
MQ-I – Devoir n°2 à rendre pour le mercredi 30 septembre 2009

1. Propagateur libre de Schrödinger.

1) Montrer que le paquet d'ondes

$$(\star) \quad \psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(k) e^{i(kx - \omega[t-t_0])} dk \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

est solution de l'équation de Schrödinger *libre* à une dimension d'espace.

2) Exprimer par transformation de Fourier $\tilde{\psi}(k)$ en termes de $\psi(x, t_0)$.

3) En conclure que

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t; x_0, t_0) \psi(x_0, t_0) dx_0 \quad (t > t_0)$$

où $K(x, t; x_0, t_0)$ est une fonction complexe de quatre variables, appelée *propagateur libre*, que l'on déterminera explicitement en reportant l'expression précédente de $\tilde{\psi}(k)$ dans la formule générale $(\star)$ du paquet d'ondes. [Utiliser l'intégrale de Fresnel]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2} du = e^{-i\pi/4} \sqrt{\pi}.$$

2. Comparaison paquet d'ondes gaussien et état cohérent (cas 1D).

Les fonctions d'onde (normalisées) d'un paquet d'ondes gaussien et d'un état cohérent sont données respectivement par (en unités où $m = \hbar = 1$)

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &= (a\sqrt{\pi}(1 + \frac{it}{a^2}))^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x - k_0 t)^2}{2a^2(1 + \frac{it}{a^2})} + i(k_0 x - \frac{k_0^2 t}{2})\right), \\ \varphi_t(x) &= A \exp\left(-\frac{(x - \alpha(t))^2}{2} + i\beta(t)x\right). \end{aligned}$$

1) Pour chacune des ces fonctions d'onde, calculer les valeurs moyennes $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$ et les dispersions Δx et Δp .

2) Quelle information sur la différence entre les états "paquet d'ondes gaussien" et états cohérents livrent les inégalités d'Heisenberg?

3. L'opérateur p générateur des translations d'espace.

(Cas 1D) En utilisant successivement la série de exp et la série de Taylor pour la fonction d'onde $\varphi(x)$, montrer que

$$\text{pour } a \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad p = -i\frac{d}{dx}, \quad \text{alors} \quad (e^{-iap}\varphi)(x) = \varphi(x - a).$$

4. SUSY.

On désire étudier le mouvement quantique unidimensionnel d'une particule de masse m dans le potentiel de Pöschl-Teller $V(x) = -\hbar^2 / [ma^2 \cosh^2(x/a)]$.

Pour ce faire, on abordera le problème à l'aide de la "supersymétrie" et on travaillera, pour simplifier, dans des unités où $m = a = \hbar = 1$.

Preliminaires :

Un opérateur A sur un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est dit *positif* si pour tout vecteur $\psi \in \mathcal{H}$ on a $\langle \psi, A\psi \rangle \geq 0$.

1) Considérons deux opérateurs H_0 & H_1 d'un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de la forme

$$H_0 = Q Q^\dagger \quad \& \quad H_1 = Q^\dagger Q \quad (\heartsuit)$$

pour un certain opérateur Q . On appelle Q opérateur de SuperSYmétrie (SUSY pour les intimes). Montrer que H_0 & H_1 sont des observables et qu'elles sont positives. Quid de leur spectre ?

2) Prouver qu'un état $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ est un état stationnaire pour H_0 d'énergie $E_0 = 0$ si et seulement si $Q^\dagger \Psi_0 = 0$.

3) Montrer que si $\Psi \in \mathcal{H}$ est état stationnaire pour H_0 d'énergie $E > 0$, alors $\Phi = Q^\dagger \Psi$ définit un état stationnaire pour H_1 de même énergie.

4) Montrer que si $\Phi \in \mathcal{H}$ est état stationnaire pour H_1 d'énergie $E > 0$, alors $\Psi = Q\Phi$ définit un état stationnaire pour H_0 de même énergie.

5) On envisage maintenant le cas particulier : $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ et $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + W(x) \right)$, où $W(x)$ est une fonction réelle appelée "superpotentiel".

Donner, en la justifiant, l'expression de $Q^\dagger$. Calculer $[Q, Q^\dagger]$ en fonction de $W'(x)$.

6) Montrer que les hamiltoniens ($\heartsuit$) prennent la forme familière d'opérateurs de Schrödinger

$$H_n = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) \quad (n = 0, 1)$$

où $V_0(x)$ et $V_1(x)$ s'écrivent explicitement en fonction de $W(x)$ et $W'(x)$.

7) On décide de travailler maintenant avec le superpotentiel $W(x) = \tanh x$.

Calculer explicitement $V_0(x)$ et $V_1(x)$. Tracer l'allure du graphe du potentiel $V_0(x)$ que l'on comparera au potentiel de Pöschl-Teller $V(x)$ donné en début de problème.

8) Prouver que les "états" stationnaires de H_1 sont simplement des ondes planes $\Phi_k(x)$ de nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$. Donner leur énergie $E(k)$ ainsi que la dégénérescence de chaque niveau. Dédurre de la question (4) l'expression des fonctions propres $\Psi_k(x)$ de H_0 qui sont leurs superpartenaires — de même énergie !

9) Rechercher le fondamental Ψ_0 de H_0 grâce à la question (2). Montrer que c'est un état lié, i.e. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = 0$. Donner (à une phase près) sa fonction d'onde $\Psi_0(x)$ soigneusement normalisée.

10) Trouver (sans calcul) les valeurs moyennes de l'opérateur impulsion P et de l'opérateur position X dans l'état fondamental Ψ_0 .

Calculer les valeurs moyennes $\langle P^2 \rangle$ et $\langle X^2 \rangle$ dans cet état. En déduire la valeur de $\Delta P \cdot \Delta X$ et la comparer à la borne inférieure de Heisenberg.

N.B. On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh^2 x} = \frac{\pi^2}{6}.$$