

MQ-I – Devoir n°4 à rendre pour le mercredi 14 octobre 2009

1. Niveaux de Landau.

(9 pts)

On cherche le spectre d'énergie d'un électron soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ constant et uniforme.

1) Montrer que $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}$ est un potentiel vecteur de $\vec{B}$. Calculer ses composantes (A_x, A_y, A_z) pour $\vec{B} = (0, 0, B)$.

2) Le *couplage minimal* d'une particule de masse m et de charge électrique e à un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ consiste en la substitution $\vec{P} \rightarrow \vec{P} - e\vec{A}$ dans l'hamiltonien libre $H_0 = ||\vec{P}||^2/(2m)$. En déduire que, compte tenu de l'interaction magnétique, l'hamiltonien s'écrit

$$H = H_x + H_y + H_z + \omega L_z$$

où H_x (resp. H_y) est l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel de même masse m et de pulsation propre $\omega > 0$ à exprimer en fonction de la *pulsation cyclotron* $\Omega = -eB/m$. Quid de H_z ?

3) En déduire que le spectre de $H_x + H_y + \omega L_z$ est discret. Donner sa dégénérescence.

4) Trouver les niveaux d'énergie d'une particule dont la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique (niveaux de Landau).

2. Force de Lorentz & niveaux de Landau. (Janvier 2005)

(9 pts)

Classiquement, sur une particule chargée de charge électrique e , la force de Lorentz est $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$ et ne dérive pas d'un potentiel et on ne peut donc trouver un Hamiltonien de la forme $\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q})$.

Si on désigne par $\vec{p}$ et $\vec{q}$ les observables vectorielles d'impulsion et de position respectivement, on a vu que de la forme la plus générale d'un Hamiltonien compatible avec le principe de Galilée se réduit à dans le cas du potentiel électromagnétique à

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q}, t))^2 + eV(\vec{q}, t)$$

avec $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ et $\vec{E} = -\text{grad}V - \partial\vec{A}/\partial t$.

1) Une particule de masse m et de charge électrique e est plongée dans un champ électromagnétique $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial_t\vec{A}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ dérivant du quadri-potentiel $(-V, \vec{A})$. L'Hamiltonien du système, obtenu par prescription du couplage minimal, est l'opérateur

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q}, t) \right)^2 + eV(\vec{q}, t).$$

On définit maintenant l'opérateur *vitesse*

$$\dot{\vec{q}} := \frac{i}{\hbar} [H, \vec{q}].$$

Montrer que $\dot{\vec{q}}$ s'exprime simplement en fonction de $\vec{p}$, $\vec{A}$, e et m .

Est-ce une observable quantique ?

2) Montrer que les composantes de la vitesse ne commutent pas entre elles : prouver que

$$[\dot{q}_x, \dot{q}_y] = \frac{i\hbar\omega}{m} \mathbb{I}$$

où ω sera donné en fonction de B_z et e/m .

Calculer les deux autres commutateurs et en déduire l'expression de l'opérateur $\vec{q} \times \dot{\vec{q}}$ en fonction de $\vec{B}$.

3) Déduire de la définition suivante de l'opérateur *accélération*

$$\ddot{\vec{q}} := \frac{i}{\hbar} [H, \dot{\vec{q}}] + \partial_t \dot{\vec{q}}$$

la version quantique des équations du mouvement pour la force de Lorentz :

$$m\ddot{\vec{q}} = e\vec{E} + \frac{1}{2}e \left(\dot{\vec{q}} \times \vec{B} - \vec{B} \times \dot{\vec{q}} \right) = e\vec{E} + \frac{e}{2m} \left(\vec{p} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{p} \right) - \frac{e^2}{m} \vec{A} \times \vec{B}. \quad (\text{Lorentz-Q})$$

4) On considère désormais le cas d'un champ magnétique seul, $V = 0$, $\partial_t \vec{A} = 0$. On suppose que $\vec{B} = B\hat{z}$ est constant et uniforme.

Calculer $\ddot{q}_z$ et justifier ensuite que l'on peut alors diagonaliser simultanément H et $\dot{q}_z$.

5) Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ unique telle que l'opérateur

$$a := \alpha(\dot{q}_x + i\varepsilon \dot{q}_y) \quad \text{où} \quad \varepsilon := \frac{|\omega|}{\omega}$$

vérifie la relation de commutation $[a, a^\dagger] = \mathbb{I}$. Donner α en fonction de m , $\hbar$ et $|\omega|$.

6) Ecrire l'expression de H en fonction des opérateurs a et $\dot{q}_z$, et des constantes m et α . En déduire les niveaux d'énergie E (niveaux de Landau), en fonction de $\hbar$ et ω , des états stationnaires ψ de H tels que $\dot{q}_z\psi = 0$.

[On rappelle que le spectre de l'opérateur $a^\dagger a$ est $\mathbb{N}$.]

3. Force de Lorentz.

(2 pts)

À partir de l'expression (Lorentz-Q), montrer que si les champs électromagnétiques $(\vec{E}, \vec{B})$ sont *uniformes* sur le volume occupé par un paquet d'ondes alors

$$m\langle \ddot{\vec{q}} \rangle = e(\vec{E} + \langle \dot{\vec{q}} \rangle \times \vec{B}),$$

où donc en moyenne on retrouve l'équation du mouvement classique en présence de la force de Lorentz.

MQ-I – CORRECTION du Devoir n°4.

1. Niveaux de Landau.

1) On vérifie que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, donc que $\vec{A}$ est un potentiel vecteur de $\vec{B} = \overrightarrow{\text{const}}$ (qui satisfait à la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$). Dans le cas $\vec{B} = (0, 0, B)$, on trouve $A_x = -\frac{1}{2}By$, $A_y = \frac{1}{2}Bx$, $A_z = 0$.

2) L'hamiltonien du couplage minimal $H = (\vec{P} - e\vec{A})^2/(2m)$ prend donc la forme

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left((P_x + \frac{1}{2}eBY)^2 + (P_y - \frac{1}{2}eBX)^2 + P_z^2 \right) \\ &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} \frac{(eB/2)^2}{m} X^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2} \frac{(eB/2)^2}{m} Y^2 - \frac{eB}{2m} (XP_y - YP_x) \\ &=: H_x + H_y + H_z + \frac{1}{2}\Omega L_z \end{aligned}$$

où on identifie, d'une part, H_x & H_y comme les hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques unidimensionnels indépendants ($[H_x, H_y] = 0$) de même masse m et de même pulsation

$$\omega = \frac{1}{2}|\Omega| \quad \text{où} \quad \Omega = -\frac{eB}{m},$$

et, d'autre part, $H_z = P_z^2/(2m)$ comme un hamiltonien libre (à spectre continu) et $L_z = XP_y - YP_x$ comme moment angulaire selon la direction du champ magnétique.

N.B. On notera ici ℓ les valeurs propres entières de L_z ($|\ell| \leq j$) pour ne pas les confondre avec la masse m .

3) Après avoir posé $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$, on rappelle que l'on peut définir les observables réduites² $\hat{X} = \beta X$, $\hat{Y} = \beta Y$, $\hat{P}_x = P_x/(\hbar\beta)$ et $\hat{P}_y = P_y/(\hbar\beta)$. Les Hamiltoniens prennent l'expression symétrique

$$H_x = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{P}_x^2 + \hat{X}^2) \quad \text{et} \quad H_y = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{P}_y^2 + \hat{Y}^2).$$

Si on définit $N_{\pm} = a_{\pm}^{\dagger} a_{\pm}$ avec

$$a_+ = \frac{1}{2} (\hat{X} + i\hat{Y} + i(\hat{P}_x + i\hat{P}_y)), \quad a_- = \frac{1}{2} (\hat{X} - i\hat{Y} + i(\hat{P}_x - i\hat{P}_y)),$$

alors $[a_+, a_+^{\dagger}] = [a_-, a_-^{\dagger}] = \mathbb{I}$ et $H_x + H_y = \hbar\omega(N_+ + N_- + \mathbb{I})$ et $L_z = \hbar(N_- - N_+)$. Ainsi, la partie

$$H - H_z := H_{xy} := H_x + H_y + \frac{1}{2}\Omega L_z = \hbar\omega(N_+ + N_- + \mathbb{I}) + \frac{1}{2}\Omega\hbar(N_- - N_+)$$

est donc dans le cas où $\Omega > 0$:

$$H_{xy} = \hbar\omega(2N_- + \mathbb{I}).$$

²Voir dans les ouvrages de MQ.

Enfin $\text{Sp}(H_{xy}) = \hbar|\Omega|(\mathbb{N} + \frac{1}{2})$. La dégénérescence de l'énergie est infinie car, à n_- fixé, le *moment angulaire* $\ell/\hbar = n_- - n_+$ peut prendre toutes les valeurs entières.

N.B. Dans le cas $\Omega < 0$, on obtiendrait $H_{xy} = \hbar\omega(2N_+ + I)$, le spectre restant inchangé.

4) Les niveaux d'énergie d'une particule de vitesse orthogonale au champ magnétique sont donc les valeurs propres de H_{xy} , c'est à dire

$$E_n = \hbar|\Omega| \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

2. Force de Lorentz & niveaux de Landau. (Janvier 2005) (9 pts)

1) Le calcul du commutateur $[H, \vec{q}]$ livre $\dot{\vec{q}} = \frac{1}{m} (\vec{p} - e\vec{A})$ et on a $\dot{\vec{q}}^\dagger = \dot{\vec{q}}$. Remarquons que l'Hamiltonien peut s'écrire également avec cette nouvelle observable comme

$$H(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2 + eV(\vec{q}, t).$$

2) Calculons le commutateur $[\dot{q}_k, \dot{q}_\ell]$ entre deux composantes de l'opérateur vitesse :

$$[\dot{q}_k, \dot{q}_\ell] = \frac{1}{m^2} [p_k - eA_k, p_\ell - eA_\ell] = \frac{-e}{m^2} ([p_k, A_\ell] + [A_k, p_\ell]) = \frac{ie\hbar}{m^2} (\partial_k A_\ell - \partial_\ell A_k) = \frac{ie\hbar}{m^2} \varepsilon_{k\ell m} B^m,$$

en prenant en compte que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Ainsi, $[\dot{q}_x, \dot{q}_y] = \frac{ie\hbar}{m^2} (\partial_x A_y - \partial_y A_x) = \frac{ie\hbar}{m^2} B_z = i\frac{\hbar}{m} \omega \mathbb{I}$ si B_z n'est pas fonction de l'opérateur position avec $\omega = eB_z/m$. En rassemblant les trois commutateurs sous la forme d'un produit vectoriel, on a d'un point de vue opératoire :

$$\dot{\vec{q}} \times \dot{\vec{q}} = i\frac{\hbar e}{m^2} \vec{B}(\vec{q}) = 2i\frac{\hbar\gamma}{m} \vec{B}(\vec{q}).$$

3) De la formule servant de définition, et du calcul fait en question 1) pour $\dot{\vec{q}}$ ou H , on obtient successivement

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{q}} &:= \frac{i}{\hbar} [H, \dot{\vec{q}}] + \partial_t \dot{\vec{q}} = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2, \dot{\vec{q}} \right] + \frac{i}{\hbar} e [V(\vec{q}, t), \dot{\vec{q}}] + \partial_t \dot{\vec{q}} \\ &= \frac{im}{2\hbar} [\dot{\vec{q}}^2, \dot{\vec{q}}] + \frac{ie}{\hbar} [V(\vec{q}, t), \frac{1}{m} \vec{p}] - \frac{e}{m} \partial_t \vec{A}(\vec{q}, t). \end{aligned}$$

Il faut passer en composantes pour pousser plus avant le calcul et utiliser les résultats de la question 2), pour revenir ensuite à la notation vectorielle

$$\begin{aligned} \ddot{q}^k &= \frac{im}{2\hbar} (\dot{q}_\ell [\dot{q}^\ell, \dot{q}^k] + [\dot{q}^\ell, \dot{q}^k] \dot{q}_\ell) - \frac{e}{m} (\partial_k V + \partial_t A^k) (\vec{q}, t) \\ &= \frac{im}{2\hbar} \frac{ie\hbar}{m^2} (\dot{q}^\ell \varepsilon_{\ell kr} B^r + \varepsilon_{\ell kr} B^r \dot{q}^\ell) + \frac{e}{m} (-\partial_k V - \partial_t A^k) = -\frac{e}{2m} (-\varepsilon_{k\ell r} \dot{q}^\ell B^r + \varepsilon_{kr\ell} B^r \dot{q}^\ell) + \frac{e}{m} E^k ; \\ m\ddot{q}^k &= \frac{e}{2} \varepsilon_{k\ell r} (\dot{q}^\ell B^r - B^\ell \dot{q}^r) + eE^k ; \quad (\text{et avec } \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{k\ell m} a^k b^\ell \hat{e}_m) \\ m\ddot{\vec{q}} &= \frac{e}{2} \left(\dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q}, t) - \vec{B}(\vec{q}, t) \times \dot{\vec{q}} \right) + e\vec{E}(\vec{q}, t). \end{aligned}$$

Puis en remplaçant $\dot{\vec{q}}$ par son expression trouvée en 1), on obtient la 2ème expression de l'équation du mouvement de Newton après avoir constaté que $\vec{A}$ et $\vec{B}$ commutent entre eux comme fonctions vectorielles de l'opérateur position $\vec{q}$.

4) Avec les hypothèses sur le 4-potentiel, à présent on a $\partial_t \dot{\vec{q}} = 0$. Comme $\vec{B} = B\hat{z}$ l'équation quantique de Newton pour la force de Lorentz se réduit à $m\ddot{\vec{q}} = \frac{im}{\hbar} [H, \dot{\vec{q}}] = \frac{eB}{2} (\dot{\vec{q}} \times \hat{z} - \hat{z} \times \dot{\vec{q}})$, dont la composante selon $\hat{z}$ est nulle : $m\ddot{q}_z = [H, \dot{q}_z] = 0$.

5) D'une part, $a^\dagger = \alpha(\dot{q}_x - i\varepsilon\dot{q}_y)$, et d'autre part, en imposant la relation de commutation canonique $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$, on obtient par substitution $-2i\varepsilon\alpha^2 [\dot{q}_x, \dot{q}_y] = -2i\varepsilon\alpha^2 \frac{i\hbar\omega}{m} \mathbb{1}$, d'où la contrainte $2\varepsilon\alpha^2 \frac{\hbar\omega}{m} = 1$, soit $\alpha = \sqrt{m/(2\hbar|\omega|)}$.

6) De la question 1) on obtient dans ce cas particulier $H = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2 + \dot{q}_z^2)$. Des définitions, on a $\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2 = \frac{1}{\alpha^2} (a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{1})$; ainsi $H = \hbar|\omega| (a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{1} + \dot{q}_z^2)$ où une partie oscillateur harmonique a été mise en évidence. Sur les états ψ tels que $\dot{q}_z\psi = 0$, le spectre se réduit à $E \in \hbar|\omega|(\mathbb{N} + \frac{1}{2})$.

3. Force de Lorentz.

(2 pts)

Prenons la première partie de l'expression (Lorentz-Q). Notons Ψ le vecteur d'état représentant le paquet d'ondes, et par $\langle \rangle$ la valeur moyenne dans cet état des observables. Alors, puisque $(\vec{E}, \vec{B})$ sont *uniformes* sur le volume occupé par un paquet d'ondes on a, d'une part, $\langle \vec{E} \rangle = \vec{E}$, et, d'autre part, $\langle \dot{\vec{q}} \times \vec{B} \rangle = \langle \dot{\vec{q}} \rangle \times \vec{B}$, et $\langle \vec{B} \times \dot{\vec{q}} \rangle = \vec{B} \times \langle \dot{\vec{q}} \rangle = -\langle \dot{\vec{q}} \rangle \times \vec{B}$. En prenant la moyenne sur le paquet d'ondes de l'accélération on obtient

$$m\langle \ddot{\vec{q}} \rangle = e(\vec{E} + \langle \dot{\vec{q}} \rangle \times \vec{B}),$$

ce qui correspond à l'équation du mouvement classique en présence de la force de Lorentz.