

MQ-I – Devoir n°5 à rendre pour le mercredi 21 octobre 2009

1. Neutrons : comparaison théorie/expérience.

Un faisceau de neutrons (spin $\frac{1}{2}$) préparés dans l'état $|+, \hat{z}\rangle$ se propage selon la direction $\mathbb{R}\hat{y}$. Il pénètre dans un appareil de Stern-Gerlach qui sépare le faisceau en deux d'après l'état de spin projeté sur l'axe $\hat{n}(\theta, 0)$ situé dans le plan $y = 0$ et formant un angle θ avec l'axe $\mathbb{R}\hat{z}$. À la sortie, sur le trajet de chacun des deux faisceaux $|\theta, 0\rangle$ ("up") et $|\pi - \theta, \pi\rangle$ ("down") on place un détecteur. On note par $N_+(\theta)$ et $N_-(\theta)$ le nombre de neutrons détectés dans chacun des faisceaux de sortie, respectivement.

1) Après plusieurs mesures, quelle valeur du rapport $N_+(\theta)/N_-(\theta)$ est prédite par la mécanique quantique ?

2) Si $S(\theta, 0)$ est l'observable de spin (générateur des rotations autour de l'axe $\mathbb{R}\hat{n}(\theta, 0)$, exprimer la valeur moyenne $\langle +, \hat{z} | S(\theta, 0) | +, \hat{z} \rangle$ en fonction de $N_+(\theta)$ et $N_-(\theta)$.

3) Conclusion

2. Faire tourner le spin.

Dans l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$, amener le vecteur $\hat{z}$ dans une direction $\hat{n}(\theta, \varphi)$ arbitraire résulte de la composition de deux rotations : $\hat{n} = R(\varphi, \hat{z})R(\theta, \hat{y})\hat{z}$. Dans l'espace des états de spin $\mathbb{C}^2$, si on pose $U(\alpha, \hat{\kappa}) = \exp(-i\frac{\alpha}{2}\hat{\kappa} \cdot \vec{\sigma}) = \cos\frac{\alpha}{2}\mathbb{I} - i\sin\frac{\alpha}{2}\hat{\kappa} \cdot \vec{\sigma}$, (voir question 5 de l'exo 3) montrer par un calcul matriciel que $|+\hat{n}\rangle = U(\varphi, \hat{z})U(\theta, \hat{y})|+\hat{z}\rangle$.

3. Matrices de Pauli.

1. Montrer que l'ensemble des matrices 2×2 complexes auto-adjointes (on dit aussi hermitiennes) de trace nulle est un espace vectoriel réel de dimension 3. Il suffira de montrer que les matrices suivantes, dites *matrices de Pauli*, forment une base de cet espace :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les vecteurs propres normalisés, avec $|\pm \hat{n}\rangle = P_{\pm \hat{n}}|+\rangle$ où $P_{\pm \hat{n}} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \hat{n} \cdot \vec{\sigma})$, pour chacune des matrices de Pauli σ_x , σ_y et σ_z .
3. Calculer les commutateurs $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$ et $[\sigma_z, \sigma_x]$ et montrer que l'on peut les rassembler dans l'écriture compacte $\boxed{\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}}$.
4. Si l'on pose $\sigma(\vec{u}) := \sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}$ avec $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, montrer que

$$\boxed{\sigma(\vec{u})\sigma(\vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})\mathbb{I} + i\sigma(\vec{u} \times \vec{v})}.$$

En déduire les expressions des commutateurs et anticommutateurs : $[\sigma(\vec{u}), \sigma(\vec{v})]_{\mp}$.

5. En déduire (formule de Glauber)

$$\boxed{\exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{n})\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{I} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma(\hat{n})}.$$

[Calculer $\sigma(\hat{n})^2$ à l'aide du résultat de la question 4.]

4. * Probabilités et précession d'un spin $\frac{1}{2}$.

Une particule, de facteur gyromagnétique γ , est lancée selon l'axe des x avec une vitesse approximative v_0 (approximation classique). L'état de spin $\frac{1}{2}$ de la particule a été préparé de sorte à être représenté par le vecteur d'état $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$. Cette particule traverse ensuite une région de longueur d où règne un champ magnétique uniforme constant B selon l'axe $\hat{z}$, région dans laquelle son spin va précesser selon la pulsation de Larmor $\omega = -\gamma B$. On note $|\psi_1\rangle$ son nouvel état de spin à la sortie du champ.

- 1) Pour chacune des directions $\hat{n} = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, des axes de coordonnées, calculer les probabilités $p(+\hat{n}) := \langle \psi_0 | P_{\hat{n}} | \psi_0 \rangle$, où $P_{\hat{n}} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \hat{n} \cdot \vec{\sigma})$, qu'une mesure de l'observable de spin $S_{\hat{n}}$ donne $+\frac{\hbar}{2}$ alors que l'état de spin $\frac{1}{2}$ de la particule est $|\psi_0\rangle$.
- 2) En déduire les probabilités respectives $p(-\hat{n})$ d'obtenir $-\frac{\hbar}{2}$ comme mesure de l'observable de spin $S_{\hat{n}}$ sur l'état $|\psi_0\rangle$.
- 3) Déterminer la direction (θ_0, φ_0) dans laquelle a été préparé l'état de spin $|\psi_0\rangle = |\theta_0, \varphi_0\rangle$ de la particule avant son entrée dans le champ magnétique.
- 4) Calculer la valeur moyenne $\langle \psi_0 | \vec{S} | \psi_0 \rangle$ de l'observable vectorielle de spin $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$.
- 5) Déterminer (en fonction de ω , d et v_0) la direction (θ_1, φ_1) de l'état de spin, $|\psi_1\rangle = |\theta_1, \varphi_1\rangle$, dans lequel se trouve la particule à sa sortie de la zone de champ.
- 6) Calculer la valeur moyenne $\langle \psi_1 | \vec{S} | \psi_1 \rangle$ et donner une interprétation physique de ce résultat.

5. ** Retournement d'un spin $\frac{1}{2}$ par un champ magnétique oscillant.

Un électron est au repos dans un champ magnétique oscillant $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \hat{z}$, avec $B_0 > 0$, et ω la pulsation du champ, tous deux constants.

On s'intéresse à l'évolution de l'état $|\chi(t)\rangle = a(t)|+\rangle + b(t)|-\rangle$ du spin de cet électron dans ce champ magnétique. On posera $\omega_0 = -\gamma B_0$, comme pulsation de Larmor, sachant que $\gamma < 0$ pour l'électron.

1. Donner l'Hamiltonien H du système et écrire sa matrice dans la base canonique $\{| \pm \rangle\}$ de $\mathbb{C}^2$. [Attention : voici une situation où H dépend explicitement du temps !]
2. Écrire l'équation de Schrödinger dépendante du temps correspondante.
En déduire les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les composantes $a(t)$ et $b(t)$ du vecteur d'état de spin.
3. À l'instant initial $t = 0$ le spin de l'électron se trouve dans l'état propre $|\chi(0)\rangle = |+\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, "spin-up" de l'observable S_x .
Intégrer l'équation de Schrödinger et déterminer à chaque instant $t \geq 0$ l'état $|\chi(t)\rangle$.
Vérifier que $|\chi(t)\rangle$ est bien normé à l'unité.
4. Calculer la probabilité à l'instant t , $\wp_{+-}(t) = \text{Proba}(|\chi(t)\rangle = |-\hat{x}\rangle)$ de trouver $-\hbar/2$ dans une mesure de l'observable S_x .
5. À l'instant $t = \frac{\pi}{2\omega}$, quelle est la valeur minimale de B_0 en fonction de la pulsation ω et du facteur gyromagnétique γ de l'électron pour obtenir un retournement complet du spin $|+\hat{x}\rangle \rightarrow |-\hat{x}\rangle$ selon la direction $\hat{x}$.

On rappelle que les projecteurs de spin sont donnés par $P_{\hat{n}} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \hat{n} \cdot \vec{\sigma}) = |+\hat{n}\rangle\langle +\hat{n}|$ et que la probabilité de mesurer le spin dans la direction $\hat{n}$ est donnée par

$$p(\hat{n}) = \|P_{\hat{n}}\Psi\|^2 = |\langle +\hat{n} | \Psi \rangle|^2,$$

où la norme est celle de $\mathbb{C}^2$.

MQ-I – CORRECTION du Devoir n°5.

1. Neutrons : comparaison théorie/expérience.

Vu que la direction $\hat{n}(\theta, 0)$ ne dépend que de l'angle θ de co-latitude, on peut alléger l'écriture en posant $S_\theta = \hat{n}(\theta, 0) \cdot \vec{S}$.

Le modèle du spin $\frac{1}{2}$ (seul !) conduit à la décomposition spectrale $S_\theta = \frac{\hbar}{2}(P_{\hat{n}} - P_{-\hat{n}})$ (♣) et aux interprétations suivantes :

1) La probabilité (théorique) qu'un neutron préparé dans l'état $\chi_{\hat{z}} = |+, \hat{z}\rangle = |0, 0\rangle$ soit détecté dans le faisceau correspondant à l'état $|\theta, 0\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+, \hat{z}\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-, \hat{z}\rangle$ (resp. dans le faisceau $|\pi - \theta, \pi\rangle$) est donnée -en utilisant diverses notations- par

$$p_+(\theta) = \|P_{\hat{n}}\chi_{\hat{z}}\|^2 = \langle \chi_{\hat{z}} | P_{\hat{n}} | \chi_{\hat{z}} \rangle = |\langle \chi_{\hat{n}} | \chi_{\hat{z}} \rangle|^2 = |\langle \theta, 0 | 0, 0 \rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (\text{resp. } p_-(\theta) = \sin^2 \frac{\theta}{2}).$$

On rappelle qu'un processus de mesure correspond à tester une propriété du système; d'un point de vue opérationnel ceci conduit à faire agir un projecteur orthogonal.

Du point de vue expérimental, après un grand nombre de mesures, les probabilités de détection dans chacun des deux faisceaux de sortie sont données respectivement par

$$p_+(\theta) = \frac{N_+(\theta)}{N_+(\theta) + N_-(\theta)}, \quad p_-(\theta) = \frac{N_-(\theta)}{N_+(\theta) + N_-(\theta)}$$

d'où $N_+(\theta)/N_-(\theta) = 1/\tan^2 \frac{\theta}{2}$.

En effectuant un grand nombre de mesures pour diverses valeurs de l'angle θ entre 0 et π , on peut confronter le modèle à l'expérience : il y a parfait accord.

2) La valeur moyenne $\langle +, \hat{z} | S_\theta | +, \hat{z} \rangle$ est indépendante de la base choisie dans l'espace $\mathbb{C}^2$ du spin $\frac{1}{2}$. Effectivement, un calcul direct dans la base canonique $|\pm, \hat{z}\rangle$ donne le calcul matriciel suivant

$$\langle +, \hat{z} | S_\theta | +, \hat{z} \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

alors que le calcul plus intrinsèque découlant de la décomposition spectrale (♣) donne

$$\langle +, \hat{z} | S_\theta | +, \hat{z} \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle +, \hat{z} | P_{\hat{n}} - P_{-\hat{n}} | +, \hat{z} \rangle = \frac{\hbar}{2} (p_+(\theta) - p_-(\theta)) = \frac{\hbar}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\hbar}{2} \cos \theta.$$

Cette valeur moyenne théorique est à confronter avec les mesures pour diverses valeurs de θ

$$\frac{N_+(\theta) - N_-(\theta)}{N_+(\theta) + N_-(\theta)} \stackrel{?}{=} \cos \theta \quad (\heartsuit)$$

Là aussi il y a accord parfait entre expérience et théorie.

3) Ces divers accords permettent de tester la décomposition spectrale de l'observable S_θ via la relation (♥) et de s'assurer qu'elle possède bien deux états propres "up" et "down".

2. Faire tourner le spin.

Tout d'abord pour s'en faire une idée, regardons dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'écriture matricielle de $\hat{n} = R(\varphi, \hat{z})R(\theta, \hat{y})\hat{z}$. On a

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R(\theta, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R(\varphi, \hat{z}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul matriciel donne

$$R(\varphi, \hat{z})R(\theta, \hat{y})\hat{z} = \hat{n} \iff \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dans l'espace des états de spin $\mathbb{C}^2$, on applique la formule $U(\alpha, \hat{k}) = \exp(-i\frac{\alpha}{2}\hat{k} \cdot \vec{\sigma}) = \cos \frac{\alpha}{2}\mathbb{I} - i\sin \frac{\alpha}{2}\hat{k} \cdot \vec{\sigma}$, pour $U(\theta, \hat{y})$ et $U(\varphi, \hat{z})$ sachant que $U(R(\varphi, \hat{z})R(\theta, \hat{y})) = U(\varphi, \hat{z})U(\theta, \hat{y})$ à une phase $\pm$ près (représentation spinorielle). On a

$$U(\varphi, \hat{z}) = \cos \frac{\varphi}{2} - i\sin \frac{\varphi}{2}\sigma_z = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad U(\theta, \hat{y}) = \cos \frac{\theta}{2} - i\sin \frac{\theta}{2}\sigma_y = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

et pour leur produit souvent noté comme (notation de Wigner)

$$D^{(1/2)}(\theta, \varphi) := U(R(\varphi, \hat{z})R(\theta, \hat{y})) = D = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \in SU(2),$$

en vérifiant que $D^\dagger = D^{-1}$. L'écriture matricielle de $|\hat{n}\rangle = U(\varphi, \hat{z})U(\theta, \hat{y})| \hat{z}\rangle$ donne sur $\mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier que $\hat{n} \cdot \vec{\sigma} = D\sigma_z D^{-1}$ ce qui correspond à faire tourner le spin (changement de bases $|\pm\rangle \leftrightarrow |\pm \hat{n}\rangle$), relation qui montre que le concept de spin ne dépend pas du choix des axes du système de coordonnées.

3. Matrices de Pauli.

1) Toute matrice 2×2 complexe auto-adjointe de trace nulle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Il est clair que si A, A' sont auto-adjointes de trace nulle, il en est de même de $A + A'$ et de λA pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Les matrices de Pauli constituent donc une base de cet espace vectoriel *réel* de dimension 3 car on a la décomposition : $A = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} := x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z$.

2) Les matrices de Pauli sont toutes de déterminant -1 . Elles ont donc pour spectre

$$\text{Sp}(\sigma_x) = \text{Sp}(\sigma_y) = \text{Sp}(\sigma_z) = \{+1, -1\}.$$

Les projecteurs propres $P_{\hat{n}} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \hat{n} \cdot \vec{\sigma})$ se calculent aisément en prenant successivement $\hat{n} = \pm\hat{x}, \pm\hat{y}, \pm\hat{z}$. Avec des notations évidentes on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_x^+ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_x^- &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_y^+ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_y^- &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_z^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et les vecteurs propres s'obtiennent par projection, par exemple de $|+\rangle$, en calculant $P_{\hat{n}}|+\rangle$, $\hat{n} = \pm\hat{x}, \pm\hat{y}, \pm\hat{z}$, puis normalisés. Ils sont donnés (à une phase près) par

$$\begin{aligned}|+\hat{x}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |-\hat{x}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ |+\hat{y}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, & |-\hat{y}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \\ |+\hat{z}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |-\hat{z}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3) Par simples multiplications matricielles, on trouve

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y. \quad (\diamond)$$

Ces trois commutateurs peuvent se résumer dans l'écriture compacte suivante

$$[\sigma_k, \sigma_\ell] = 2i \varepsilon_{k\ell m} \sigma_m,$$

où $\varepsilon_{k\ell m}$ est le tenseur totalement antisymétrique défini par la condition $\varepsilon_{123} = +1$. On peut vérifier également que les produits entre deux matrices de Pauli se décomposent comme

$$\boxed{\sigma_k \sigma_\ell = \delta_{k\ell} \mathbb{I} + i \varepsilon_{k\ell m} \sigma_m} \quad (\sigma)$$

expressions qui caractérisent l'algèbre des matrices σ .

4) De même, un calcul matriciel élémentaire donne $\sigma(\vec{u})\sigma(\vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})\mathbb{I} + i\sigma(\vec{u} \times \vec{v})$ où $\times$ désigne le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si l'on écrit $[A, B]_{\pm} := AB \pm BA$, il vient aisément

$$[\sigma(\vec{u}), \sigma(\vec{v})]_{+} = 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\mathbb{I} \quad \text{et} \quad [\sigma(\vec{u}), \sigma(\vec{v})]_{-} = 2i\sigma(\vec{u} \times \vec{v}).$$

Cette dernière formule est équivalente à $(\diamond)$.

5) On a $\sigma(\hat{n})^2 = \mathbb{I}$ et $\sigma(\hat{n})^3 = \sigma(\hat{n})$ d'où

$$\begin{aligned}\exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{n})\right) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(-i\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{n})\right)^k = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{(2k)!} \left(-i\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{n})\right)^{2k} + \frac{1}{(2k+1)!} \left(-i\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{n})\right)^{2k+1} \right) \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k} \right) \mathbb{I} - i \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k+1} \right) \sigma(\hat{n})\end{aligned}$$

d'où la formule importante dite de Glauber : $\exp(-i\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{n})) = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{I} - i\sin\frac{\theta}{2}\sigma(\hat{n})$.

4. Probabilités et précession d'un spin $\frac{1}{2}$.

1) Plusieurs façon de calculer, selon le point de vue projecteur ou carré d'amplitude

$$p(+\hat{n}) = \langle \psi_0 | P_{\hat{n}} | \psi_0 \rangle = \|P_{\hat{n}}\psi_0\|^2 = |\langle +\hat{n} | \psi_0 \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin\theta \sin\varphi),$$

en ayant utilisé en passant que $\|\psi_0\| = 1$. Ainsi, $p(+\hat{x}) = p(+\hat{z}) = \frac{1}{2}$ et $p(+\hat{y}) = 1$.

2) Puisque les $S_{\hat{n}}$ sont des observables qui ne commutent pas entre elles pour des directions différentes, on a pour une mesure d'un $S_{\hat{n}}$ dans une direction $\hat{n}$ donnée $p(+\hat{n}) + p(-\hat{n}) = 1$. Ainsi on en déduit facilement, $p(-\hat{x}) = p(-\hat{z}) = \frac{1}{2}$ et $p(-\hat{y}) = 0$.

3) Deux façons. Par inspection des probabilités sur les mesures de l'observable de spin, $p(+\hat{y}) = 1$. Le vecteur unitaire $\hat{y}$ correspond à la direction $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ d'où $|\psi_0\rangle = |\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Ainsi $\theta_0 = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Sinon directement à partir de l'expression de $|\psi_0\rangle$ dans laquelle il faut mettre $1 \mp i$ sous forme trigonométrique : $\sqrt{2}e^{\mp i\frac{\pi}{4}}$.

$$|\theta, \varphi\rangle = |\psi_0\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} \cos\frac{\pi}{4} \\ e^{i\pi/4} \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = |\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

4) On a le vecteur (!) $\langle \psi_0 | \vec{S} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | S_x | \psi_0 \rangle \hat{x} + \langle \psi_0 | S_y | \psi_0 \rangle \hat{y} + \langle \psi_0 | S_z | \psi_0 \rangle \hat{z}$. Comme $S_{\hat{n}} = \frac{\hbar}{2}P_{\hat{n}} - \frac{\hbar}{2}P_{-\hat{n}}$, on utilise les résultats des questions 1) & 2)

$$\langle \psi_0 | \vec{S} | \psi_0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \left((p(+\hat{x}) - p(-\hat{x}))\hat{x} + (p(+\hat{y}) - p(-\hat{y}))\hat{y} + (p(+\hat{z}) - p(-\hat{z}))\hat{z} \right) = \frac{\hbar}{2} \hat{y}.$$

On aurait pu effectuer un calcul direct ou utiliser la question 3) en disant que (cf cours)

$$\langle \psi_0 | \vec{S} | \psi_0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \hat{n}_0(\theta_0, \varphi_0) = \frac{\hbar}{2} \hat{y}.$$

5) La dynamique du spin $\frac{1}{2}$, selon Pauli, conduit à faire agir l'opérateur d'évolution $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}tH)$ sur l'état de spin $|\psi_0\rangle$ avec $H = -\gamma \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \omega \sigma_z$. Ainsi

$$U(t) = \exp(-i\frac{\omega t}{2} \sigma_z) = \cos\frac{\omega t}{2} - i \sin\frac{\omega t}{2} \sigma_z = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$$

L'état de spin $|\psi_0\rangle$ subit donc une rotation autour de l'axe des z sur toute la durée $t = d/v_0$ de son parcours dans le champ B ; $|\psi_1\rangle = \exp(-i\frac{\omega d}{2v_0} \sigma_z) |\psi_0\rangle = |\theta_0, \varphi_0 + \frac{\omega d}{v_0}\rangle = |\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\omega d}{v_0}\rangle$, (à une phase près). Donc $\theta_1 = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega d}{v_0}$.

6) Comme pour 4) $\langle \psi_1 | \vec{S} | \psi_1 \rangle = \frac{\hbar}{2} \hat{n}_0(\theta_1, \varphi_1) = \frac{\hbar}{2} \left(-\sin\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) \hat{x} + \cos\left(\frac{\omega d}{v_0}\right) \hat{y} \right)$. La valeur moyenne dans l'état ψ_1 de l'observable vectorielle de spin $\vec{S}$ est un vecteur dans le plan $z = 0$ ayant subi une rotation d'angle φ_1 autour de l'axe des z . C'est le phénomène de précession.

5. Retournement d'un spin $\frac{1}{2}$ par un champ magnétique oscillant.

1. 1) l'Hamiltonien donne le couplage du spin $\vec{S}$ avec le champ magnétique, c'est le terme de Pauli :

$$H(t) = -\gamma \vec{B}(t) \cdot \vec{S} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \cos(\omega t) \sigma_z.$$

N.B. Comme H dépend explicitement du temps, on **ne peut pas** définir un opérateur d'évolution $U(t)$ comme exponentielle de $H(t)$ car rien ne garantit que $H(t)$ et $H(t')$ commutent à des temps différents. On ne peut pas intégrer naïvement $i\hbar\partial_t U(t) = H(t)U(t)$ au sens des opérateurs.

2. L'équation de Schrödinger donnant l'évolution des états du système $i\hbar\partial_t|\chi(t)\rangle = H(t)|\chi(t)\rangle$ dépend donc du temps. En écrivant dans la base canonique

$$|\chi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \implies i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système d'équations différentielles d'ordre un découplées (indépendant de $\hbar$) et facilement intégrable

$$\begin{cases} i\dot{a} = \frac{\omega_0}{2} \cos(\omega t) a \\ i\dot{b} = -\frac{\omega_0}{2} \cos(\omega t) b \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{a}/a = -i\frac{\omega_0}{2} \cos(\omega t) \\ \dot{b}/b = i\frac{\omega_0}{2} \cos(\omega t) \end{cases} \implies \begin{cases} \ln a = -\frac{i}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) + a_0 \\ \ln b = \frac{i}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) + b_0 \end{cases}$$

où a_0 et b_0 sont des constantes d'intégration. Finalement on obtient (à une phase près)

$$|\chi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \exp\left(\frac{-i}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t)\right) \\ B \exp\left(\frac{i}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t)\right) \end{pmatrix}$$

où A et B sont deux constantes complexes à déterminer avec les conditions initiales, ce qui va être fait dans la question suivante.

3. À $t = 0$ on a la condition initiale (nécessité d'une seule condition initiale, puisque Schrödinger est d'ordre un dans la variable temps t) :

$$|\chi(0)\rangle = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

conduisant à l'unique solution (à une phase près), pour $t \geq 0$, de l'équation de Schrödinger de notre problème

$$|\chi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-i}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t)\right) \\ \exp\left(\frac{i}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t)\right) \end{pmatrix} =: \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha(t)} \\ e^{i\alpha(t)} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha(t) = \frac{\omega_0}{2\omega} \sin(\omega t).$$

L'introduction de la phase dépendante du temps $\alpha(t)$ permet de vérifier rapidement que

$$\langle\chi(t)|\chi(t)\rangle = \frac{1}{2}(|e^{-i\alpha(t)}|^2 + |e^{i\alpha(t)}|^2) = 1.$$

4. Une mesure correspond à projeter. Le calcul de la probabilité de trouver $|\chi(t)\rangle$ dans l'état $|-\hat{x}\rangle$ est plus aisé si on fait intervenir la relation de fermeture; on a

$$\begin{aligned} \wp_{+-}(t) &= \|P_{-\hat{x}}\chi(t)\|^2 = \langle\chi(t)|P_{-\hat{x}}|\chi(t)\rangle = \langle\chi(t)|(\mathbb{I} - P_{+\hat{x}})|\chi(t)\rangle = 1 - |\langle+\hat{x}|\chi(t)\rangle|^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha(t)} \\ e^{i\alpha(t)} \end{pmatrix} \right|^2 = 1 - \frac{1}{4} |e^{i\alpha(t)} + e^{-i\alpha(t)}|^2 = 1 - \cos^2 \alpha(t) = \sin^2 \alpha(t) \\ &= \sin^2 \left(\frac{\omega_0}{2\omega} \sin(\omega t) \right). \end{aligned}$$

5. La probabilité $\wp_{+-}(t)$ vaut 1 si la valeur absolue de la phase $|\frac{\omega_0}{2\omega} \sin(\omega t)| = \frac{\pi}{2}$. La pulsation ω_0 sera minimale quand $|\sin(\omega t)| = 1$, maximum atteint à l'instant $t = \frac{\pi}{2\omega}$, d'où

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{\omega_0}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \implies B_0 = \frac{-\omega\pi}{\gamma} > 0.$$