

MQ-I – CORRECTION du Devoir n°2.

1. Propagateur libre de Schrödinger.

1) En dérivant convenablement sous le signe somme, on vérifie que

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

2) Trivialement

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t_0) e^{-ikx} dx.$$

3) Certains changements de variables et l'intégrale de Fresnel donnent le noyau (*i.e.* fonction de Green ou propagateur)

$$K(x, t; x_0, t_0) = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar(t-t_0)}} \exp \left[\frac{im(x-x_0)^2}{2\hbar(t-t_0)} \right] \quad (t > t_0)$$

de l'équation de Schrödinger libre.

2. Comparaison paquet d'ondes gaussien et état cohérent (cas 1D).

1-gaussien) Prenons $\psi_t(x) = (\sqrt{\pi}(a + \frac{it}{a}))^{-1/2} \exp \left(-\frac{(x - k_0 t)^2}{2(a^2 + it)} + i(k_0 x - \frac{k_0^2 t}{2}) \right)$ où la détermination de la racine carrée est telle que la partie réelle soit positive de sorte qu'à $t = 0$, $\sqrt{a + \frac{it}{a}} = \sqrt{a}$ afin de retrouver la condition initiale. On calcule successivement,

$$|\psi_t(x)|^2 = \left(\pi(a^2 + \frac{t^2}{a^2}) \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(x - k_0 t)^2}{a^2 + \frac{t^2}{a^2}} \right) = \frac{1}{A\sqrt{\pi}} e^{-(x-k_0 t)^2/A^2} \text{ en posant } A^2 = a^2 + \frac{t^2}{a^2},$$

$$\langle x \rangle = \langle \psi_t | q | \psi_t \rangle = \int_{\mathbb{R}} x |\psi_t(x)|^2 dx = k_0 t ||\psi_t||^2 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (x - k_0 t) |\psi_t(x)|^2 dx}_{=0 \text{ par parité}} = k_0 t,$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle \psi_t | q^2 | \psi_t \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi_t(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (Au + k_0 t)^2 e^{-u^2} du = \frac{1}{2} A^2 + (k_0 t)^2,$$

$$\Delta x := \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = A/\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{t^2}{a^4} \right)^{1/2}.$$

Pour l'opérateur d'impulsion p on passe en représentation k grâce à l'unitarité de la transformation de Fourier $\psi_t(k) = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}} e^{-(a^2(k-k_0)^2 + ik^2 t)/2}$, et on obtient de manière analogue

$$|\psi_t(k)|^2 = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2(k-k_0)^2} \text{ (indépendant de } t \text{)},$$

$$\langle p \rangle = \langle \psi_t | p | \psi_t \rangle = \int_{\mathbb{R}} k |\psi_t(k)|^2 dk = k_0 ||\psi_t||^2 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (k - k_0) |\psi_t(k)|^2 dk}_{=0 \text{ par parité}} = k_0,$$

$$\langle p^2 \rangle = \langle \psi_t | p^2 \psi_t \rangle = \int_{\mathbb{R}} k^2 |\psi_t(k)|^2 dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u}{a} + k_0\right)^2 e^{-u^2} du = \frac{1}{2a^2} + k_0^2 ,$$

$$\Delta p := \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{1}{a\sqrt{2}}.$$

D'où l'inégalité de Heisenberg pour le paquet d'ondes gaussien $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t^2}{a^4}\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}$, l'égalité n'étant réalisée qu'à $t = 0$.

1-cohérent) $\|\varphi_t\| = 1$ avec $\varphi_t(x) = A \exp\left(-\frac{(x - \alpha(t))^2}{2} + i\beta(t)x\right)$ donne $A = \sqrt{1/\sqrt{\pi}}$ à une phase près. De manière similaire aux calculs précédents (voir également [Le Bellac] § 11.2), on obtient avec $|\varphi_t(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-\alpha)^2}$,

$$\langle x \rangle = \langle \varphi_t | x \varphi_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x |\varphi_t(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (u + \alpha) e^{-u^2} du = \alpha \|\varphi_t\|^2 = \alpha ,$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle \varphi_t | x^2 \varphi_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi_t(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (u + \alpha)^2 e^{-u^2} du = \frac{1}{2} + \alpha^2 ,$$

$$\langle p \rangle = \langle \varphi_t | p \varphi_t \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi_t(x)} (-i) \frac{d\varphi_t}{dx}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (iu + \beta) e^{-u^2} du = \beta ,$$

$$\langle p^2 \rangle = \langle \varphi_t | p^2 \varphi_t \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi_t(x)} (-1) \frac{d^2 \varphi_t}{dx^2}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (1 + \beta^2 + 2i\beta u - u^2) e^{-u^2} du = \frac{1}{2} + \beta^2 ,$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{1}{2},$$

D'où l'inégalité de Heisenberg pour les états cohérents $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{1}{2}$, qui reste saturée au cours de l'évolution.

2) Bien qu'ayant respectivement des conditions initiales de type gaussienne

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0 x}, \quad \varphi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{(x-\alpha_0)^2}{2} + i\beta_0 x},$$

le paquet d'ondes gaussien subit au cours de son évolution un étalement (loi de dispersion) bien qu'il reste centré sur $k_0 t$ tout en se déplaçant à vitesse k_0 , tandis que les états cohérents, du fait du potentiel harmonique, conservent au cours de leur évolution la forme gaussienne centrée sur α tout en se déplaçant avec impulsion β et donc,aturent l'inégalité de Heisenberg.

3. L'opérateur p générateur des translations d'espace.

On applique les définitions

$$(e^{-iap} \varphi)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} ((-iap)^n \varphi)(x) \stackrel{p = \frac{-id}{dx}}{=} \sum_{n \geq 0} \frac{(-a)^n}{n!} \varphi^{(n)}(x) \stackrel{\text{Taylor en } x}{=} \varphi(x - a).$$

Toute la construction est bien cohérente ($U(a)\varphi(x) = \varphi(x - a)$) et p sert bien de générateur des translations d'espace.

4. SUSY.

1) H_0 et H_1 sont trivialement auto-adjoints, ce sont donc des observables.

Comme $\langle \Psi, H_0 \Psi \rangle = \|Q^\dagger \Psi\|^2 \geq 0$ (idem pour H_1), ces observables sont positives, leur spectre est donc contenu dans $[0, +\infty[$.

2) Si $H_0 \Psi_0 = 0$, a fortiori $\langle \Psi_0, H_0 \Psi_0 \rangle = \|Q^\dagger \Psi_0\|^2 = 0$, donc $Q^\dagger \Psi_0 = 0$. Réciproque immédiate.

3) Si $H_0 \Psi = E \Psi$, alors $Q^\dagger H_0 \Psi = H_1 Q^\dagger \Psi = E Q^\dagger \Psi$.

4) Si $H_1 \Phi = E \Phi$, alors $Q H_1 \Phi = H_0 Q \Phi = E Q \Phi$.

5) Etant donné que $d/dx = iP$ est anti auto-adjoint (intégration par parties), il vient

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + W(x) \right), \quad \text{et } [Q, Q^\dagger] = H_0 - H_1 = -[d/dx, W(x)] = -W'(x)$$

$$6) \text{ On trouve } H_0 = Q Q^\dagger = \frac{p^2}{2} + V_0(x) = -\frac{1}{2}(d/dx)^2 + \frac{1}{2}(W(x)^2 - W'(x)),$$

$$H_1 = Q^\dagger Q = \frac{p^2}{2} + V_1(x) = -\frac{1}{2}(d/dx)^2 + \frac{1}{2}(W(x)^2 + W'(x)).$$

7) Par un calcul direct, on trouve $V_0(x) = \frac{1}{2} - \cosh^{-2} x$ et $V_1(x) = \frac{1}{2}$.

Le potentiel V_0 correspond au potentiel de Pöschl-Teller $+\frac{1}{2}$ tandis que V_1 est le potentiel (constant) d'une particule libre dont le spectre d'énergie se trouve aisément.

8) Les seules "solutions" stationnaires de l'équation de Schrödinger libre : $\Phi'' + 2(E - \frac{1}{2})\Phi = 0$, non singulières à l'infini sont les ondes planes $\Phi_k(x) = C e^{ikx}$ telles que $k^2 = 2(E - \frac{1}{2}) \geq 0$. Le spectre d'énergie est continu et doublement dégénéré : $E(k) = E(-k) = \frac{1}{2}(1 + k^2) \geq \frac{1}{2}$. Mais la solution dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$ de l'équation de Schrödinger $i\partial_t \Phi = H_1 \Phi$, est donnée par le paquet d'ondes $\Phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} c(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$ avec ici la loi de dispersion $\omega = \frac{1}{2}(k^2 + 1)$ et $c(k)$ fonction coefficient à décroissance rapide dans $L^2(\mathbb{R}, dk)$ (cf cours).

Les super-partenaires sont donc $\Psi_k = Q \Phi_k$, i.e. $\Psi_k(x) = C(\tanh x - ik)e^{ikx}$. Par linéarité, la solution dans $L^2(\mathbb{R}, dx)$ de l'équation de Schrödinger $i\partial_t \Psi = H_0 \Psi$, est donnée par $\Psi_t(x) = (Q \Phi_t)(x)$ puisque $\|\Psi_t\|^2 = \|Q \Phi_t\|^2 = \langle \Phi_t, Q^\dagger Q \Phi_t \rangle = \langle \Phi_t, H_1 \Phi_t \rangle = \frac{1}{2}(\|c\|^2 + \|p c\|^2) < \infty$, si c est à décroissance rapide dans $L^2(\mathbb{R}, dk)$.

9) $Q^\dagger \Psi_0 = 0$ c'est résoudre $y' + y \tanh x = 0$ par séparation des variables $\frac{y'}{y} = -\tanh x$ ou encore $d \ln y = -\frac{\sinh x}{\cosh x} dx = -d \ln \cosh x$ d'où la solution générale $\Psi_0(x) = C/\cosh x$. C'est un état lié car $|\Psi_0(x)| \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \pm\infty$. Comme la différentielle $d \tanh x = dx/\cosh^2 x$, on a alors aisément (par changement de variable $t = \tanh x$)

$$\|\Psi_0\|^2 = |C|^2 \int_{\mathbb{R}} \cosh^{-2} x dx = |C|^2 \int_{-1}^{+1} dt = 2|C|^2,$$

et $\|\Psi_0\| = 1$ impose $C = 1/\sqrt{2}$ à une phase près.

10) Il est clair que $\langle P = -id/dx \rangle$ et $\langle X \rangle$ sont des intégrales de fonctions impaires sur $\mathbb{R}$, elles sont donc nulles. Puisque $Q^\dagger \Psi_0 = (iP + W)\Psi_0 = 0$ alors $\langle P^2 \rangle = \|P \Psi_0\|^2 = \|W \Psi_0\|^2$, et on obtient

$$\langle P^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tanh^2 x \cosh^{-2} x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} t^2 dt = 1/3.$$

Par ailleurs avec l'intégrale donnée, on a $\langle X^2 \rangle = \pi^2/12$, et donc $\Delta P \cdot \Delta X = 1/\sqrt{3} \cdot \pi/(2\sqrt{3}) = \pi/6 \cong 0,5236 > \frac{1}{2}$.