
MQ-I – Devoir n°1 à rendre pour le mercredi 23 septembre 2009

1. Oscillateur harmonique.

(5 pts)

On se propose d'étudier un oscillateur harmonique unidimensionnel, de masse m et chargé (charge notée e) placé dans un champ électrique uniforme E orienté selon l'axe de coordonnée.

- 1) Donner l'expression de l'Hamiltonien H de ce système.
- 2) Par un changement de variables, réduire H .
(Voir exo du cours pour un potentiel $W(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$).
- 3) Résoudre l'équation de Schrödinger (spectre et états propres).

2. L'oscillateur harmonique isotrope bidimensionnel.

(10 pts)

On désire étudier le spectre de l'hamiltonien d'une particule de masse m dans le plan $\mathbb{R}^2$ soumise au potentiel $V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$ avec $\omega = \text{Cte} > 0$.

1) Justifier que l'hamiltonien se décompose selon deux oscillateurs harmoniques indépendants

$$H = H_x + H_y \quad \text{avec} \quad [H_x, H_y] = 0.$$

Poser $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$ et exprimer H et le moment angulaire $L \equiv L_z$ en terme des observables $\hat{X} = \beta X$, $\hat{Y} = \beta Y$, $\hat{P}_x = P_x/(\hbar\beta)$ et $\hat{P}_y = P_y/(\hbar\beta)$.

2) On définit maintenant

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x) \quad \text{et} \quad a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} + i\hat{P}_y).$$

Déterminer explicitement les commutateurs non nuls entre les a_x , a_y , $a_x^\dagger$ et $a_y^\dagger$. Exprimer H_x en fonction de $N_x = a_x^\dagger a_x$. Idem pour H_y .

3) On définit enfin

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + ia_y) \quad \text{et} \quad a_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - ia_y).$$

Déterminer explicitement les commutateurs non nuls entre les a_+ , a_- , $a_+^\dagger$ et $a_-^\dagger$. En déduire (sans calcul) le spectre des observables $N_\pm = a_\pm^\dagger a_\pm$.

4) Montrer que H et L s'expriment uniquement en fonction des $N_\pm$. En déduire $[H, L]$.

5) Trouver les spectres de H et L . Justifier que H et L sont des opérateurs auto-adjoints compatibles (diagonalisables simultanément).

6) Quelles sont, à énergie fixée, les valeurs propres permises du moment angulaire L ? En déduire la dégénérescence de chaque niveau d'énergie.

3. Moment angulaire orbital et spin entier.

(5 pts)

Le moment angulaire orbital

$$\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$$

est caractérisé par un “spin entier” $j = \ell \in \mathbb{N}$ (ℓ appelé nombre quantique azimutal).

On se propose de retrouver cette propriété directement à partir de son expression et des relations de commutation canoniques (système d’unités avec $\hbar = 1$) des opérateurs de position q et d’impulsion p

$$[p_k, q_l] = -i\delta_{kl}\mathbb{I}, \quad \text{et} \quad [p_k, p_l] = [q_k, q_l] = 0, \quad k, l = x, y, z.$$

Si a est une constante ayant la dimension d’une longueur, on définit les opérateurs

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_x + a^2 p_y), & P_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x - \frac{q_y}{a^2}\right), \\ Q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_x - a^2 p_y), & P_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x + \frac{q_y}{a^2}\right). \end{aligned}$$

1) Vérifier que ces opérateurs satisfont aussi aux règles de commutation canoniques :

$$[Q_1, Q_2] = [P_1, P_2] = 0, \quad \text{et} \quad [Q_r, P_s] = i\delta_{rs}\mathbb{I}, \quad r, s = 1, 2.$$

2) Montrer que la composante selon l’axe des z du moment orbital peut se réécrire comme

$$L_z = \frac{a^2}{2}(P_1^2 - P_2^2) + \frac{1}{2a^2}(Q_1^2 - Q_2^2).$$

3) Mettre cette expression sous la forme

$$L_z = H_1 - H_2$$

où chaque Hamiltonien H_r , $r = 1, 2$ est celui d’un oscillateur harmonique unidimensionnel

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_0^2 q^2,$$

pour lequel on déterminera respectivement les opérateurs p et q , la masse μ et la pulsation ω_0 .

4) Analyser la compatibilité des deux Hamiltoniens, H_1 et H_2 , et en déduire, à partir du spectre de l’oscillateur harmonique, que les valeurs propres m de L_z sont nécessairement entières.

5) Donner un argument rapide permettant de conclure que $j \in \mathbb{N}$.