$, d'où le résultat :

Théorème 14. *Si K est un domaine de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est un arc régulier γ, l'aire A de K est donnée par :*

$$A = \int_\gamma x\, dy = \int_\gamma -y\, dx = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\, dy - y\, dx)$$

Par exemple, on considère la courbe $x^3 + y^3 = 3yx$ (folium de Descartes) ; elle contient une boucle, dont il semble a priori très difficile de calculer l'aire.

On commence par paramétrer la courbe, en regardant en quel point, pour t fixé, la droite $y = tx$ la recoupe (autrement dit, on paramètre par $t = y/x$) ; on trouve une équation du 3eme degré qui admet 0 comme racine double, il reste une racine simple $x = 3t/(1+t^3)$, et $y = 3t^2/(1+t^3)$: voilà le paramétrage cherché. Le bord de la boucle est obtenu pour t entre 0 et $+\infty$; on utilise la troisième formule, en remplaçant x et y par leur valeur :

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_\gamma (x\, dy - y\, dx) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{3t}{1+t^3}\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2} - \frac{3t^2}{1+t^3}\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\right) dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{3t^2}{(1+t^3)^2}\, dt = \frac{3}{2}\left[\frac{-1}{1+t^3}\right]_0^{+\infty} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

En remarquant que $x\, dy - y\, dx = x\, d(xt) - xt\, dx = x^2\, dt$, on passe directement à la dernière ligne du calcul en évitant des calculs intermédiaires sources d'erreurs.

8.5. **Les formules classiques.** Dans une prochaine édition du polycopié, on trouvera ici les formules classiques, que je n'ai pas eu le temps de présenter correctement ; je laisse au lecteur studieux un peu de place pour les énoncer lui-même :

8.6. **Formes différentielles exactes et fermées.** On se pose souvent en physique la question de savoir si un champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire, au moyen du gradient (tel le champ électrique), ou d'un potentiel vecteur, au moyen du rotationnel (cas du champ magnétique). Un tel potentiel n'est pas évident à trouver, en particulier dans le cas du potentiel vecteur ; si l'on pose le problème en terme de formes différentielles, on voit que l'on n'a affaire qu'à un seul problème : étant donné une forme ω(de degré 1 ou 2, dans les cas qui nous intéressent), existe-t-il une forme α telle que $\omega = d\alpha$.

Les définitions et résultats qui suivent apportent la réponse à ce problème.

On dit qu'une forme différentielle α est *exacte* s'il existe une forme différentielle ω telle que $\alpha = d\omega$; on dit que α est une forme *fermée* si $d\alpha = 0$. Les propriétés de la dérivation extérieure ($d \circ d = 0$) entraînent aussitôt :

Proposition 1. *Toute forme différentielle exacte est fermée*

Il y a une réciproque partielle :

Théorème 15. *Sur un domaine convexe, toute forme différentielle fermée est exacte.*

Sur des domaines avec des trous (par exemple, $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, ou $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe OZ, ce n'est plus vrai ; cela pourrait sembler anecdotique, mais c'est en réalité fondamental : exemple du champ créé par un fil électrique, en $d\theta$, qui n'admet pas de primitive.

On remarquera une dualité entre les formes et les domaines :

On dit qu'un domaine borné est un cycle s'il n'a pas de bord, et que c'est un bord s'il est le bord d'un autre domaine borné. On constate facilement (mais on ne le démontre pas facilement !) :

Proposition 2. *Tout bord est un cycle*

Théorème 16. *Dans un domaine convexe, tout cycle est un bord*

C'est faux,par exemple, dans le plan privé d'un point.

Si on a une p-forme différentielle α, et un domaine K de dimension p, on pose $< \alpha, K >= \int_K \alpha$; c'est un peu comme un produit scalaire. Les théorèmes que l'on avait écrit plus haut se réécrivent facilement dans ce langage, de façon très symétrique :

Théorème 17. *Une forme fermée s'annule sur les bords ; une forme exacte s'annule sur les cycles.*

En particulier, on dit que deux cycles K_1 et K_2 sont homologues si leur différence (c'est-à-dire la réunion de K_1, et du cycle K_2 muni de l'orientation opposée) est un bord ; il est alors facile de montrer que si α est une forme fermée, elle prend la même valeur sur deux cycles homologues.

> *A retenir* : **La formule de Stokes résume les différents cas particuliers classiques (formule du gradient –Newton-Leibniz, du rotationnel –Green-Riemann ou Stokes, de la divergence –Gauss-Ostrogradsky).**
>
> **Les formes exactes et fermées, leurs propriétés de base, le théorème de Poincaré**