Université de la Méditerranée
UFR-Sciences de Luminy

Master Physique et Sciences de la Matière
Année M1 – Semestre 1, 2008-09

EXAMEN PARTIEL de MÉCANIQUE QUANTIQUE
DURÉE 2 HEURES (05 décembre 2007)

Ni document, ni calculette.

---

1. Addition de moments angulaires. (4 points)

L'électron de valence de l'atome d'hydrogène se trouve dans l'état "down" $|-\rangle$ de spin, tandis que son état spatial est donné par l'état $|\ell m\rangle = |10\rangle$. On néglige le spin du proton.

1. A l'aide du tableau des coefficients de Clebsch-Gordan (ci-dessous) déterminer les valeurs possibles J du moment angulaire total $\overrightarrow{J}$ de l'électron.
2. Donner les probabilités respectives de mesurer chacune de ces valeurs.

2. Interaction entre deux dipôles. (10 points)

L'hamiltonien d'interaction entre deux dipôles magnétiques portés chacun par une particule de spin $\frac{1}{2}$ est donné par

$$H = \frac{\kappa}{|\vec{\mathrm{x}}|^3}\left(3(\hat{\mathrm{x}}\cdot\vec{\sigma}_{(1)})(\hat{\mathrm{x}}\cdot\vec{\sigma}_{(2)}) - \vec{\sigma}_{(1)}\cdot\vec{\sigma}_{(2)}\right) =: \frac{\kappa}{|\vec{\mathrm{x}}|^3} W \ ,$$

où $\vec{\mathrm{x}}$ est le vecteur relatif entre les deux dipôles, $\hat{\mathrm{x}}$ le vecteur unitaire correspondant, et $\vec{\sigma}_{(1)} := \vec{\sigma}\otimes I$ et $\vec{\sigma}_{(2)} := I\otimes\vec{\sigma}$ les matrices de Pauli associées à chacune des deux particules. On définit le spin total du système par

$$\vec{\Sigma} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}\right), \qquad (\hbar = 1).$$

1. Indiquer quel est l'espace d'Hilbert total $\mathcal{H}$ décrivant les états d'interaction des deux dipôles. Préciser sa dimension.
2. Donner sans justification les valeurs propres possibles de $\vec{\Sigma}^2$.
3. Montrer que $\vec{\Sigma}^2 = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}\cdot\vec{\sigma}_{(2)} + 3\mathbb{1})$, où $\mathbb{1} = I\otimes I$.
4. On pose $\Pi = (\hat{\mathrm{x}}\cdot\vec{\Sigma})^2$. En utilisant la relation valable sur $\mathcal{H}_{1/2} = \mathbb{C}^2$
$$(\vec{u}\cdot\vec{\sigma})(\vec{v}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{u}\cdot\vec{v})I + i(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{\sigma}, \qquad (*)$$
montrer que $\Pi = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + (\hat{x}\cdot\vec{\sigma}_{(1)})(\hat{x}\cdot\vec{\sigma}_{(2)})\right)$.
5. En déduire, encore avec $(*)$, que Π est un projecteur.
6. Montrer ensuite que le terme d'interaction W s'exprime de façon équivalente comme
$$W = 2(3\Pi - \vec{\Sigma}^2).$$
7. On admettra[1] que $(\vec{\Sigma}^2)^2 = 2\vec{\Sigma}^2$ et que $\Pi\vec{\Sigma}^2 = 2\,\Pi$.

   Montrer alors que $W^2 = 4\vec{\Sigma}^2 - 2W$.
8. En conclure que les valeurs propres possibles de W sont $0, \pm 2$ et -4.

Tourner SVP $\cdots$/...

[1] *Cela peut se montrer en utilisant l'algèbre des matrices de Pauli :* $\sigma_k\sigma_\ell = \delta_{k\ell}I + i\varepsilon_{k\ell j}\,\sigma_j$ *sur* $\mathbb{C}^2$.

3. Solution non stationnaire de l'oscillateur harmonique. (6 points)

On s'intéresse à la solution exacte de l'équation de Schrödinger non stationnaire unidimensionnelle

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi,$$

avec $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, le potentiel harmonique.

1) Vérifier que [Schrödinger, 1926]

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \tfrac{a^2}{2}(1+e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t}\right)\right]$$

est bien solution de cette équation. (a est une constante réelle ayant la dimension d'une longueur).

2) Calculer $|\Psi(x,t)|^2$ et interpréter le paquet d'ondes.

** FIN **

Université de la Méditerranée
UFR-Sciences de Luminy

Master Physique et Sciences de la Matière
Année M1 – Semestre 1, 2008-09

CORRECTION PARTIEL de Mécanique Quantique
DURÉE 2 HEURES (05 décembre 2007)

Ni document, ni calculette.

1. Addition de moments angulaires. (4 points)

L'électron de valence de l'atome d'hydrogène se trouve dans l'état "down" $|-\rangle$ de spin, tandis que son état spatial est donné par l'état $|\ell m\rangle = |10\rangle$. On néglige le spin du proton.

1. A l'aide du tableau des coefficients de Clebsch-Gordan (ci-dessous) déterminer les valeurs possibles J du moment angulaire total $\overrightarrow{J}$ de l'électron.

   Réponse : Le moment angulaire total de l'électron est donné par $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L} + \overrightarrow{S}$ addition des moments orbital et de spin. L'électron se trouve dans l'état factorisé $|10\rangle \otimes |-\rangle$, avec $|-\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle$. Il y a donc addition des moments angulaires $1 \times \frac{1}{2}$. Ainsi les valeurs possibles de J sont $1/2$ et $3/2$.

2. Donner les probabilités respectives de mesurer chacune de ces valeurs.

Réponse : Une lecture *horizontale* de la table $1 \times \frac{1}{2}$ correspondante permet de décomposer l'état $|10\rangle \otimes |-\rangle$ dans la base des états couplés $|J, M; 1, \frac{1}{2}\rangle$ avec $M = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. On lit

$$|10\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, |\tfrac{3}{2}, \tfrac{-1}{2}; 1, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, |\tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}; 1, \tfrac{1}{2}\rangle.$$

Les états couplés $|J, \frac{-1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle$ pour des J différents étant orthogonaux entre eux, on en déduit respectivement

$$\text{proba}(J = \tfrac{3}{2}) = |\langle \tfrac{3}{2}, M|10\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}\rangle|^2 = \tfrac{2}{3}, \quad \text{proba}(J = \tfrac{1}{2}) = |\langle \tfrac{1}{2}, M|10\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}\rangle|^2 = \tfrac{1}{3}.$$

2. Interaction entre deux dipôles. (10 points)

L'hamiltonien d'interaction entre deux dipôles magnétiques portés chacun par une particule de spin $\frac{1}{2}$ est donné par

$$H = \frac{\kappa}{|\vec{\mathrm{x}}|^3} \left(3(\hat{\mathrm{x}} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(1)})(\hat{\mathrm{x}} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)}) - \overrightarrow{\sigma}_{(1)} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)}\right) =: \frac{\kappa}{|\vec{\mathrm{x}}|^3} W \ ,$$

où $\vec{\mathrm{x}}$ est le vecteur relatif entre les deux dipôles, $\hat{\mathrm{x}}$ le vecteur unitaire correspondant, et $\overrightarrow{\sigma}_{(1)} := \overrightarrow{\sigma} \otimes I$ et $\overrightarrow{\sigma}_{(2)} := I \otimes \overrightarrow{\sigma}$ les matrices de Pauli associées à chacune des deux particules. On définit le spin total du système par

$$\overrightarrow{\Sigma} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\sigma}_{(1)} + \overrightarrow{\sigma}_{(2)}\right), \qquad (\hbar = 1).$$

1. Indiquer quel est l'espace d'Hilbert total $\mathcal{H}$ décrivant les états d'interaction des deux dipôles. Préciser sa dimension.

   Réponse : Il y a addition de deux spins 1/2. Donc $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2}$ qui est de dimension complexe quatre. Il se décompose en représentations irréductibles comme $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

2. Donner sans justification les valeurs propres possibles de $\overrightarrow{\Sigma}^2$.

   Réponse : L'addition de deux spins 1/2 conduit à $J = 0, 1$ d'où les valeurs propres $J(J+1) \in \{0, 2\}$.

3. Montrer que $\overrightarrow{\Sigma}^2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\sigma}_{(1)} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)} + 3\mathbb{1})$, où $\mathbb{1} = I \otimes I$.

   Réponse : $\overrightarrow{\Sigma}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\sigma}^2_{(1)} + \overrightarrow{\sigma}_{(2)} + \overrightarrow{\sigma}_{(1)} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)})$ car $[\overrightarrow{\sigma}_{(1)}, \overrightarrow{\sigma}_{(2)}] = 0$ vu que ces deux opérateurs n'agissent pas du même côté du signe $\otimes$. Ensuite, $\overrightarrow{\sigma}^2 = 3I$, d'où le résultat.

4. On pose $\Pi = (\hat{\mathrm{x}} \cdot \overrightarrow{\Sigma})^2$. En utilisant la relation valable sur $\mathcal{H}_{1/2} = \mathbb{C}^2$

   $$(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})(\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})I + i(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma}, \qquad (*)$$

   montrer que $\Pi = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + (\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(1)})(\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)})\right)$.

   Réponse : $\Pi = \frac{1}{4}\left(\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(1)} + \hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)}\right)^2$. Comme précédemment on obtient $\Pi = \frac{1}{4}((\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(1)})^2 + (\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)})^2 + 2(\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(1)})(\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)})$. Le résultat découle de l'application directe de $(*)$ sur les deux premiers opérateurs : $(\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma})^2 = \hat{x}^2 I = I$.

5. En déduire, encore avec $(*)$, que Π est un projecteur.

   Réponse : $\Pi^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + 2(\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(1)})(\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)}) + (\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(1)})^2(\hat{x} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{(2)})^2)$. Après avoir utilisé $(*)$ sur le dernier opérateur on trouve le résultat demandé.

6. Montrer ensuite que le terme d'interaction W s'exprime de façon équivalente comme

   $$W = 2(3\Pi - \overrightarrow{\Sigma}^2).$$

   Réponse : Calcul direct.

7. On admettra[2] que $(\overrightarrow{\Sigma}^2)^2 = 2\overrightarrow{\Sigma}^2$ et que $\Pi\overrightarrow{\Sigma}^2 = 2\,\Pi$.

   Montrer alors que $W^2 = 4\overrightarrow{\Sigma}^2 - 2W$.

   Réponse : Calcul direct.

8. En conclure que les valeurs propres possibles de W sont $0, \pm 2$ et -4.

Réponse : Si λ est valeur propre de W, alors d'après les questions précédentes 2 et 7 elle est une racine de $X^2 + 2X - 4J(J+1) = 0$. On trouve directement suivant les valeurs $J = 0, 1$ que $\lambda \in \{0, \pm 2, -4\}$.

Tourner SVP $\cdots$/ ...

[2] *Cela peut se montrer en utilisant l'algèbre des matrices de Pauli :* $\sigma_k \sigma_\ell = \delta_{k\ell} I + i\varepsilon_{k\ell j}\,\sigma_j$ *sur* $\mathbb{C}^2$.

3. Solution non stationnaire de l'oscillateur harmonique. (6 points)

On s'intéresse à la solution exacte de l'équation de Schrödinger non stationnaire unidimensionnelle

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi,$$

avec $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, le potentiel harmonique.

1) Vérifier que [Schrödinger, 1926]

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \tfrac{a^2}{2}(1+e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t}\right)\right]$$

est bien solution de cette équation. (a est une constante réelle ayant la dimension d'une longueur).

Réponse : Il faut bien organiser le calcul. On a successivement

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Psi\left(\tfrac{-im\omega}{2\hbar}\right)\left(\tfrac{\hbar}{m} + 2ax\omega e^{-i\omega t} - a^2\omega e^{-2i\omega t}\right), \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi\left(\tfrac{-m\omega}{\hbar}\right)\left(x - a\,e^{-i\omega t}\right)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \Psi\left(\tfrac{-m\omega}{\hbar}\right)^2(x - a\,e^{-i\omega t})^2 + \Psi\left(\tfrac{-m\omega}{\hbar}\right).$$

Ensuite c'est du calcul direct.

2) Calculer $|\Psi(x,t)|^2$ et interpréter le paquet d'ondes.

Réponse : Écrire au préalable Ψ comme

$$\Psi = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \tfrac{a^2}{2}(1+\cos 2\omega t) - 2ax\cos\omega t\right) + iY\right].$$

de sorte que (avec $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$)

$$|\Psi|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x^2 + a^2\cos^2\omega t - 2ax\cos\omega t)\right] = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x - a\cos\omega t)^2\right].$$

Le paquet d'ondes est une *gaussienne* de forme fixe et dont le centre oscille avec amplitude a et pulsation ω.

** FIN **

EXAMEN PARTIEL de MÉCANIQUE QUANTIQUE

DURÉE 2 HEURES (17 novembre 2008)

Sans document.

1. Inégalités de Heisenberg pour le spin $\frac{1}{2}$.. (10 points)

Dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$, l'espace d'Hilbert décrivant le spin $\frac{1}{2}$, les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

permettent de définir l'opérateur de sin par $\overrightarrow{S} = \frac{\hbar}{2}\,\overrightarrow{\sigma}$.

1. Rappeler les règles de commutation v'érifiées par les trois opérateurs S_k.
2. Un électron est dans un état de spin $|\chi\rangle$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ par
$$|\chi\rangle = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Déterminer la constante A de sorte à normer à un le vecteur $|\chi\rangle$.
3. Quelle est l'ambiguïté sur la détermination de A ?
4. Calculer les trois valeurs moyennes $\langle S_k\rangle := \langle\chi|S_k|\chi\rangle$, $k = x, y, z$.
5. Calculer les trois valeurs moyennes $\langle S_k^2\rangle := \langle\chi|(S_k)^2|\chi\rangle$, $k = x, y, z$.
6. Calculer les trois écarts-types $\Delta S_k := \sqrt{\langle S_k^2\rangle - \langle S_k\rangle^2}$, $k = x, y, z$.
7. Vérifier que les résultats obtenus sont en accrod avec les trois inéglaités de Heisenberg (modulo permutations cycliques)
$$\Delta S_k\, \Delta S_\ell \geq \tfrac{1}{2}\, |\langle [S_k, S_\ell]\rangle|.$$
Indiquer les éventuelles inégalités saturées.

2. Retournement d'un spin $\frac{1}{2}$ par un champ magnétique oscillant. (10 points)

Un électron est au repos dans un champ magnétique oscillant

$$\overrightarrow{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\, \hat{z},$$

avec $B_0 > 0$, et ω la pulsation du champ, tous deux contants.

On s'intéresse à l'évolution de l'état $|\chi(t)\rangle = a(t)|+\rangle + b(t)|-\rangle$ du spin de cet électron dans ce champ magnétique. On posera $\omega_0 = -\gamma B_0$, comme pulsation de Larmor, sachant que $\gamma < 0$ pour l'électron.

1. Donner l'Hamiltonien H du système et écrire sa matrice dans la base canonique $\{|\pm\rangle\}$ de $\mathbb{C}^2$.

   [Attention : H dépend explicitement du temps !]

2. Écrire l'équation de Schrödinger dépendante du temps correspondante.

   En déduire les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les composantes $a(t)$ et $b(t)$.

3. À l'instant initial $t = 0$ le spin de l'électron se trouve dans l'état propre $|\chi(0)\rangle = |+\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, "spin-up" de l'observable S_x.

   Intégrer l'équation de Schrödinger et déterminer à chaque instant $t \geq 0$ l'état $|\chi(t)\rangle$.

   Vérifier que $|\chi(t)\rangle$ est bien normé à l'unité.

4. Calculer la probabilité à l'instant t, $\wp_{+-}(t) = \text{Proba}(|\chi(t)\rangle = |-\hat{x}\rangle)$ de trouver $-\hbar/2$ dans une mesure de l'observable S_x.

5. À l'instant $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$, quelle est la valeur minimale de B_0 en fonction de la pulsation ω et du facteur gyromagnétique γ de l'électron pour obtenir un retournement complet du spin $|+\hat{x}\rangle \to |-\hat{x}\rangle$ selon la direction $\hat{x}$.

On rappelle que les projecteurs de spin sont donnés par $P_{\hat{n}} = \frac{1}{2}\,(\mathbb{1} + \hat{n}\cdot\overrightarrow{\sigma})$ et que la probabilité de mesurer le spin dans la direction $\hat{n}$ est donnée par

$$p(\hat{n}) = ||P_{\hat{n}}\Psi||^2,$$

où la norme est celle de $\mathbb{C}^2$.

** FIN **

MQ – Correction du Partiel du 17/11/2008

1. Inégalités de Heisenberg pour le spin $\frac{1}{2}$.

1. Les règles de commutation sont celles d'un moment angulaire : $[S_k, S_\ell] = i\hbar\,\varepsilon_{k\ell m}\,S_m$.
2. La norme sur $\mathbb{C}^2$ est donnée par $|| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} || = \sqrt{\chi^\dagger \chi} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Ainsi avec $A \in \mathbb{C}$, puisque $\mathbb{C}^2$ est un espace d'Hilbert sur $\mathbb{C}$,
$$\langle \chi | \chi \rangle = 25|A|^2 = 1 \implies |A| = 1/5 \implies A = e^{i\alpha}/5\ , \alpha \in \mathbb{R}.$$
3. Comme le vecteur d'état $|\chi\rangle$ est défini à une phase près, le nombre complexe A est défini à une phase près, et on peut aller au plus simple en prenant $A = 1/5$.
4. Pour chaque k, le calcul s'organise en un produit matriciel relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^2$:
$$\langle S_k \rangle = \tfrac{\hbar}{2}\langle \sigma_k \rangle = \tfrac{\hbar}{2}\,\chi^\dagger \sigma_k \chi = \tfrac{\hbar}{2}\tfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -3i & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma_k)_{11} & (\sigma_k)_{12} \\ (\sigma_k)_{21} & (\sigma_k)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$
On trouve successivement pour chaque componsante de l'observable vectorielle $\overrightarrow{S}$
$$\langle S_x \rangle = 0, \qquad \langle S_y \rangle = -\tfrac{12}{25}\hbar, \qquad \langle S_z \rangle = -\tfrac{7}{50}\hbar.$$
5. Comme $(\sigma_k)^2 = \mathbb{1}$, on trouve $\langle S_k^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$ pour $k = x, y, z$.
6. On calcule d'abord les variances $(\Delta S_k)^2 = \langle S_k^2 \rangle - \langle S_k \rangle^2$ pour en déduire les écarts-types.
$$(\Delta S_x)^2 = \tfrac{\hbar^2}{4} \implies \Delta S_x = \tfrac{\hbar}{2}$$
$$(\Delta S_y)^2 = \tfrac{\hbar^2}{4} - \left(\tfrac{12\hbar}{25}\right)^2 = \tfrac{\hbar^2}{4}\left(1 - \left(\tfrac{24}{25}\right)^2\right) = \left(\tfrac{\hbar}{50}\right)^2 (25+24)(25-24) = \left(\tfrac{7\hbar}{50}\right)^2 \implies \Delta S_y = \tfrac{7\hbar}{50},$$
$$(\Delta S_z)^2 = \tfrac{\hbar^2}{4} - \left(\tfrac{7\hbar}{50}\right)^2 = \tfrac{\hbar^2}{4}\left(1 - \left(\tfrac{7}{25}\right)^2\right) = \left(\tfrac{\hbar}{2\cdot 25}\right)^2 (25+7)(25-7) = \left(\tfrac{12\hbar}{25}\right)^2 \implies \Delta S_z = \tfrac{12\hbar}{25}.$$
7. À l'aide de la question 1), on obtient les inégalités de Heisenberg
$$\Delta S_k \cdot \Delta S_\ell \geq \ \tfrac{\hbar}{2}\ \left|\varepsilon_{k\ell m}\langle S_m \rangle\right| = \tfrac{\hbar}{2}\left|\langle S_m \rangle\right|.$$
Pour la vérification des trois inégalités de Heisenberg non triviales, on a respectivement
$$\begin{aligned} \Delta S_x \cdot \Delta S_y = \tfrac{7\hbar^2}{100} &= \tfrac{\hbar}{2}\left|\langle S_z \rangle\right| \qquad \text{(saturée)} \\ \Delta S_y \cdot \Delta S_z = \tfrac{7\cdot 12\hbar^2}{25\cdot 50} &\geq \tfrac{\hbar}{2}\left|\langle S_x \rangle\right| = 0 \\ \Delta S_z \cdot \Delta S_x = \tfrac{12\hbar^2}{50} &= \tfrac{\hbar}{2}\left|\langle S_y \rangle\right| \qquad \text{(saturée).} \end{aligned}$$
Les inégalités sont bien vérifiées.

2. Retournement d'un spin $\frac{1}{2}$ par un champ magnétique oscillant.

1. 1) l'Hamiltonien donne le couplage du spin $\overrightarrow{S}$ avec le champ magnétique, c'est le terme de Pauli :
$$H(t) = -\gamma \overrightarrow{B}(t) \cdot \overrightarrow{S} = \tfrac{\hbar\omega_0}{2}\cos(\omega t)\sigma_z.$$
N.B. Comme H dépend explicitement du temps, on **ne peut pas** définir un opérateur d'évolution $U(t)$ comme exponentielle de $H(t)$ car rien ne garantit que $H(t)$ et $H(t')$ commutent à des temps différents. On ne peut pas intégrer naïvement $i\hbar\partial_t U(t) = H(t)U(t)$ au sens des opérateurs.
2. L'équation de Schrödinger donnant l'évolution des états du système $i\hbar\partial_t|\chi(t)\rangle = H(t)|\chi(t)\rangle$ dépend donc du temps. En écrivant dans la base canonique
$$|\chi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \implies i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \tfrac{\hbar\omega_0}{2}\cos(\omega t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$
ce qui conduit au système d'équations différentielles d'ordre un découplées (indépendant de $\hbar$) et facilement intégrable
$$\left\{\begin{array}{l} i\dot{a} = \frac{\omega_0}{2}\cos(\omega t)\, a \\ i\dot{b} = -\frac{\omega_0}{2}\cos(\omega t)\, b \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \dot{a}/a = -i\frac{\omega_0}{2}\cos(\omega t) \\ \dot{b}/b = i\frac{\omega_0}{2}\cos(\omega t) \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \ln a = -\frac{i}{2}\frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t) + a_0 \\ \ln b = \frac{i}{2}\frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t) + b_0 \end{array}\right.$$
où a_0 et b_0 sont des constantes d'intégration. Finalement on obtient (à une phase près)
$$|\chi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,\exp\left(\frac{-i}{2}\frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t)\right) \\ B\,\exp\left(\frac{i}{2}\frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t)\right) \end{pmatrix}$$
où A et B sont deux constantes complexes à déterminer avec les conditions initiales, ce qui va être fait dans la question suivante.
3. À $t = 0$ on a la condition initiale (nécessité d'une seule condition initiale, puisque Schrödinger est d'ordre un dans la variable temps t) :
$$|\chi(0)\rangle = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
conduisant à l'unique solution (à une phase près), pour $t \geq 0$, de l'équation de Scrödinger de notre problème
$$|\chi(t)\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-i}{2}\frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t)\right) \\ \exp\left(\frac{i}{2}\frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t)\right) \end{pmatrix} =: \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha(t)} \\ e^{i\alpha(t)} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha(t) = \frac{\omega_0}{2\omega}\sin(\omega t).$$
L'introduction de la phase dépendante du temps $\alpha(t)$ permet de vérifier rapidement que
$$\langle\chi(t)|\chi(t)\rangle = \tfrac{1}{2}(|e^{-i\alpha(t)}|^2 + |e^{i\alpha(t)}|^2) = 1.$$
4. Une mesure correspond à projeter. Le calcul de la probabilité de trouver $|\chi(t)\rangle$ dans l'état $|-\hat{x}\rangle$ est plus aisé si on fait intervenir la relation de fermeture ; on a
$$\begin{aligned} \wp_{+-}(t) &= ||P_{-\hat{x}}\chi(t)||^2 = \langle\chi(t)|P_{-\hat{x}}|\chi(t)\rangle = \langle\chi(t)|(\mathbb{1} - P_{+\hat{x}})|\chi(t)\rangle = 1 - |\langle+\hat{x}|\chi(t)\rangle|^2 \\ &= 1 - \tfrac{1}{4}\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha(t)} \\ e^{i\alpha(t)} \end{pmatrix}\right|^2 = 1 - \tfrac{1}{4}\left|e^{i\alpha(t)} + e^{-i\alpha(t)}\right|^2 = 1 - \cos^2\alpha(t) = \sin^2\alpha(t) \\ &= \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right). \end{aligned}$$
5. La probabilité $\wp_{+-}(t)$ vaut 1 si la valeur absolue de la phase $|\frac{\omega_0}{2\omega}\sin(\omega t)| = \frac{\pi}{2}$. La pulsation ω_0 sera minimale quand $|\sin(\omega t)| = 1$, maximum atteint à l'instant $t = \frac{\pi}{2\omega}$, d'où
$$\alpha(\tfrac{\pi}{2\omega}) = \tfrac{\omega_0}{2\omega} = \tfrac{\pi}{2} \implies B_0 = \tfrac{-\omega\pi}{\gamma} > 0.$$

EXAMEN de MÉCANIQUE QUANTIQUE – DURÉE 3 HEURES (06 janvier 2006)

Ni document, ni calculette.

1. Inégalités de Heisenberg pour le spin $\frac{1}{2}$. (6 points)

Dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$, l'espace d'Hilbert décrivant le spin $\frac{1}{2}$, les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

permettent de définir le vecteur $\overrightarrow{\sigma}$ dont les composantes dans la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^3$ sont les trois matrices de Pauli. On définit l'opérateur vectoriel de spin par $\overrightarrow{S} = \frac{\hbar}{2}\overrightarrow{\sigma}$.

1) Calculer $[S_x, S_y]$ et en déduire l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y \geq \frac{\hbar}{2} |\langle S_z \rangle|.$$

N.B. $\Delta A := \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$, et $\langle A \rangle := \langle \psi | A | \psi \rangle$.

On rappelle que le spin $\frac{1}{2}$ dans la direction arbitraire selon le vecteur unitaire $\hat{n}$ dont l'extrémité est repérée par les coordonnées sphériques (θ, φ), $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$ est décrit par le vecteur d'état de norme un (à une phase près) de $\mathbb{C}^2$,

$$|\theta, \varphi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

2) On choisit comme état quantique de spin $|\psi\rangle = |\theta, \varphi\rangle$. Calculer pour cet état, ΔS_x, ΔS_y et $\langle S_z \rangle$ et vérifier l'inégalité de Heisenberg. Pour quelles valeurs des angles θ et φ l'égalité est-elle vérifiée ?

3) Déterminer les vecteurs $\hat{n}$ pour lesquels la borne inférieure est atteinte dans cette inégalité de Heisenberg.

4) Vérifiez que vos réponses aux questions 2 et 3 sont bien compatibles.

2. Système de deux particules de spin 1/2. (5 points)

Considérons le système de deux particules de spin 1/2 se trouvant dans l'état intriqué singulet (ou singlet)

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+-\rangle - |-+\rangle\big).$$

1) Que dire de l'état $|0\,0\rangle$ sous permutation des deux particules de spin $\frac{1}{2}$?

On désigne par $S^{(1)}_{\widehat{n}}$ l'observable de spin correspondant à la particule numéro 1 dans la direction $\widehat{n}$, et par $S^{(2)}_{\widehat{k}}$ l'observable de spin correspondant à la particule numéro 2 dans la direction $\widehat{k}$.

2) Montrer que la valeur moyenne dans cet état de l'opérateur $S^{(1)}_{\widehat{n}} S^{(2)}_{\widehat{k}}$ est donnée par

$$\langle 0\,0|S^{(1)}_{\widehat{n}} S^{(2)}_{\widehat{k}}|0\,0\rangle = -\,\frac{\hbar^2}{4}\,\widehat{n}\cdot\widehat{k}.$$

3. Hamiltonien de Pauli. (4 points)

L'électron est modélisé comme une particule quantique de masse m et de charge électrique $e < 0$, de spin $\frac{1}{2}$ caractérisé par l'opérateur $\vec{S} = \dfrac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}$. L'hamiltonien décrivant un électron plongé dans un champ électromagnétique dérivant du quadripotentiel $(\vec{A}(\vec{\mathrm{x}},t), \phi(\vec{\mathrm{x}},t))$, est défini sur $L^2(\mathbb{R}^3, dv) \otimes \mathbb{C}^2$ et s'écrit

$$H(\vec{p},\vec{q},t) = \frac{1}{2m}\big(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q},t)\big)^2 + e\phi(\vec{q},t) - \frac{e}{m}\vec{S}\cdot\vec{B}(\vec{q},t).$$

Montrer, en utilisant les propriétés algébriques des matrices de Pauli, que H peut se mettre sous la forme

$$H(\vec{p},\vec{q},t) = \frac{1}{2m}\Big(\vec{\sigma}\cdot\big(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q},t)\big)\Big)^2 + e\phi(\vec{q},t).$$

N.B. $\sigma_k\sigma_\ell = \delta_{k\ell} + i\varepsilon_{k\ell m}\sigma_m$.

Tourner SVP $\cdots$/ . . .

4. Addition de spins. (5 points)

Un système constitué de deux particules quantiques, l'une de spin 1 et l'autre de spin 2, se trouve dans une configuration pour laquelle le spin total est $J = 3$ et le nombre magnétique $M = 1$.

1) Ecrire à l'aide de la table des coefficients de Clebsch-Gordan (ci-contre), l'état $|3, 1\rangle$ dans la base produit tensoriel.

2) Si on mesurait *uniquement* l'observable J_z *relative* à la particule de spin 2, alors que le système est dans l'état $|3, 1\rangle$, déterminer les valeurs possibles de cette observable.

3) Calculer les probabilités respectives d'obtenir chacune de ces valeurs.

** FIN **

Université de la Méditerranée **Master Physique et Sciences de la Matière**
UFR-Sciences de Luminy Année M1 – Semestre 1, 2008-09

EXAMEN de MÉCANIQUE QUANTIQUE – DURÉE 3 HEURES (09 janvier 2007)

Ni document, ni calculette.

---

1. Spin $\frac{1}{2}$ dans un champ magnétique. (6 points)

Une particule de spin $\frac{1}{2}$ est plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ constant et uniforme. L'énergie d'interaction (aimantation) est donnée par l'hamiltonien

$$H = -\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{B}, \qquad \overrightarrow{M} = \gamma \overrightarrow{S}$$

où $\overrightarrow{M}$ désigne le moment magnétique de spin et $\overrightarrow{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ le spin de la particule (les matrices de Pauli sont données au dos). On supposera que $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_z} + B_1\overrightarrow{e_x}$.

1) Trouver les états propres $|\psi_\pm\rangle$ de H ainsi que leur énergie $E_\pm$ en fonction de $\omega = -\gamma B$ où $B = ||\overrightarrow{B}||$ désigne l'intensité du champ magnétique.

2) A l'instant $t = 0$, la particule est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$. Exprimer $|\psi(0)\rangle$ en fonction des $|\psi_\pm\rangle$. En déduire $|\psi(t)\rangle$ par intégration de l'équation de Pauli.

3) Montrer que la probabilité $\mathcal{P}_{++}(t)$ de mesurer le spin dans l'état $|+\rangle$ à l'instant t est donnée par (formule de Rabi)

$$\mathcal{P}_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} \sin^2(\frac{t}{2}\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2})$$

avec $\omega_0 = -\gamma B_0$ et $\omega_1 = -\gamma B_1$.

4) En déduire la probabilité $\mathcal{P}_{+-}(t)$ de mesurer le spin dans l'état $|-\rangle$ à l'instant t.

2. Système de deux particules de spin 1/2. (3 points)

Considérons le système de deux particules de spin 1/2 se trouvant dans l'état intriqué singulet $|0\,0\rangle$ (voir tableau des Clebsh-Gordan au dos)

1) Que dire de cet état $|0\,0\rangle$ sous permutation des deux particules de spin $\frac{1}{2}$?

2) On désigne par $S_{\widehat{n}}^{(1)}$ l'observable de spin correspondant à la particule numéro 1 dans la direction $\widehat{n}$, et par $S_{\widehat{k}}^{(2)}$ l'observable de spin correspondant à la particule numéro 2 dans la direction $\widehat{k}$. Vérifier que $S_{\widehat{n}}^{(1)} S_{\widehat{k}}^{(2)}$ est donnée par

$$\langle 0\,0|S_{\widehat{n}}^{(1)} S_{\widehat{k}}^{(2)}|0\,0\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\,\widehat{n} \cdot \widehat{k}.$$

3. Niveaux de Landau. (7 points)

On désigne respectivement par $\vec{p}$ et $\vec{q}$ les observables vectorielles d'impulsion et de position.

1) Une particule de masse m et de charge électrique e est plongée dans un champ électromagnétique $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \partial_t \vec{A}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ dérivant du quadri-potentiel $(-V, \vec{A})$. L'Hamiltonien du système, obtenu par prescription du couplage minimal, est l'opérateur

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q}, t)\right)^2 + eV(\vec{q}, t).$$

Montrer que l'opérateur *vitesse* $\vec{V} := \frac{i}{\hbar}\,[H, \vec{q}]$. s'exprime simplement en fonction de $\vec{p}$, $\vec{A}$, e et m. Est-ce une observable quantique ? Peut-elle dépendre du temps ?

2) Montrer que les composantes de la vitesse ne commutent pas entre elles : prouver que

$$[V_x, V_y] = \frac{i\hbar\omega}{m}\,\mathbb{1}$$

où ω sera donné en fonction de B_z et e/m.
Calculer les deux autres commutateurs et en déduire l'expression de l'opérateur $\vec{V} \times \vec{V}$ en fonction de $\vec{B}$.

3) Déduire de la définition suivante de l'opérateur *accélération*

$$\vec{\Gamma} := \frac{i}{\hbar}\left[H, \vec{V}\right] + \partial_t \vec{V}$$

la version quantique des équations du mouvement pour la force de Lorentz.

4) On considère désormais le cas d'un champ magnétique seul, $V = 0$, $\partial_t \vec{A} = 0$. On suppose que $\vec{B} = B\hat{z}$ est constant et uniforme.
Calculer Γ_z et justifier pourquoi on peut diagonaliser simultanément H et V_z.

5) Montrer qu'il existe une constante réelle $\alpha > 0$ unique telle que l'opérateur

$$a := \alpha\big(V_x + i\varepsilon\, V_y\big) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon := \frac{|\omega|}{\omega}$$

vérifie la relation de commutation $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$.
Donner α en fonction de m, $\hbar$ et $|\omega|$.

6) Ecrire l'expression de H en fonction des opérateurs a et V_z, et des constantes m et α. En déduire les niveaux d'énergie E (niveaux de Landau), en fonction de $\hbar$ et ω, des états stationnaires ψ de H tels que $V_z\psi = 0$.

[On rappelle que le spectre de l'opérateur $a^\dagger a$ est $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers positifs.]

Tourner SVP $\cdots$/ ...

4. Addition de spins. (4 points)

Un système constitué de deux particules quantiques, l'une de spin 1 et l'autre de spin 2, se trouve dans une configuration pour laquelle le spin total est $J = 3$ et le nombre magnétique $M = 1$.

1) Ecrire à l'aide de la table des coefficients de Clebsch-Gordan (ci-contre), l'état $|3, 1\rangle$ dans la base produit tensoriel.

2) Si on mesurait *uniquement* l'observable J_z *relative* à la particule de spin 2, alors que le système est dans l'état $|3, 1\rangle$, déterminer les valeurs possibles de cette observable.

3) Calculer les probabilités respectives d'obtenir chacune de ces valeurs.

** FIN **

Rappel : Dans la base canonique $|\pm\rangle$ de l'espace d'Hilbert $\mathbb{C}^2$, les trois matrices de Pauli sont données par

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Université de la Méditerranée **Master Physique et Sciences de la Matière**
UFR-Sciences de Luminy Année M1 – Semestre 1, 2008-09

EXAMEN de MÉCANIQUE QUANTIQUE – DURÉE 3 HEURES (10 janvier 2008)

Ni document, ni calculette.

---

1. Spin $\frac{1}{2}$ dans un champ magnétique. (5 points)

Une particule de spin $\frac{1}{2}$ est plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ constant et uniforme. L'énergie d'interaction (aimantation) est donnée par l'hamiltonien

$$H = -\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{B}, \qquad \overrightarrow{M} = \gamma \overrightarrow{S}$$

où $\overrightarrow{M}$ désigne le moment magnétique et $\overrightarrow{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ le spin de la particule. On supposera que $\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{e_z} + B_1 \overrightarrow{e_x}$.

1. Trouver les états propres $|\psi_\pm\rangle$ de H ainsi que leur énergie $E_\pm$ en fonction de $\omega = -\gamma B$ où $B = ||\overrightarrow{B}||$ désigne l'intensité du champ magnétique.

2. A l'instant $t = 0$ la particule est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$. Exprimer $|\psi(0)\rangle$ en fonction des $|\psi_\pm\rangle$. En déduire $|\psi(t)\rangle$ par intégration de l'équation de Pauli.

3. Montrer que la probabilité $\mathcal{P}_{++}(t)$ de mesurer le spin dans l'état $|+\rangle$ à l'instant t est donnée par (formule de Rabi)

$$\mathcal{P}_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2} \right)$$

avec $\omega_0 = -\gamma B_0$ et $\omega_1 = -\gamma B_1$.

4. En déduire la probabilité $\mathcal{P}_{+-}(t)$ de mesurer le spin dans l'état $|-\rangle$ à l'instant t.

2. Molécule de NaCL dans un champ électrique. (8 points)

En négligeant ses vibrations, on considère la rotation rigide autour de son centre de masse d'une molécule NaCl. Ce mouvement revient à celui d'un point matériel, de masse $\mu =$ la masse réduite, sur une sphère de rayon $r_0 =$ distance entre les noyaux. L'état classique de la molécule est donc donné par un point $\widehat{\mathrm{x}} = (\theta, \varphi)$ sur la sphère S_2, tandis que **l'état quantique** est caractérisé par une fonction d'onde $\psi(\widehat{x})$ de l'espace d'Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S_2, \sin\theta d\theta d\varphi)$.

1. Soit $I = \mu r_0^2$ le moment d'inertie, et $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$ l'opérateur moment angulaire orbital de la molécule. Montrer que l'Hamiltonien décrivant le mouvement libre de rotation est $H_0 = \vec{L}^2/(2I)$.
2. On rappelle que les harmoniques sphériques $Y_\ell^m = |\ell m\rangle$ forment une base de $L^2(S_2)$, avec $\ell \in \mathbb{N}$ et $|m| \leq \ell$ et que ($\hbar = 1$)
$$L_z|\ell m\rangle = m|\ell m\rangle, \qquad \vec{L}^2|\ell m\rangle = \ell(\ell+1)|\ell m\rangle.$$
En déduire le spectre de H_0 (nombre quantique le caractérisant, les valeurs propres ε_0 et vecteurs propres ainsi que le degré de dégénérescence).
3. La molécule NaCl est plongée dans un champ électrique extérieur $\vec{E} = E\hat{z}$ dirigé selon l'axe $\hat{z}$. L'énergie d'interaction de son moment dipolaire permanent $\vec{D} = D\,\widehat{D}$ avec $\vec{E}$ est donnée par $W = -\vec{D}\cdot\vec{E} = -DE\,q_z$. Montrer que $[H, L_z] = 0$. En déduire dans quels sous-espaces de $L^2(S_2)$ peut-on déterminer le spectre de H.
4. Le champ $\vec{E}$ étant faible, justifier pourquoi alors on peut traiter H en théorie des perturbations stationnaires pour des niveaux **non** dégénérés.
5. Calculer la correction ε_1 au permier ordre des niveaux d'énergie sachant que les Y_ℓ^m ont parité $(-1)^\ell$, i.e. $Y_\ell^m(\pi-\theta, \varphi+\pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$. (Un argument de symétrie permet d'éviter les calculs en utilisant $(q_z Y_\ell^m)(\widehat{\mathrm{x}}) = Y_\ell^m(\widehat{\mathrm{x}})\cos\theta$).
Rappel : $\varepsilon_1 = \langle\varphi_0|W|\varphi_0\rangle$ *pour une perturbation* W *et un spectre non perturbé d'énergie* ε_0 *(non dégénérée) et de vecteur propre* $|\varphi_0\rangle$*.*
6. En distinguant les deux cas $\ell = |m|$ et $\ell > |m|$, calculer la correction ε_2 au second ordre des niveaux d'énergie.
On admettra la règle de sélection $\langle\ell' m|q_z|\ell m\rangle = 0$ si $\ell' \neq \ell \pm 1$, et que l'élément de matrice $\langle\ell m|q_z|\ell+1, m\rangle = \sqrt{\frac{(\ell+m+1)(\ell-m+1)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}}$.
Rappel : $\varepsilon_2 = \sum_{\varepsilon\neq\varepsilon_0} \frac{|\langle\varphi_\varepsilon|W|\varphi_0\rangle|^2}{\varepsilon_0 - \varepsilon}$ *pour une perturbation* W *et un spectre non perturbé d'énergie* ε_0 *(resp.* ε*) (non dégénérée) et de vecteur propre* $|\varphi_0\rangle$ *(resp.* $|\varphi_\varepsilon\rangle$*).*
7. La dégénérescence du spectre est-elle levée par le champ électrique extérieur ?

Tourner SVP $^{\cdots}$/ . . .

3. Particules identiques : Fermions. (7 points)

1) Rappeler la propriété que doivent vérifier les vecteurs d'état Ψ d'un système formé de deux fermions sous l'échange de ces derniers.

En déduire les combinaisons $\Psi = \varphi \otimes \chi$ physiquement permises entre les états quantiques d'espace φ et les états de spin χ en fonction de leurs propriétés respectives de symétrie sous l'échange des deux fermions.

Les états de spin $\frac{1}{2}$ d'un électron sont notés $|\pm\rangle = |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$, alors que les états d'espace sont donnés par les harmoniques sphériques, $Y_\ell^m = |\ell, m\rangle$ avec $|m| \leq \ell$, vecteurs propres communs à $\vec{L}^2$ et L_z correspondant à un moment angulaire *orbital* ℓ. On forme une *paire* d'électrons.

2) On s'intéresse tout d'abord à la composition des états de spin $\frac{1}{2}$. En vous reportant au tableau (ci-contre) des coefficients de Clebsh-Gordan (CG) sur la composition de deux moments angulaires, donner les valeurs a priori possibles du spin total S ainsi que les états $|S, M'\rangle$ correspondants et la dénomination qui leur est consacrée. Préciser le comportement de ces états sous l'échange des deux fermions.

3) On suppose que chacun des électrons de la paire est dans un état $\ell = 1$ du moment angulaire orbital. Par composition de deux tels moments angulaires orbitaux, (voir tableau des CG) quelles seraient, a priori, les valeurs possibles du moment angulaire orbital total L ?
Discuter suivant la parité de L, les propriétés de symétrie des états $Y_L^M = |L, M\rangle$ sous l'échange des deux fermions.

4) En déduire les couples de valeurs (L, S) et les valeurs du moment angulaire total J des états quantiques physiquement permis satisfaisant à la question 1) pour cette paire d'électrons. (Expliquez clairement votre démarche).

5) En déduire la dimension de chacun des espaces $\mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_S$ des états physiquement permis par le principe de Pauli suivant les valeurs du couple (L, S).

6) Pour $L = 2$ et $M = 0$, à partir de la table des CG, expliciter la fonction d'onde totale $Y_L^M(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\,|0, 0\rangle$ en fonction des états Y_ℓ^m et $|\pm\rangle$ de chacun des deux électrons.

Université de la Méditerranée	**Master Physique et Sciences de la Matière**
UFR-Sciences de Luminy	Année M1 – Semestre 1, 2008-09

EXAMEN de MÉCANIQUE QUANTIQUE – DURÉE 3 HEURES (06 janvier 2009)

Ni document, ni calculette.

---

1. Atome d'hydrogène et addition de moments angulaires. (6 points)

Dans l'espace d'Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^2, d^3\vec{x})$, des fonctions d'onde à deux composantes, $\Psi = \begin{pmatrix}\psi_+ \\ \psi_-\end{pmatrix}$, muni du produit scalaire

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{\psi_+(\vec{x})} \phi_+(\vec{x}) + \overline{\psi_-(\vec{x})} \phi_-(\vec{x}) \right) d^3\vec{x} \ ,$$

on représente un état du triplet $2p$ de l'électron d'un atome d'hydrogène par le spineur factorisé

$$\Psi(\vec{x}) = \psi_-(\vec{x}) | -\hat{z}\rangle = R(r)\, Y_1^0(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

où, après passage en coordonnées sphériques $\vec{x} = r\,\widehat{x}(\theta,\varphi)$, la partie spatiale $\psi_-(\vec{x})$ du spineur est le produit d'une partie radiale par une partie angulaire

$$R(r) = \tfrac{1}{\sqrt{24\,a^3}}\, \tfrac{r}{a}\, e^{-r/2a} \ , \qquad Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}} \cos\theta \ ,$$

où a est le rayon de Bohr, et où la direction $\widehat{x}(\theta,\varphi)$, est un point de la sphère S^2. On rappelle que l'harmonique sphérique Y_1^0 est un état propre $|\ell\, m\rangle = |1\, 0\rangle$ du moment angulaire orbital, commun à $\vec{L}^2$ et à L_z pour les valeurs propres $2\hbar^2$ et 0 respectivement. On néglige le spin du proton.

1. Vérifier que $||\Psi|| = 1$ (passer en coordonnées sphériques).
2. Une mesure de l'observable de spin S_z sur l'état Ψ conduirait à quelles valeurs et avec quelles probabilités ?
3. Le moment angulaire total de l'électron est donné par $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, somme du moment angulaire orbital et du spin.
   A l'aide du tableau des coefficients de Clebsch-Gordan (ci-contre), déterminer les valeurs possibles J du moment angulaire total $\vec{J}$ de l'électron dans l'état Ψ.
4. Donner les probabilités respectives de mesurer chacune de ces valeurs.

5. Quelles valeurs obtiendrait-on lors d'une mesure de l'observable J_z et indiquer avec quelles probabilités.
6. Calculer, en fonction du rayon de Bohr $a \simeq 0.529$ Å, la distance moyenne au proton, $\overline{r} = \langle \Psi \big| \, |\vec{q}| \Psi \rangle$ de l'électron dans l'état Ψ.

[Indication] : $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n \, e^{-u} du = n!$

Tourner SVP $^{\cdots}/\ldots$

2. Filtre de Stern-Gerlach. (6 points)

Un faisceau F_0 de particules de spin 1/2 préparées dans l'état $|+\hat{z}\rangle$ se propage selon l'axe $\mathbb{R}\hat{y}$. Le faisceau pénètre dans un premier appareil de Stern-Gerlach dont le champ magnétique est dirigé selon l'axe $\mathbb{R}\hat{x}$ et se divise en deux faisceaux $F_\pm$. [3]

On recombine ensuite (interférence) $F_\pm$ en un seul faisceau $F_0{}'$ que l'on injecte dans un autre appareil de Stern-Gerlach dont le champ magnétique est dirigé selon l'axe $\mathbb{R}\hat{z}$. Sur chacun des deux faisceaux $F_\pm{}'$ [1] de sortie on place repectivement deux détecteurs $D_\pm$ (voir figure 1 ci-dessous).

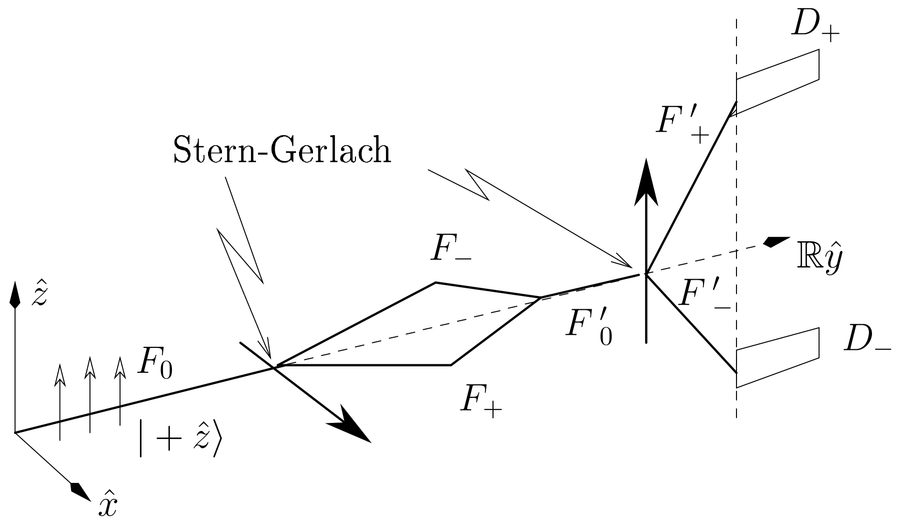

FIG. 1 – Schéma du dispositif de filtres de Stern-Gerlach.

1. Quelle observable mesure-t-on à la sortie du second Stern-Gerlach ?
2. Donner –respectivement– les expressions des états de spin (à une phase près) des particules dans les faisceaux F_0 , F_+ et F_-, puis $F_0{}'$, F_+' et F_-'.
3. Calculer les probabilités $P_\pm$ de détecter des particules respectivement en $D_\pm$.
4. On bloque à présent le faisceau F_-. Donner –respectivement– les expressions des états de spin (à une phase près) dans les faisceaux $F_0{}'$, F_+' et F_-'.
5. Calculer les nouvelles probabilités $\widetilde{P}_\pm$ de détection respectivement en $D_\pm$.
6. Interpréter ces deux expériences.

[3] En faisant abstraction du signe du rapport gyromagnétique et du signe du gradient du champ magnétique dans le Stern-Gerlach, on supposera que F_+ (respectivement F_-) correspond au "spin up" – parallèle (respectivement "spin down" – anti-parallèle) à l'axe du champ magnétique du Stern-Gerlach.

N.B. Il est conseillé de consacrer une heure aux deux exercices suivants. Toutes les étapes des divers raisonnements menant aux résultats demandés dans ces deux exercices devront être justifiées !

3. Équation de Bogoliubov-Duhamel. (4 points)

Donner la démonstration de l'équation de Bogoliubov-Duhamel pour le propagateur $U(t, t_0)$ défini par la relation

$$\psi(t) = U(t, t_0)\, \psi(t_0) \ ,$$

où la fonction d'onde $\psi(t)$ vérifie l'équation de Schrödinger non-stationnaire :

$$i\hbar\, \partial_t \psi(t) = (H_0 + W(t))\, \psi(t) \ .$$

4. Facteur de forme. (4 points)

Soit le vecteur de transfert $\overrightarrow{q} = (\overrightarrow{k}_f - \overrightarrow{k}_{in}) \perp \overrightarrow{e}_z$. Dans le cas d'une diffusion inélastique sur un oscillateur harmonique isotrope, est-ce que le facteur de forme

$$F_{(n_x,n_y,n_z)(m_x,m_y,\,n_z)}(\overrightarrow{q}) = F_{(n_x,n_y,n_z)(m_x,m_y,\,m_z)}(\overrightarrow{q}) \quad \text{pour } n_z \neq m_z\,?$$

Expliquer pourquoi ?

** FIN **

Université de la Méditerranée **Master Physique et Sciences de la Matière**
UFR-Sciences de Luminy Année M1 – Semestre 1, 2008-09

EXAMEN de MÉCANIQUE QUANTIQUE – DURÉE 2 HEURES (06 janvier 2009)

Ni document, ni calculette.

---

1. Filtre de Stern-Gerlach. (6 points)

Un faisceau F_0 de particules de spin 1/2 préparées dans l'état $|+\hat{z}\rangle$ se propage selon l'axe $\mathbb{R}\hat{y}$. Le faisceau pénètre dans un premier appareil de Stern-Gerlach dont le champ magnétique est dirigé selon l'axe $\mathbb{R}\hat{x}$ et se divise en deux faisceaux $F_\pm$. [4]

On recombine ensuite (interférence) $F_\pm$ en un seul faisceau $F_0{}'$ que l'on injecte dans un autre appareil de Stern-Gerlach dont le champ magnétique est dirigé selon l'axe $\mathbb{R}\hat{z}$. Sur chacun des deux faisceaux $F_\pm{}'$ [1] de sortie on place repectivement deux détecteurs $D_\pm$ (voir figure 2 ci-dessous).

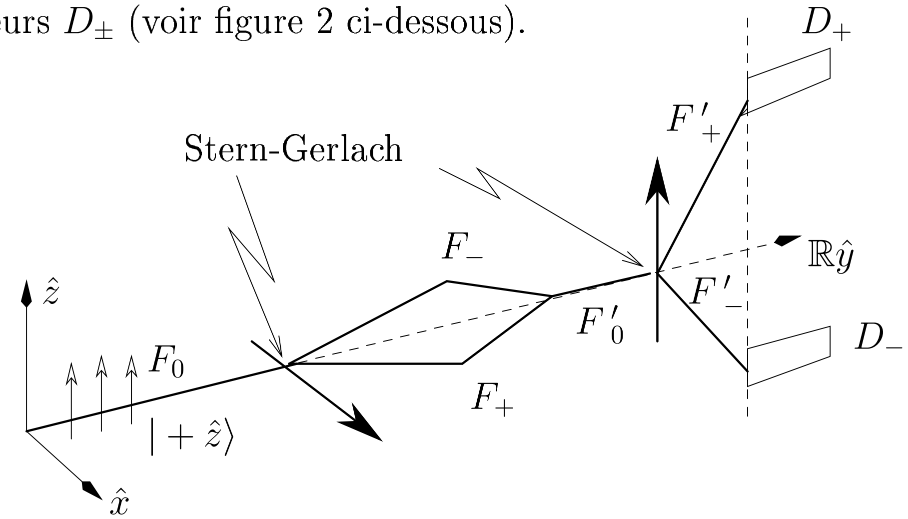

FIG. 2 – Schéma du dispositif de filtres de Stern-Gerlach.

1. Quelle observable mesure-t-on à la sortie du second Stern-Gerlach ?
2. Donner –respectivement– les expressions des états de spin (à une phase près) des particules dans les faisceaux F_0 , F_+ et F_-, puis $F_0{}'$, F_+' et F_-'.
3. Calculer les probabilités $P_\pm$ de détecter des particules respectivement en $D_\pm$.
4. On bloque à présent le faisceau F_-. Donner –respectivement– les expressions des états de spin (à une phase près) dans les faisceaux $F_0{}'$, F_+' et F_-'.
5. Calculer les nouvelles probabilités $\widetilde{P}_\pm$ de détection respectivement en $D_\pm$.
6. Interpréter ces deux expériences.

[4]En faisant abstraction du signe du rapport gyromagnétique et du signe du gradient du champ magnétique dans le Stern-Gerlach, on supposera que F_+ (respectivement F_-) correspond au "spin up" – parallèle (respectivement "spin down" – anti-parallèle) à l'axe du champ magnétique du Stern-Gerlach.

2. Orbitales d'un électron. (14 points)

On néglige ici la partie radiale de la fonction d'onde de l'électron ainsi que le spin du proton.

Dans l'espace d'Hilbert total $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathsf{orbit}} \otimes \mathcal{H}_{\mathsf{spin}}$, on suppose que l'état du moment angulaire total d'un électron dans un atome est donné par la superposition

$$|\Psi\rangle = A\left[\left(Y_0^0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,Y_1^0\right) \otimes |+\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1 - Y_1^0\right) \otimes |-\rangle\right] = A\begin{pmatrix} Y_0^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,Y_1^0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1 - Y_1^0\right)\end{pmatrix}.$$

Si $|\Psi\rangle = Y \otimes |+\rangle + Z \otimes |-\rangle$, (idem pour $|\Psi'\rangle$) le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ est donné par

$$\langle\Psi'|\Psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Y'|Y\rangle_{\mathsf{orbit}} + \langle Z'|Z\rangle_{\mathsf{orbit}}.$$

Pour la partie orbitale seule, on rappelle que les harmoniques sphériques Y_ℓ^m sont les vecteurs propres $|\ell\, m\rangle$ communs à $\overrightarrow{L}^2$ et à L_z pour les valeurs propres $\hbar^2\ell(\ell+1)$ et $\hbar m$, respectivement, et qu'elles sont normalisées à l'unité

$$\langle Y_\ell^m|Y_{\ell'}^{m'}\rangle_{\mathsf{orbit}} = \delta_{\ell\ell'}\,\delta^{mm'}.$$

1. Quel est l'espace d'Hilbert $\mathcal{H}_{\mathsf{spin}}$?
2. Déterminer le scalaire A (à une phase près) de telle sorte que $\langle\Psi|\Psi\rangle_{\mathcal{H}} = 1$.
3. Quelles valeurs obtiendrait-on lors d'une mesure de $\overrightarrow{S}^2$ et indiquer avec quelles probabilités.
4. Calculer les probabilités $p(\pm\hat{z})$ de trouver $\pm\hbar/2$ dans une mesure de l'observable S_z.
5. Calculer les probabilités $p(\pm\hat{x})$ de trouver $\pm\hbar/2$ dans une mesure de l'observable S_x.
6. Au sujet de la partie orbitale, quels sont les résultats possibles d'une mesure de l'observable $L_z \otimes \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} L_z & 0 \\ 0 & L_z\end{pmatrix}$?
7. Déterminer les probabilités correspondantes.
8. Quelles valeurs obtiendrait-on lors d'une mesure de $\overrightarrow{L}^2$ et indiquer avec quelles probabilités.
9. Donner la dimension des sous-espaces propres de $\overrightarrow{L}^2$ correspondants.
10. En déduire la dimension de l'espace $\mathcal{H}_{\mathsf{orbit}}$ relatif au problème.

** FIN **

CORRIGÉS DES EXAMENS de MÉCANIQUE QUANTIQUE du (06 janvier 2009)

1. Atome d'hydrogène et addition de moments angulaires.
(de l'exam de 3H)

1) On utilise le produit scalaire donné dans l'énoncé pour calculer la norme de Ψ dont la composante non nulle est selon le spin "down". On utilisera le paramétrage en coordonnées sphériques adapté au traitement de la partie spatiale.

$$\begin{aligned}
||\Psi||^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_-(\vec{\mathrm{x}})|^2 d^3\vec{\mathrm{x}} = 2\pi \int_0^\infty dr\ r^2 |R(r)|^2 \int_0^\pi d\theta\ \sin\theta |Y_1^0(\theta)|^2 \\
&= \tfrac{1}{24}\left(\int_0^\infty dr\ \frac{r^4 e^{-r/a}}{a^5}\right) \tfrac{3}{2}\left(\int_0^\pi d\theta\ \sin\theta\cos^2\theta\right) \\
&\overset{u=r/a}{=} \tfrac{1}{24}\int_0^\infty du\ u^4\, e^{-u}\ \tfrac{1}{2}\left[-\cos^3\theta\right]_0^\pi \overset{\text{Indic.}}{=} \tfrac{1}{24}\, 4!\, \tfrac{1}{2}\left(-(-1)^3+1\right) = 1.
\end{aligned}$$

2) Mesurer S_z revient à tester ses deux valeurs propres $\pm\hbar/2$ avec probabilités respectives $p_\pm = ||P_{\pm\hat{z}}\Psi||^2$. On a $P_{\hat{z}}\Psi = 0$ $(p_+ = 0)$ et il reste
$p_- = ||P_{-\hat{z}}\Psi||^2 = ||\Psi||^2 = 1$.

3) La partie moment angulaire de Ψ est donnée par $Y_1^0|-\rangle = |1\,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle$ dans la nomenclature des états de spin. Ceci correspond à l'addition $1\times\tfrac{1}{2}$ de deux spins ce qui conduit au spin total $J=\tfrac{1}{2}$ ou $J=\tfrac{3}{2}$.

4) Mesurer le spin total J c'est mesurer l'observable $\vec{J}^{\,2} = (\vec{L}+\vec{S})^2$ sur l'état Ψ qu'il faut donc décomposer dans les états propres $|J\,M\rangle$ de $\vec{J}^2$ (base couplée). Une lecture horizontale de la table $1\times\tfrac{1}{2}$ des C-G conduit à la décomposition de la partie angulaire de Ψ suivante

$$|1\,0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle,$$

expression de laquelle on tire

$$\text{proba}(J=3/2) = |\langle\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}|\Psi\rangle|^2 = 2/3, \qquad \text{proba}(J=1/2) = |\langle\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}|\Psi\rangle|^2 = 1/3,$$

dont la somme donne bien 1.

5) $J_z = L_z + S_z$ dont les valeurs propres sont $\hbar M$, $|M|\le J$. On a clairement

$$J_z\Psi = -\tfrac{\hbar}{2}\Psi \text{ avec proba}(M=-\tfrac{1}{2}) = \sum_{J=1/2}^{3/2}\left|\langle J, M=-\tfrac{1}{2}|\Psi\rangle\right|^2 = 1.$$

6) Pour la distance moyenne au proton

$$\begin{aligned}
\overline{r} &= \langle\Psi|\,|\vec{q}|\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} r\,|\psi_-(\vec{\mathrm{x}})|^2 d^3\vec{\mathrm{x}} = \int_0^\infty dr\; r^3|R(r)|^2 \;\underbrace{||Y_1^0||^2}_{=1} \\
&= \tfrac{1}{24}\int_0^\infty dr\; \frac{r^5 e^{-r/a}}{a^5} \overset{u=r/a}{=} \tfrac{a}{4!}\int_0^\infty du\; u^5\, e^{-u} \overset{\text{Indic.}}{=} 5a \simeq 2.645\,\text{Å}
\end{aligned}$$

2. Filtre de Stern-Gerlach. (commun aux exams 3H & 2H)

Voir pour l'idée et discussion physiques [Feynman Chap.5 (en particulier les §5.2 et 5.3) même si la discussion est faite pour le spin 1].

1) Le 2nd S-G est orienté selon $\hat{z}$ donc on mesure avec cet appareil l'observable de spin $\hat{z}\cdot\overrightarrow{S} = S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$.

2) Regardons faisceau par faisceau,

• La polarisation dans le faisceau initial est F_0 : $|+\hat{z}\rangle$. La préparation de ce faisceau polarisé a nécessité au préalable un filtre de S-G orienté selon $\hat{z}$ à la sortie duquel on a bloqué le faisceau correspondant au spin "down" pour ne sélectionner que celui ayant la polarisation spin "up".

• Le 1er S-G va "projeter" l'état de spin $|+\hat{z}\rangle$ du faisceau polarisé entrant sur les deux états $|\pm\hat{x}\rangle$, respectivement "up" et "down" par rapport à l'axe $\hat{x}$ du champ magnétique. Ce 1er S-G mesure l'observable de spin $\hat{x}\cdot\overrightarrow{S} = S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\left(P_{+\hat{x}} - P_{-\hat{x}}\right)$. Mathématiquement, cela se traduit par le calcul des projections

$$P_{\pm\hat{x}}|+\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{1}\pm\sigma_x\right)|+\rangle = \tfrac{1}{2}\left(|+\rangle \pm |-\rangle\right), \qquad ||P_{\pm\hat{x}}|+\rangle||^2 = 1/2,$$

qu'il faut normer à un (évolution = transformation unitaire !),

$$|\pm\hat{x}\rangle = \tfrac{1}{||P_{\pm\hat{x}}|+\rangle||}\,P_{\pm\hat{x}}|+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle),$$

d'où l'expression de la polarisation incidente sur les états propres de l'observable S_x

$$|+\hat{z}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\hat{x}\rangle + |-\hat{x}\rangle\right),$$

expression qui montre que l'état $|+\hat{z}\rangle$ est en quelque sorte délocalisé dans les deux faisceaux : $F_\pm$: $\frac{1}{\sqrt{2}}|\pm\hat{x}\rangle$.

• La recombinaison en $F_0{}'$ des deux faisceaux sortant $|\pm\hat{x}\rangle$ du 1er S-G par superposition (interférence) donne $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\hat{x}\rangle + |-\hat{x}\rangle\right) = |+\rangle$ qui redonne la polarisation $|+\hat{z}\rangle$ comme polarisation entrante dans le 2nd S-G, polarisation qui correspond à un état propre de ce S-G mesurant l'observable S_z.

Dans le 2nd S-G les états $|F_\pm'\rangle = P_{\pm\hat{z}}|F_0{}'\rangle$ donnent donc par projection les états de polarisation suivants

- $F_+' : |+\hat{z}\rangle$, et $F_-' : 0$.

3) Les probabilités de trouver les particules dans les détecteurs $D_\pm$ sont données par $\text{proba}(D_\pm) = P_\pm = ||P_{\pm\hat{z}}|+\hat{z}\rangle||^2$, d'où $P_+ = 1$ ($S_z = +\hbar/2$) et $P_- = 0$ ($S_z = -\hbar/2$).

Ceci correspond –selon l'écriture de Feynman– à la mise en série des filtres S-G schématisant les deux expériences suivantes avec leurs amplitudes respectives

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{z} & & \hat{x} & & \hat{z} & & \\ \left\{\begin{array}{c} + \\ -\rule{3pt}{10pt} \end{array}\right\} & \xrightarrow{F_0} & \left\{\begin{array}{ccc} + & : & F_+ \\ - & : & F_- \end{array}\right\} & \xrightarrow{F_0'=F_++F_-} & \left\{\begin{array}{c} + \\ -\rule{3pt}{10pt} \end{array}\right\} & \xrightarrow{F'_+} & (100\,\%) \end{array}$$

dont le calcul de l'amplitude donne $\sum_{\varepsilon=\pm} \langle +\hat{z}|\varepsilon\,\hat{x}\rangle\langle\varepsilon\,\hat{x}|+\hat{z}\rangle = 1$ à une phase près (interférences constructives), et,

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{z} & & \hat{x} & & \hat{z} & & \\ \left\{\begin{array}{c} + \\ -\rule{3pt}{10pt} \end{array}\right\} & \xrightarrow{F_0} & \left\{\begin{array}{ccc} + & : & F_+ \\ - & : & F_- \end{array}\right\} & \xrightarrow{F_0'=F_++F_-} & \left\{\begin{array}{c} +\rule{3pt}{10pt} \\ - \end{array}\right\} & \xrightarrow{F'_-} & (0\,\%) \end{array}$$

dont le calcul de l'amplitude donne $\sum_{\varepsilon=\pm} \langle -\hat{z}|\varepsilon\,\hat{x}\rangle\langle\varepsilon\,\hat{x}|+\hat{z}\rangle = 0$ (interférences destructives).

4) En présence du cache qui bloque le faisceau F_- sortant du 1er polariseur de S-G. Ainsi,

- $|F_+\rangle = |F_0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\hat{x}\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)$ où on a décomposer l'état entrant dans le 2ème polariseur de S-G sur les états propres de ce dernier. D'où
- $|F_\pm'\rangle = P_{\pm\hat{z}}|F_0'\rangle = \frac{1}{2}|\pm\rangle$.

5) $\widetilde{P}_\pm = ||P_{\pm\hat{z}}\frac{1}{\sqrt{2}}|+\hat{x}\rangle||^2 = 1/4$. Ceci s'illustre à nouveau selon Feynman comme

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{z} & & \hat{x} & & \hat{z} & & \\ \left\{\begin{array}{c} + \\ -\rule{3pt}{10pt} \end{array}\right\} & \xrightarrow{F_0} & \left\{\begin{array}{ccc} + & : & F_+ \\ - & : & F_-\rule{3pt}{10pt} \end{array}\right\} & \xrightarrow{F_0'=F_+} & \left\{\begin{array}{c} + \\ -\rule{3pt}{10pt} \end{array}\right\} & \xrightarrow{F'_+} & (25\,\%) \end{array}$$

dont le calcul de l'amplitude donne $\langle +\hat{z}|F_+\rangle\langle F_+|+\hat{z}\rangle = 1/2$ (à une phase près) d'où la probabilité $|\langle +\hat{z}|F_+\rangle\langle F_+|+\hat{z}\rangle|^2 = 1/4$ et,

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{z} & & \hat{x} & & \hat{z} & & \\ \left\{\begin{array}{c} + \\ -\rule{3pt}{10pt} \end{array}\right\} & \xrightarrow{F_0} & \left\{\begin{array}{ccc} + & : & F_+ \\ - & : & F_-\rule{3pt}{10pt} \end{array}\right\} & \xrightarrow{F_0'=F_+} & \left\{\begin{array}{c} +\rule{3pt}{10pt} \\ - \end{array}\right\} & \xrightarrow{F'_-} & (25\,\%) \end{array}$$

dont le calcul de l'amplitude $\langle -\hat{z}|F_+\rangle\langle F_+|+\hat{z}\rangle = 1/2$ (à une phase près) d'où la probabilité $|\langle -\hat{z}|F_+\rangle\langle F_+|+\hat{z}\rangle|^2 = 1/4$.

6) Dans la première manip de filtres de S-G, la recombinaison à la sortie du 1er S-G en un faisceau $F_0{}'$ permet de reconstruire par interférences la polarisation $|+\rangle$ initiale ; ceci se lit sur les probabilités $P_+ = 1$ et $P_- = 0$ sur la mesure de l'observable S_z du spin qui redonne donc un résultat certain $+\hbar/2$. Ainsi, l'information sur l'état initial a été conservée ! Tout s'est déroulé comme si le 1er S-G (avec ces deux canaux ouverts) n'avait pas été mis en place, ce qui traduit d'un point de vue expérimental la fameuse relation de fermeture ($P_{+\hat{x}}+P_{-\hat{x}} = \mathbb{1}$).

En revanche, dans la 2ème manip avec le cache, une particule du faisceau possède une probabilité $||P_{-\hat{x}}|+\hat{z}\rangle||^2 = |\langle -\hat{x}|+\hat{z}\rangle|^2 = 1/2$ d'être absorbée par le cache ou une probabilité 1/2 de se retrouver dans le faisceau de sortie $F_0{}'$, (soit une chance sur deux). De fait, elle possède une probabilité de $\widetilde{P}_+ + \widetilde{P}_- = 1/2$ d'être détectée par l'un des deux compteurs. Ces derniers mesurent l'observable S_z et donnent les deux résultats, montrant ainsi que le 1er S-G a perturbé l'état initial. L'absorbeur augmente la probabilité de détection du compteur D_- (on passe de 0 à 1/4). Ce fait expérimental (*mesuré !*) montre que l'état quantique des particules à spin est délocalisé spatialement, et se "trouve" de fait dans les deux faisceaux F_+ et F_- à la fois ; et se recombine par superposition dans $F_0{}'$. Si F_- est bloqué alors la particule a une chance sur deux de passer le 1er filtre.

3. Orbitales d'un électron. (exam de 2H)

Voir par exemple [Basdevant-Dalibard] exo. 12.3

1. Il s'agit de l'espace d'Hilbert décrivant le spin 1/2 : $\mathcal{H}_{\mathsf{spin}} = \mathcal{H}_{1/2} = \mathbb{C}^2$.
2. En imposant $\langle\Psi|\Psi\rangle_{\mathcal{H}} = 1$ et en utilisant successivement l'orthogonalité des états de spin puis orbitaux par $\langle\Psi'|\Psi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Y'|Y\rangle_{\mathsf{orbit}} + \langle Z'|Z\rangle_{\mathsf{orbit}}$ on trouve
$$\begin{aligned} 1 &= |A|^2\left(||Y_0^0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,Y_1^0||^2_{\mathsf{orbit}} + \tfrac{1}{3}\,||Y_1^1 - Y_1^0||^2_{\mathsf{orbit}}\right) \\ &= |A|^2\left(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}(1+1)\right) = 2|A|^2, \end{aligned}$$
d'où $A = 1/\sqrt{2}$ à une phase près. Ainsi l'état est
$$|\Psi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Y_0^0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,Y_1^0 \\ \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\left(Y_1^1 - Y_1^0\right)\end{pmatrix}.$$
3. Mesurer $\overrightarrow{S}^2$ teste le spin $s = 1/2$. Or, $|\Psi\rangle$ se décompose sur les états propres $|\pm\rangle$ de $\overrightarrow{S}^2$ et la valeur $s = 1/2$ est certaine et s'obtiendra donc avec probabilité un.

4. Il faut utiliser ici les projecteurs orthogonaux associés [5] pour calculer les probabilités

$$\begin{aligned} p(\pm\hat{z}) &= \|P_{\pm\hat{z}}\Psi\|^2 = \left\| \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\pm 1 & 0 \\ 0 & 1\mp 1 \end{pmatrix}\Psi \right\|^2 \\ &= \tfrac{1}{8}\left\| \begin{pmatrix} (1\pm 1)\left(Y_0^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0\right) \\ \frac{1\mp 1}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1 - Y_1^0\right) \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \tfrac{1}{8}\left((1\pm 1)^2 \|Y_0^0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0\|^2_{\mathsf{orbit}} + \tfrac{(1\mp 1)^2}{3}\|Y_1^1 - Y_1^0\|^2_{\mathsf{orbit}} \right) \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{cases} 1+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}(1+1) \end{cases} = \begin{cases} 2/3 & (S_z = +\hbar/2) \\ 1/3 & (S_z = -\hbar/2) \end{cases}, \end{aligned}$$

dont la somme donne bien un.

5. $p(\pm\hat{x}) = \|P_{\pm\hat{x}}\Psi\|^2 = \left\| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}\Psi \right\|^2 = \begin{cases} 1/3 & (S_x = +\hbar/2) \\ 2/3 & (S_x = -\hbar/2) \end{cases}$, dont la somme donne bien un.

6. Une mesure de l'observable $L_z \otimes \mathbb{1}_2$ donne $m_z = 0, \hbar$.

7. Les probabilités correspondantes sont données par

$$\text{proba}(L_z = 0) = \left\| \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Y_0^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\right) = 5/6,$$

$$\text{proba}(L_z = \hbar) = \left\| \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1/6,$$

et dont la somme donne bien un.

8. Les valeurs de $\overrightarrow{L}^2$ sont 0 ($\ell = 0$) et $2\hbar^2$ ($\ell = 1$) avec probabilités

$$\text{proba}(\ell = 0) = \left\| \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Y_0^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \tfrac{1}{2},$$

$$\text{proba}(\ell = 1) = \left\| \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(Y_1^1 - Y_1^0\right) \end{pmatrix} \right\|^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = 1/2,$$

dont la somme donne bien un.

[5] Ce calcul illustre parfaitement l'importance du rôle des projecteurs orthogonaux pour mener les calculs de façon systématique et éviter des erreurs. En effet, si on avait voulu calculer ces deux probabilités comme modules carrés d'une amplitude à savoir (naïvement), $p(\pm\hat{z}) = |\langle\pm\hat{z}|\Psi\rangle|^2$ il faut comprendre que le "bra" $\langle\pm\hat{z}|$ est loin d'être trivial.

9. Les dimensions des sous-espaces propres de $\overrightarrow{L}^2$ correspondants sont respectivement, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{\ell=0} = 1$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{\ell=1} = 3$.
10. On a une décompostion en représentations irréducibles du moment angulaire orbital pour l'espace $\mathcal{H}_{\mathsf{orbit}} = \mathcal{H}_{\ell=0} \oplus \mathcal{H}_{\ell=1}$ d'où $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{\mathsf{orbit}} = 1 + 3 = 4$.