Université de la Méditerranée
UFR-Sciences de Luminy

Master Physique et Sciences de la Matière
Année M1 – Semestre 1, 2009-10

MQ-I – Devoir n°3 à rendre pour le mercredi 7 octobre 2009

1. Règles de commutation de Weyl. (2 pts)

En procédant pas à pas à partir des définitions, montrer que sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^3, d^3\vec{x})$

$$U(\vec{w})U(\vec{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot\vec{a}}\, U(\vec{a})U(\vec{w}).$$

2. Oscillateur harmonique 3D. (4 pts)

On se propose de résoudre l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t\psi_t(\vec{x}) = \tfrac{1}{\hbar}\left(\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2|\vec{q}|^2\right)\psi_t\right)(\vec{x}),$$

pour l'oscillateur harmonique quantique 3D en se ramenant à la résolution de trois oscillateurs 1D par séparation de variables.

1) Si on pose $\psi_t(\vec{x}) = e^{-i\omega t}f(x)g(y)h(z)$ pour $\vec{x} = (x, y, z)$, monter que le spectre est donné par $\omega = \omega_0(n + \frac{3}{2})$, avec $n \in \mathbb{N}$, et que les vecteurs propres s'écrivent sous la forme factorisée

$$|\psi_t\rangle = e^{-i\omega t}|n\rangle = e^{-i\omega_1 t}|n_1\rangle e^{-i\omega_2 t}|n_2\rangle e^{-i\omega_3 t}|n_3\rangle$$

avec $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ et $n = n_1 + n_2 + n_3$.

2) Que dire de la dégénérescence de l'état fondamental $n = 0$ et de l'état $n = 1$.

3. Paquet d'ondes gaussien 3D. (4 pts)

À nouveau en se ramenant à trois évolutions libres 1D, montrer que l'évolution libre d'un état gaussien symétrique sur $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\varphi_t(\vec{x}) = \left(\sqrt{\pi}(a + i\,t/a)\right)^{-3/2}\,\exp\left(-\frac{\vec{x}^2 - 2ia^2\vec{k}_0\cdot\vec{x} + i\vec{k}_0^2a^2t}{2(a^2 + it)}\right).$$

En déduire la densité de présence $|\varphi_t(\vec{x})|^2 d^3\vec{x}$.

4. Modèle des liaisons fortes. (6 pts)

On modélise les états de diffusion d'un électron dans un cristal de dimension un par un espace d'Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ dont une base orthonormée est caractérisée par $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$. L'action de l'Hamitonien sur cette base est donnée par (en unité de $\hbar$)

$$H|n\rangle = \omega_0|n\rangle + a|n+1\rangle + \bar{a}|n-1\rangle, \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

1) Vérifier que H est bien auto-adjoint.

2) Montrer que H commute avec l'opérateur de translation défini par $T|n\rangle = |n+1\rangle$.
Vérifier que T est un opérateur unitaire et en conclure que la translation est une symétrie du modèle. Exprimer H en fonction de T et $T^\dagger$.

3) Monter que $\mathrm{Ker}\, T = 0$ et déterminer les états propres $|z\rangle$ de T par une formule qui les caractérise parfaitement (à une constante près) par leurs valeurs propres respectives $z \in \mathbb{C}$ a priori. Par unitarité de T, montrer que $|z| = 1$. Conclure sur la dégénérescence du spectre de T.

4) En déduire que les états propres de T sont aussi états propres de H et déterminer les niveaux d'énergie $\omega(z)$. Vérifier que l'on a bien $\omega(z) \in \mathbb{R}$.

5) Les états $|z\rangle$ sont-ils normalisables ?

5. * L. de Broglie et la relativité restreinte : l'onde de phase. (4 pts + bonus)

En analogie avec le concept de quantum de lumière d'A. Einstien (photon), L. de Brogle a postulé l'existence d'un phénomène périodique de fréquence ν_0, associé à toute particule de masse propre m_0, dans le système de référence lié à celle-ci, $m_0c^2 = h\nu_0$. Chercher comment cette fréquence se manifeste pour un observateur fixe pour une particule se déplaçant à vitesse v est l'objet de cet exercice.

1) Selon la relativité restreinte, lorsque deux évènements sont séparés par un intervalle de temps $\Delta t'$ mesuré par une horloge mobile, un observateur fixe mesure entre ces mêmes évènements un intervalle de temps Δt selon la relation

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = v/c.$$

C'est le ralentissement relativiste des horloges.

Déterminer pour un observateur fixe, l'expression de la fréquence ν_1 du phénomène périodique associé à la particule en fonction de la masse propre de celle-ci.

2) Selon la mécanique relativiste, pour un observateur fixe, l'énergie E d'une particule en mouvement est $E = m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}$.

Déterminer la fréquence ν du phénomène périodique associé, selon la formule de Planck $E = h\nu$ à une telle énergie.

3) Les fréquences ν et ν_1 sont de natures différentes, ce qui avait intrigué L. de Broglie. La fréquence ν correspond à celle d'une "onde de phase". Il montra que le phénomène périodique lié à la particule parait constamment en phase avec l'onde de phase si cette dernière se propage à la vitesse de phase $V_{\text{ph}} = c/\beta$.

Supposons qu'à $t = 0$ il y ait accord entre le phénomène périodique lié à la particule et l'onde de phase. Calculer les variations de phase après un temps t, du phénomène périodique et de l'onde de phase. En déduire que l'accord de phase persiste pour tout t.

4) Supposons à présent que le phénomène périodique lié à la particule soit représenté par un paquet d'ondes. Démontrer que la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ des ondes de phase est égale à la vitesse v de la particule.

Université de la Méditerranée
UFR-Sciences de Luminy

Master Physique et Sciences de la Matière
Année M1 – Semestre 1, 2009-10

MQ-I – CORRECTION du Devoir n°3.

1. Règles de commutation de Weyl. (2 pts)

Il faut évaluer les opérateurs sur une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3\vec{x})$ arbitraire, ce qui donne une nouvelle fonction ; et pour connaitre cette dernière il faut l'évaluer en un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Ainsi, $\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3\vec{x})$ et $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$, on a successivement, en respectant bien le sens des évaluations des opérateurs,

$$\begin{aligned}\left(U(\vec{w})\,\underbrace{U(\vec{a})\varphi}\right)(\vec{x}) &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot\vec{X}}\,\left(U(\vec{a})\varphi\right)(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot\vec{X}}\,\varphi(\vec{x}-\vec{a}) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot\vec{a}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot(\vec{X}-\vec{a})}\,\varphi(\vec{x}-\vec{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot\vec{a}}\,\left(U(\vec{w})\varphi\right)(\vec{x}-\vec{a}) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{w}\cdot\vec{a}}\,\left(U(\vec{a})U(\vec{w})\varphi\right)(\vec{x}).\end{aligned}$$

L'égalité étant vraie pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, puis pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3\vec{x})$, on en déduit l'égalité opératorielle.

2. L'oscillateur harmonique isotrope à trois dimensions. (4 pts)

1) Dans ce cas le potentiel est $V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)$; l'hamiltonien est en définitive $H = H_x + H_y + H_z$: "somme" de trois oscillateurs harmoniques unidimensionnels *indépendants* mais de pulsations identiques. Notons que

$$H = \hbar\omega\left(N_x + N_y + N_z + \frac{3}{2}\mathbb{1}\right)$$

est bien une observable de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3, dxdydz)$. Les hamiltoniens H_x, H_y et H_z forment une famille commutante, ils sont donc simultanément diagonalisables. Un ket propre commun $|\vec{n}\rangle = |n_x, n_y, n_z\rangle$ correspond donc à la fonction $\langle\vec{x}|\vec{n}\rangle = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$ où $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$. Nous avons $N_x|\vec{n}\rangle = n_x|\vec{n}\rangle$, etc ... et donc $H|\vec{n}\rangle = E_n|\vec{n}\rangle$ avec

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) \qquad (n = n_x + n_y + n_z).$$

2) Fixons n ; quels sont les choix possibles pour n_x,n_y et n_z ?

• $n_x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

• n_x fixé, on a $n_y + n_z = n - n_x$ et il reste donc pour le couple (n_y, n_z) les $n - n_x + 1$ possibilités : $(0, n-n_x), (1, n-n_x-1), \ldots, (n-n_x, 0)$. La dégénérescence du niveau n est

$$d_n = \sum_{n_x=0}^{n}(n - n_x + 1) = \sum_{n_x=0}^{n}(n+1) - \sum_{n_x=0}^{n} n_x = (n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$$

et donc

$$d_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Seul le fondamental $n = 0$ est non dégénéré.

3. Paquet d'ondes gaussien 3D. (4 pts)

Le paquet d'ondes gaussien 3D est solution de l'équation de Schrödinger libre

$$i\frac{d}{dt}\Psi_t(\vec{\mathrm{x}}) = \left(\frac{\vec{p}^2}{2}\Psi_t\right)(\vec{\mathrm{x}}) = \tfrac{-1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi_t(\vec{\mathrm{x}}),$$

obtenu grâce à une condition initiale gaussienne isotrope. Par séparation des variables en posant $\Psi_t(\vec{\mathrm{x}}) = e^{-i(\omega_x+\omega_y+\omega_z)t}f_1(x)f_2(y)f_3(z)$, le problème se découple en trois équations à une dimension avec pour chaque direction $n = 1, 2, 3$ l'équation aux valeurs propres à une dimension $\tfrac{-1}{2}\dfrac{d^2}{d(x^n)^2}f_n(x^n) = \omega_n f_n(x^n)$ et la loi de dispersion $\omega_n = k_n^2/2$. Le paquet d'ondes gaussien 1D est donné par $\psi_t(x;k_{0x}) = \left(\sqrt{\pi}(a+\tfrac{it}{a})\right)^{-1/2}\exp\left(-\dfrac{(x-k_{0x}t)^2}{2(a^2+it)}+i(k_{0x}x-\tfrac{k_{0x}^2t}{2})\right)$, et deux expressions similaires aves les variables y et z. L'isotropie requière le même facteur a. Ainsi, en définissant $\vec{k}_0 = (k_{0x}, k_{0y}, k_{0z})$, le paquet d'ondes gaussien isotrope 3D, avec la loi de dispersion $\omega = \omega_x+\omega_y+\omega_z = \vec{k}_0^2/2$, est donné par

$$\Psi_t(\vec{\mathrm{x}}) = \psi_t(x;k_{0x})\psi_t(y;k_{0y})\psi_t(z;k_{0z}) = \left(\sqrt{\pi}(a+\tfrac{it}{a})\right)^{-3/2}\exp\left(-\frac{(\vec{\mathrm{x}}-\vec{k}_0t)^2}{2(a^2+it)}+i(\vec{k}_0\cdot\vec{\mathrm{x}}-\tfrac{\vec{k}_0^2t}{2})\right),$$

d'où le résulatat en réduisant l'argument de l'exponentielle. La densité de probabilité vaut alors

$$|\Psi_t(\vec{\mathrm{x}})|^2 = \left(\pi(a^2+\tfrac{t^2}{a^2})\right)^{-3/2}\exp\left(-\frac{(\vec{\mathrm{x}}-\vec{k}_0t)^2}{a^2+\frac{t^2}{a^2}}\right).$$

4. Modèle des liaisons fortes. (6 pts)

Voir par exemple : Mécanique Quantique de Feynman, chap.13.

1) La vérification de $H^\dagger = H$ s'effectue sur les vecteurs de la base orthonormée $\{|n\rangle\}$:

$$\begin{aligned}\langle H^\dagger k|n\rangle &= \langle k|Hn\rangle = \langle k|\omega_0|n\rangle + a|n+1\rangle + \bar{a}|n-1\rangle\rangle = \omega_0\delta_{kn} + a\delta_{k\,(n+1)} + \bar{a}\delta_{k\,(n-1)}\\ &= \omega_0\delta_{kn} + a\delta_{(k-1)\,n} + \bar{a}\delta_{(k+1)\,n} = \omega_0\langle k|n\rangle + a\langle k-1|n\rangle + \bar{a}\langle k+1|n\rangle\\ &= (\omega_0|k\rangle + a|k+1\rangle + \bar{a}|k-1\rangle)^\dagger|n\rangle = \langle\omega_0|k\rangle + a|k+1\rangle + \bar{a}|k-1\rangle|n\rangle.\end{aligned}$$

2) $[H,T] = 0$ se voit directement par action sur les vecteurs de base.
Par définition, $T^{-1}|n\rangle = |n-1\rangle$, d'une part, et, d'autre part,
$\langle T^\dagger k|n\rangle = \langle k|Tn\rangle = \langle k|n+1\rangle = \delta_{k\,(n+1)} = \langle k-1|n\rangle$, d'où $T^\dagger = T^{-1}$ et l'unitarité de T. Donc T traduit une symétrie du problème physique modélisé par l'Hamiltonien H.
Ainsi $H = \omega_0\mathbb{1} + aT + \bar{a}T^\dagger$.

3) Soit $|\psi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_n|n\rangle$. Résoudre $T|\psi\rangle = 0$ impose $\psi_n = 0$ pour tout n entier. Donc $\operatorname{Ker}T = 0$ et $z = 0$ n'est pas valeur propre de T. Plus rapide, T unitaire donc inversible !

Résoudre $T|z\rangle = z|z\rangle$ avec $|z\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\zeta_n|n\rangle$ conduit à $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\zeta_n|n+1\rangle = z\sum_{n\in\mathbb{Z}}\zeta_n|n\rangle$ d'où la récurrence $\zeta_n/\zeta_{n+1} = z$. En prenant ζ_0 comme valeur repère on obtient $|z\rangle = \zeta_0\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^{-n}|n\rangle$. L'unitarité de T indique [1] $\langle z|z\rangle = \langle z|T^{-1}T|z\rangle = \langle Tz|Tz\rangle = |z|^2\langle z|z\rangle$ d'où $|z|^2 = 1$, le spectre de

[1] Une autre façon de faire : $T^\dagger T|z\rangle = |z\rangle$ d'une part, et, d'autre part, $T^\dagger T|z\rangle = T^\dagger(z|z\rangle) = z\,T^\dagger|z\rangle$ d'où $T^\dagger|z\rangle = 1/z\,|z\rangle$ (puisque $z\neq 0$). Mais par ailleurs, $\langle z|T|z\rangle = z\langle z|z\rangle = 1/\bar{z}\,\langle z|z\rangle$.

T est continu et compact, c'est tout le cercle S^1. On peut poser $z = e^{i\theta}$ et $|\theta\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta}|n\rangle$ (à un facteur près) avec $T|\theta\rangle = e^{i\theta}|\theta\rangle$. Du fait de l'ambiguité sur l'argument de z, on voit apparaitre une dégénérescence infinie de chaque valeur propre z de T puisque $T|\theta + 2k\pi\rangle = e^{i\theta}|\theta + 2k\pi\rangle$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et on a $\langle\theta|\theta'\rangle = \delta(\theta' - \theta + 2k\pi)$. Ainsi un vecteur propre $|z\rangle$ se décompose donc comme $|z\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k|\theta + 2k\pi\rangle$.

4) On a $[H, T] = 0$, mais T n'est pas autoadjoint, donc il n'est pas évident de trouver une base commune de vecteurs propres orthogonaux entre eux. D'un côté, on a de manière directe $H|z\rangle = (\omega_0\mathbb{1} + aT + \bar{a}T^\dagger)|z\rangle = (\omega_0 + az + \overline{az})|z\rangle = \omega(z)|z\rangle$ et on a bien $\omega(z) \in \mathbb{R}$.

D'un autre côté, si on tient à plus de détails, alors $TH|z\rangle = HT|z\rangle = z\,H|z\rangle$ ce qui montre que $H|z\rangle$ est vecteur propre de T pour la valeur propre z. Donc $H|z\rangle$ se décompose sur la base du sous-espace propre de T correspondant à la valeur propre z : $H|z\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k(z)|\theta + 2k\pi\rangle$ avec $h_k(z) = \omega(z)\langle\theta + 2k\pi|z\rangle$. En particulier, si on prend $|z\rangle = |\theta\rangle$ alors $H|\theta\rangle = \omega(\theta)|\theta\rangle$ avec $\omega(\theta) = \omega_0 + 2|a|\cos(\theta + \alpha)$ si $a = |a|e^{i\alpha}$.

5) Normaliser revient à calculer $\langle z|z\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z|^{-2n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1$, somme qui diverge. On ne peut pas normer les états propres de T. C'est ce qu'exprime la mesure de Dirac $\langle\theta|\theta'\rangle = \delta(\theta'-\theta+2k\pi)$.

Physiquement, cela traduit le fait que les états propres ne sont pas localisés, et "recouvrent" plutôt tout le cristal 1D supposé de longueur infinie.

5. * L. de Broglie et la relativité restreinte : l'onde de phase. (4 pts + bonus)

1) La période $T = 2\pi/\nu$ est un intervalle de temps, donc une durée. On applique la formule du ralentissement relativiste des horloges avec $\Delta t' = T_0 = 2\pi/\nu_0$ et $\Delta t = T_1 = 2\pi/\nu_1$. On obtient $\nu_1 = \nu_0\sqrt{1-\beta^2} = m_0c^2\sqrt{1-\beta^2}/h$.

2) $E = h\nu = m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2} = h\nu_0/\sqrt{1-\beta^2}$ d'où $\nu = \nu_0/\sqrt{1-\beta^2}$.

3) Autant pour moi qui ai copie cet exercice dans le livre de Hladik & Chrysos "Introduction a la MQ" (exo 4.1 p. 68) qui se trouve a la BU. L'idee fondamentale de De Broglie est d'associer à toute particule un phénomène périodique. Ce dernier dans le repère propre lié à la particule prend la forme d'une onde stationnaire :

$$\Psi_0(t_0) = A_0\exp(i2\pi\nu_0 t_0)$$

Selon l'image qu'en donne de Broglie, ce phénomène périodique peut être assimiler, dans le repère où la particule est au repos, à des horloges immobiles placées en chaque point de l'espace, et synchronisées entre elles et de fréquence ν_0 (horloges identiques ?), de sorte que la phase $\omega_0 t_0$ est la même partout au mçeme instant t_0 du temps propre dans ce repère. La particule est considérée comme portant une horloge privilégiée sur laquelle sont synchronisées toutes les autres.

Placons-nous dans un repère galiléen fixe dans lequel la particule se déplace selon l'axe des x (pour fixer les idées) avec vitesse $v = \beta c$. Supposons que dans ce repère, l'instant $t = 0$ soit défini comme le temps où il y a accord de phase entre celle de l'horloge liée à la particule et celle de cette fameuse "onde de phase" : à $t = 0$, les phases sont égales ! Après un temps $t = x/v$, l'observateur fixe mesure deux aspects :

1) d'une part, la phase de l'horloge attachée à la particule (qui s'est déplacée de $x = vt$) a donc varié de $\nu_1 t$ (pour cet observateur !) avec l'effet relativiste qui va avec : le ralentissement des horloges. On contrôle ici les "tic-tac".

2) d'autre part, l'observateur fixe voit se déplacer, selon l'axe x et à vitesse v, cette infinite continue d'horloges : l'effet relativiste fait que la distribution des phases de ces horloges dans l'espace est décrite par une onde plane progressive monochromatique de fréquence ν et de vitesse de phase V, d'où le nom d'"onde de phase". C'est donc du "visuel". Ainsi, la phase de "l'onde de phase" (dont on cherche à déterminer la vitesse de phase V) au point x où se trouve la particule à l'instant t, a donc varie de $\nu(t - x/V)$.

On demande que ces deux phases, celle du tic-tac et celle du visuel, restent égales au cours du temps (!) ou de manière équivalente, coïncident au point x où se trouve la particule à l'instant t : $\nu_1 t = \nu(t - x/V)$ avec $t = x/v$ et $v = \beta c$. Cette contrainte détermine $V = c/\beta$. En effet, en substituant les résultats précédemment obtenus, on a pour tout t

$$\nu_0\sqrt{1-\beta^2} = \nu_0(1 - v/V)/\sqrt{1-\beta^2} \implies V = v/\beta^2 = c/\beta.$$

Commentaire : Pour se convaincre que cette contrainte possède une signification physique, il est utile (ou fondamental ?) de demander que lors du changement de repères par transformation de Lorentz on ait l'invariance du phénomène périodique :

$$\Psi_0(t_0) = \Psi(t,x) = A_0 \exp(i2\pi\nu(t - x/V)) \quad \text{par substitution } t_0 = \frac{t - x\beta/c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (deBro)$$

Cette invariance permet de retrouver la variance relativiste de la fréquence ν de "l'onde de phase" et la valeur de la vitesse de phase V : $\omega_0 t_0 = \omega(t - \frac{\beta}{c}x) = \omega(t - x/V)$, d'où $V = c/\beta$.

4) La vitesse de groupe est donnée par $v_G = \frac{d\omega}{dk}$ pour autant que l'on connaisse la loi de dispersion. Dans notre situation, du fait que $\omega = \omega_0/\sqrt{1-\beta^2}$ et que la vitesse de phase $V = \omega/k = c/\beta$ il y a une relation effective entre β (la vitesse de la particule) et le nombre d'onde k : $k = \beta\omega/c = \beta\omega_0/(c\sqrt{1-\beta^2})$ soit $\beta^2 = \frac{c^2k^2}{\omega_0^2 + c^2k^2}$. Ainsi au travers de β^2 on a la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ due au changement de référentiels. Pour calculer v_G il est plus commode de regarder ω et k comme fonctions de β et de calculer leur différentielle par rapport à cette variable β, puis d'appliquer la règle des chaînes pour la dérivation de fonctions composées. On a

$$\left.\begin{array}{l} d\omega = \frac{\beta\omega}{1-\beta^2} d\beta \\ dk = d\left(\frac{\beta\omega}{c}\right) = \frac{\omega}{c}d\beta + \frac{\beta}{c}d\omega = \frac{\omega}{c}\frac{d\beta}{1-\beta^2} \end{array}\right\} \implies v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\beta}\frac{d\beta}{dk} = \frac{\frac{\beta\omega}{1-\beta^2}}{\frac{\omega}{c}\frac{1}{1-\beta^2}} = \beta c = v.$$

Ainsi la vitesse de groupe v_G est bien la vitesse v à laquelle se déplace la particule dans le repère fixe, et correspond bien à un déplacement d'énergie de vitesse $v \leq c$.

Disgression : Sous changement de repères, les lois de transformation similaires, d'une part, de l'énergie $E = E_0/\sqrt{1-\beta^2}$ et, d'autre part, de la fréquence de l'onde de phase $\nu = \nu_0/\sqrt{1-\beta^2}$ font que la relation phénoménologique d'Einstein $E = h\nu$ est valable dans tout repère. De plus, la cinématique relativiste donne pour l'impulsion

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{v} = \frac{E}{c^2}\vec{v} \implies p := |\vec{p}| = \frac{E}{c^2}|\vec{v}| = \frac{E}{c^2}v = \frac{E\beta}{c}.$$

Ainsi, la longueur d'onde $\lambda = V/\nu$ de l'onde de phase conduit à la relation (longueur d'onde de de Broglie) : $\lambda = V/\nu = hV/E = \frac{ch}{E\beta} = \frac{hc^2}{vE} = \frac{h}{p}$ ou encore $p = h/\lambda = \hbar k$.

La relation phénoménologique $(E, -\vec{p}) = \hbar(\omega, -\vec{k})$ montre que la phase,

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} = \langle (E,\vec{p}), (t,\vec{\mathrm{x}})\rangle_{\text{Minkowski}} = (Et - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar,$$

de l'onde de phase *(deBro)* introduite par L. de Broglie, est un invariant relativiste et correspond à l'action classique S d'une particule libre.