

---

MQ-I – Une série d'exercices.

Les exercices marqués d'une \* peuvent être vus dans un second temps.

---

### 1. Notations de Dirac.

P.A.M. Dirac désignait par  $\langle\varphi|\psi\rangle$  le produit scalaire  $\langle\varphi, \psi\rangle$  de deux vecteurs  $\varphi$  et  $\psi$ . Sachant qu'en anglais crochet se dit "bracket", il était tentant de faire les identifications

$$\langle\varphi, \cdot\rangle \longleftrightarrow \langle\varphi| \equiv \text{bra}(\varphi) \quad \& \quad \psi \longleftrightarrow |\psi\rangle \equiv \text{ket}(\psi)$$

de telle sorte que le produit scalaire se note indifféremment

$$\langle\varphi, \psi\rangle \longleftrightarrow \langle\varphi|\psi\rangle.$$

- 1) Montrer que  $\langle\lambda\varphi + \mu\psi| = \bar{\lambda}\langle\varphi| + \bar{\mu}\langle\psi|$ .
- 2) Montrer que la définition de l'adjoint  $A^*$  (noté usuellement  $A^\dagger$ ) défini par

$$\langle\varphi, A^*\psi\rangle := \langle A\varphi, \psi\rangle \quad (\heartsuit)$$

s'écrit selon Dirac comme

$$\langle\varphi|A^*|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|A|\varphi\rangle}.$$

3) On appelle *dyade* tout opérateur de la forme  $P = |\psi\rangle\langle\varphi|$ . Calculer  $P^*$ . A quelles conditions  $P$  est-il un projecteur ?

4) Soit  $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système orthonormé d'un espace de Hilbert. Donner  $\langle m|n\rangle$ . Montrer que ce système est *complet* ssi on a la "relation de fermeture"

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I.$$

5) En prolongeant formellement à la dimension infinie la définition de la trace d'un opérateur utilisant une base orthonormée, trouver la trace  $\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\varphi|)$  d'une dyade.

### 2. \* Espace de Hilbert à deux dimensions.

On se propose d'effectuer la décomposition spectrale de tout opérateur *auto-adjoint* (ou *self-adjoint*) d'un espace de Hilbert bidimensionnel. Par un choix de base, on se ramène à la détermination du *spectre* (valeurs propres) et des *projecteurs propres* (sur les sous-espaces propres) d'une matrice  $2 \times 2$  complexe auto-adjointe (ou hermitique).

- 1) Montrer que toute matrice  $2 \times 2$  est racine du polynôme de Cayley-Hamilton :

$$A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I = 0.$$

Donner l'expression générale de  $A^{-1}$  dans le cas où  $\det(A) \neq 0$ .

- 2) Trouver la forme générale d'une matrice  $2 \times 2$  self-adjointe  $A$ .

3) Rappelons qu'un vecteur non nul  $\psi \in \mathbb{C}^2$  est dit *vecteur propre* de  $A$  de *valeur propre*  $\lambda \in \mathbb{C}$  ssi

$$A\psi = \lambda\psi.$$

i) Justifier que le spectre (l'ensemble  $\text{Sp}(A)$  des valeurs propres  $\lambda$ ) de la matrice self-adjointe  $A$  est en fait réel.

ii) Montrer que deux vecteurs propres  $\psi, \psi'$  associés à deux valeurs propres différentes  $\lambda \neq \lambda'$  sont orthogonaux pour le produit scalaire hilbertien canonique de  $\mathbb{C}^2$ .

4) Justifier que  $A$  et  $B = A - \frac{1}{2}\text{Tr}(A)I$  ont les mêmes vecteurs propres. Montrer que leurs spectres sont simplement translatés :  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) + \frac{1}{2}\text{Tr}(A)$ . On se restreindra donc désormais au cas :  $A = A^*$  et  $\text{Tr}(A) = 0$ .

5) Prouver que si l'on pose  $D := \sqrt{-\det(A)}$ , alors

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda_+, \lambda_-\} \quad (\lambda_{\pm} = \pm D).$$

6) Montrer que si  $A \neq 0$  les matrices  $P_+$  et  $P_-$  :

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \left( I \pm \frac{A}{D} \right)$$

sont des projecteurs self-adjoints supplémentaires, en fait les projecteurs propres de  $A$  qui admet la décomposition spectrale

$$A = \lambda_+ P_+ + \lambda_- P_-.$$

7) Montrer que les vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  sont de la forme

$$\psi_{\pm} := P_{\pm} \psi \quad (\psi \in \mathbb{C}^2).$$

8) Montrer que toute matrice  $M \in M_2(\mathbb{C})$  est une combinaison linéaire des trois matrices de Pauli et de la matrice identité. Donner une formule simple des coefficients dans cette base.

Donner la condition à laquelle doivent satisfaire ces coefficients lorsque  $M$  est auto-adjoint.

**3. \* Spineurs.** On note par  $\Psi$  un vecteur de  $\mathbb{C}^2$ ,  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ ,  $\psi_{\alpha} \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Sur  $\mathbb{C}^2$  la norme est donnée par  $\|\Psi\|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$  dérivant du produit scalaire canonique.

Montrer que tout vecteur *normé* ( $\|\Psi\| = 1$ ) de  $\mathbb{C}^2$  peut s'écrire de façon unique comme

$$\Psi = \frac{e^{i\alpha/2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \sqrt{1+\eta} \\ e^{i\varphi/2} \sqrt{1-\eta} \end{pmatrix}$$

avec  $\eta \in [-1, 1]$ , et  $\alpha, \varphi \in [0, 2\pi[$ .

**4. Spin 1/2 : expérience de Stern et Gerlach.** On désigne par  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  (♡) l'observable vectorielle de spin  $\frac{1}{2}$  où les  $\vec{\sigma}$  sont les matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver les kets propres de  $S_x$  et  $S_y$  dans la base propre  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  de  $S_z$  —base canonique de  $\mathbb{C}^2$  muni de sa structure hilbertienne standard.

2) Le spineur  $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$  représente l'état quantique d'un électron ; quelle est la contrainte sur ses composantes  $a$  et  $b$  ? Quelle est la probabilité pour qu'une mesure de  $S_x$  dans cet état donne  $\hbar/2$  (resp.  $-\hbar/2$ ) ? Cas particuliers :  $|\psi\rangle = |+\rangle$  et  $|\psi\rangle = |-\rangle$ .

3) Même question pour  $S_y$ .

4) Donner explicitement la composante  $\vec{S} \cdot \vec{U}$  du spin dans une direction arbitraire  $\vec{U}$  définie par les angles  $(\theta, \varphi)$  en coordonnées sphériques. Justifier qu'une mesure de l'observable  $\vec{S} \cdot \vec{U}$  ne puisse donner que les résultats  $\pm \hbar/2$ .

5) Trouver les états propres  $|\theta, \varphi, \pm\rangle$  de  $S(\theta, \varphi) \equiv \vec{S} \cdot \vec{U}$ .

6)) Combien de tours faut-il faire exécuter à la direction  $\vec{u}$  du spin autour de l'axe  $\vec{e}_z$  pour que le ket  $|\theta, \varphi, +\rangle$  associé se retrouve identique à lui même?

7) Calculer la probabilité de trouver  $\hbar/2$  (resp.  $-\hbar/2$ ) lors d'une mesure de  $S(\theta, \varphi)$  dans l'état  $|+\rangle$ .

8) Des atomes neutres d'argent traversent un appareil de Stern et Gerlach à fort gradient de champ magnétique dans la direction  $\vec{e}_z$ . Le champ sépare complètement tous les états propres du *moment magnétique*

$$\vec{M} = \gamma \vec{S} \quad (\diamond)$$

des atomes d'Ag de spin  $\vec{S}$  (on appelle  $\gamma$  *coefficient gyromagnétique*). On observe sur un écran que les atomes se répartissent, à la sortie de l'appareil, en deux taches bien distinctes. Quel est le spin de l'atome d'Ag? Ce phénomène est-il explicable en termes de moment magnétique orbital?

9) On sélectionne les états  $|+\rangle$  à la sortie de l'appareil. Les atomes d'Ag ainsi préparés passent à travers un autre appareil de Stern et Gerlach polarisé dans la direction  $\vec{e}_z'$  faisant un angle  $\theta$  avec  $\vec{e}_z$ . Combien de taches observe-t-on alors? Donner l'intensité de ces taches en fonction de  $\theta$ .

**5. \* Sphère de Bloch.** On considère une particule de spin 1/2 dans l'état  $|\chi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$  où  $|\pm\rangle$  sont les états propres de  $S_z$ .

1) En supposant que  $b \neq 0$ , montrer que l'état *physique* de  $|\chi\rangle$  est caractérisé par un seul nombre complexe  $c = a/b$ .

2) Calculer les valeurs moyennes  $s_i = \frac{\langle \chi | S_i | \chi \rangle}{\| \chi \|^2}$ ,  $i = x, y, z$  et relier la direction  $(\theta, \varphi)$  du vecteur  $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$  au nombre complexe  $c$ .

3) On appelle sphère de Bloch la sphère de rayon  $\frac{1}{2}$  en unité de  $\hbar$  telle que le plan complexe  $\mathbb{C}$  de  $c$  soit tangent au pôle sud défini par l'état  $|-\rangle$ .

Soit un point  $M = (\frac{1}{2}, \theta, \varphi)$  défini en coordonnées sphériques sur cette sphère. Montrer que le point  $C$  du plan complexe d'affixe  $c$  est la projection stéréographique de  $M$ , c'est à dire que  $\{C\} = (NM) \cap \mathbb{C}$  est le point d'intersection de  $\mathbb{C}$  et de la droite  $(NM)$  passant par le pôle nord  $N$  et le point  $M$ .

**6. Spin  $\frac{1}{2}$  dans un champ magnétique.** Une particule de spin  $\frac{1}{2}$  est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  constant et uniforme. L'énergie d'interaction (aimantation) est donnée par l'hamiltonien

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B}, \quad \vec{M} = \gamma \vec{S}$$

où  $\vec{M}$  désigne le moment magnétique et  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  le spin de la particule. On supposera que  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + B_1 \vec{e}_x$ .

1) Trouver les états propres  $|\psi_{\pm}\rangle$  de  $H$  ainsi que leur énergie  $E_{\pm}$  en fonction de  $\omega = -\gamma B$  où  $B = \|\vec{B}\|$  désigne l'intensité du champ magnétique.

2) A l'instant  $t = 0$  la particule est dans l'état  $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ . Exprimer  $|\psi(0)\rangle$  en fonction des  $|\psi_{\pm}\rangle$ . En déduire  $|\psi(t)\rangle$  par intégration de l'équation de Pauli.

3) Montrer que la probabilité  $\mathcal{P}_{++}(t)$  de mesurer le spin dans l'état  $|+\rangle$  à l'instant  $t$  est donnée par (formule de Rabi)

$$\mathcal{P}_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} \sin^2\left(\frac{t}{2} \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}\right)$$

avec  $\omega_0 = -\gamma B_0$  et  $\omega_1 = -\gamma B_1$ .

4) En déduire la probabilité  $\mathcal{P}_{+-}(t)$  de mesurer le spin dans l'état  $|-\rangle$  à l'instant  $t$ .

## 7. Spin $\frac{1}{2}$ dans un champ magnétique tournant et résonance.

0) Question préliminaire : Étant donné l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle,$$

déterminer le nouvel hamiltonien  $\tilde{H}(t)$  dans l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{H}(t)|\tilde{\psi}(t)\rangle$$

à laquelle doit satisfaire l'état

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = U_t|\psi(t)\rangle$$

où  $U_t$  est une transformation unitaire dépendante du temps.

**Application** : Une particule de spin  $\frac{1}{2}$  est plongée dans un champ magnétique tournant

$$\vec{B}(t) = B_0\vec{e}_z + B_1\left(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y\right).$$

Il est possible de ramener ce problème à la situation de l'exercice précédent où le champ magnétique est constant et uniforme, en redéfinissant les états par le biais d'une transformation unitaire.

1) Donner la rotation  $R(\alpha(t), \hat{n})$  dépendante du temps qui permet de passer du référentiel lié au laboratoire au référentiel tournant associé au champ magnétique. Autrement dit, la rotation qui permet de se placer dans le référentiel dans lequel le champ magnétique est statique.

2) On pose  $U_t = U(R(\alpha(t), \hat{n}))$ . Si  $|\psi(t)\rangle$  est solution de l'équation de Pauli pour

$$H(t) = -\vec{M} \cdot \vec{B}(t),$$

on définit  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = U_t|\psi(t)\rangle$ .

Déterminer l'équation de Pauli à laquelle doit satisfaire l'état  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  tout en précisant l'expression du nouvel hamiltonien  $\tilde{H}$ .

*Cette nouvelle équation de Pauli correspond à celle qu'écrirait un observateur lié au référentiel tournant défini par le champ magnétique  $\vec{B}(t)$ .*

3) Montrer que  $\tilde{H}$  ne dépend pas du temps et est de la forme  $\tilde{H} = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{eff}}$ , où  $\vec{B}_{\text{eff}}$  est un champ magnétique efficace uniforme et constant dont on précisera l'expression dans le repère lié au laboratoire.

4) On pose  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  avec  $\omega_0 = -\gamma B_0$ , et  $\omega_1 = -\gamma B_1$ . Avec les résultats de l'exercice précédent, si à l'instant  $t = 0$  la particule est dans l'état  $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ , donner la probabilité  $\mathcal{P}_{+-}(t)$  de mesurer le spin dans l'état  $|-\rangle$  à l'instant  $t$ .

Attention à bien faire le parallèle entre  $\vec{B}_{\text{eff}}$  et le  $\vec{B}$  de l'exercice précédent.

5) Pour quelle valeur de  $\omega$  la transition de l'état  $|+\rangle$  vers l'état  $|-\rangle$  est-elle possible ?

### 8. \* Hamiltonien de Pauli.

L'électron est modélisé comme une particule quantique de masse  $m$  et de charge  $e$ , de spin  $\frac{1}{2}$  caractérisé par l'opérateur  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ . L'hamiltonien décrivant un électron plongé dans un champ électromagnétique dérivant du quadripotential  $(\vec{A}(\vec{x}, t), -\phi(\vec{x}, t))$ , est défini sur  $L^2(\mathbb{R}^3, dv) \otimes \mathbb{C}^2$  et s'écrit

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q}, t))^2 + e\phi(\vec{q}, t) - \frac{e}{m}\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{q}, t).$$

Montrer, en utilisant les propriétés algébriques des matrices de Pauli, que  $H$  peut se mettre sous la forme

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) = \frac{1}{2m}(\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q}, t)))^2 + e\phi(\vec{q}, t).$$

### 9. Inégalités de Heisenberg. (voir par exple Le Bellac p.114).

En voici une preuve algébrique : soient  $A$  et  $B$  deux observables (opérateurs auto-adjoints) sur un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . On appelle *valeur moyenne* de  $A$  dans l'état quantique  $\psi \in \mathcal{H}$  normalisé le nombre réel

$$\langle A \rangle := \langle \psi, A\psi \rangle.$$

1) Montrer que  $\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$ .

2) On définit l'écart quadratique moyen de  $A$  dans l'état quantique  $\psi \in \mathcal{H}$  (ou dispersion de  $A$  dans l'état  $\psi$ ) par

$$\Delta A := \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

En déduire l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|.$$

3a) Minorer  $\Delta X \cdot \Delta P_x$  (position-impulsion).

3b) Rappeler les relations de commutation des composantes du moment angulaire orbital  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ . Minorer  $\Delta L_x \cdot \Delta L_y$ .

4a) Pour le spin  $\frac{1}{2}$ , calculer  $[S_x, S_y]$  et minorer  $\Delta S_x \cdot \Delta S_y$ .

4b) On choisit comme état quantique de spin  $|\psi\rangle = |\theta, \varphi\rangle = |\hat{n}+\rangle$ , état propre de l'observable  $S_{\hat{n}}$ . Calculer pour cet état,  $\Delta S_x$ ,  $\Delta S_y$  et  $\langle S_z \rangle$  et vérifier l'inégalité de Heisenberg.

4c) Pour quels vecteurs  $\hat{n}$  la borne inférieure est atteinte dans cette inégalité de Heisenberg.

**10. Dégénérescence du spectre du carré du moment angulaire.** Trois observables  $A$ ,  $B$  et  $C$  vérifient  $[A, C] = [B, C] = 0$  et  $[A, B] \neq 0$ . Montrer que le spectre de  $C$  est nécessairement dégénéré.

En déduire que le spectre du carré  $\vec{J}^2$  d'un moment angulaire  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$  est dégénéré.

**11. Spin 1.** Montrer que l'opérateur vectoriel  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$  de l'espace de Hilbert  $\mathbb{C}^3$  défini pour tout  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^3$  par

$$J_x|\psi\rangle = i\hbar|x\rangle \times |\psi\rangle, \quad J_y|\psi\rangle = i\hbar|y\rangle \times |\psi\rangle, \quad J_z|\psi\rangle = i\hbar|z\rangle \times |\psi\rangle$$

est un *moment angulaire* de spin  $j = 1$ .

*N.B.* On note ici  $\{|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle\}$  la base canonique et  $\times$  le produit vectoriel de  $\mathbb{C}^3$ .

**12. Additions de spins.** Les *quarks* portent un spin (moment angulaire intrinsèque) de valeur  $1/2$ . Les baryons (e.g. proton, neutron) sont composés de trois quarks alors que les mésons sont formés d'un quark et d'un antiquark (e.g. pions, kaons) En supposant que les quarks se trouvent dans l'état fondamental (leur moment angulaire orbital vaut  $\ell = 0$ ) quelles sont les valeurs des spin possibles pour les baryons et les mésons respectivement ?

**13. Particules de spin  $1/2$ .** Considérons deux particules de spin  $1/2$  se trouvant dans l'état intriqué singulet (ou singlet)  $|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$ . Si  $S_{\hat{n}}^{(1)}$  est l'observable de spin correspondant à la particule numéro 1 dans la direction  $\hat{n}$ , et si  $S_{\hat{k}}^{(2)}$  est l'observable de spin correspondant à la particule numéro 2 dans la direction  $\hat{k}$ , montrer que

$$\langle 00 | S_{\hat{n}}^{(1)} S_{\hat{k}}^{(2)} | 00 \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \hat{n} \cdot \hat{k}.$$

#### 14. Addition de deux moments angulaires.

On considère un système à deux particules, chacune portant un moment angulaire. L'espace d'Hilbert total est  $\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$  et le moment angulaire total est  $\vec{J}_{\text{tot}} = \vec{J}_{(1)} + \vec{J}_{(2)}$  avec les extensions  $\vec{J}_{(1)} = \vec{J} \otimes \mathbb{1}$  et  $\vec{J}_{(2)} = \mathbb{1} \otimes \vec{J}$ .

Sachant que sur chaque espace d'Hilbert  $\mathcal{H}_j$ , l'algèbre du moment angulaire est réalisée

$$\vec{J} \times \vec{J} = i\hbar \vec{J}.$$

1) Calculez le commutateur  $[(\vec{J}_{\text{tot}})^2, J_{(1)z}]$ .

2) Généralisez votre résultat en montrant que

$$[(\vec{J}_{\text{tot}})^2, \vec{J}_{(1)}] = 2i\hbar \vec{J}_{(1)} \times \vec{J}_{(2)}.$$

3) En déduire  $[(\vec{J}_{\text{tot}})^2, \vec{J}_{(2)}]$ .

4) En conclure que  $[(\vec{J}_{\text{tot}})^2, \vec{J}_{\text{tot}}] = 0$ .

*Rappels :* Pour le produit d'opérateurs sur  $\mathcal{H}_{\text{tot}}$ , on a en particulier  $(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB'$ .

#### 15. Effet Zeeman du positronium.

On s'intéresse aux états de spin du positronium qui est un état lié électron-positron. et plus particulièrement à l'effet Zeeman du positronium.

**a.** Déterminer l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}$  des états de spin du positronium et préciser sa dimension.

Si  $|\varepsilon\rangle$  dénote les états propres de la composante  $z$  de l'opérateur de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ , pour la valeur propre  $\frac{\hbar\varepsilon}{2}$  avec  $\varepsilon = \pm 1$ , on note  $|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle := |\varepsilon_1\rangle \otimes |\varepsilon_2\rangle$  les quatre états de base de  $\mathcal{H}$ . Les opérateurs de spin sont étendus à  $\mathcal{H}$  en posant  $\vec{\sigma}_{(1)} := \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}$  et  $\vec{\sigma}_{(2)} := \mathbb{1} \otimes \vec{\sigma}$ .

**b.** Calculer l'action de l'opérateur  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$  sur les états  $|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle$ , avec  $\varepsilon_k = \pm 1$ , pour  $k = 1, 2$ .

On rappelle que les états  $|j m\rangle$ , vecteurs propres pour les opérateurs de spin total,  $(\vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)})^2$  et  $S_{z(1)} + S_{z(2)}$ , forment une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ .

**c.** Déterminer l'expression de  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$  en fonction de  $(\vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)})^2$ , et en déduire que  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$  est diagonal dans la base des  $|j m\rangle$ . Que vaut cet opérateur sur les états triplets et sur l'état singulet. Écrire la matrice de  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$  dans la base des  $|j m\rangle$  après avoir ordonné judicieusement ces vecteurs de base. Calculer le commutateur  $[\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}, \vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)}]$  et en déduire que  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$  est un opérateur scalaire.

**d.** On considère les projecteurs  $P_0$  et  $P_1$  de  $\mathcal{H}$  sur les états singulet et triplets respectivement. Donner la décomposition spectrale de l'opérateur  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$  en fonction de ces deux projecteurs, puis exprimer  $P_0$  et  $P_1$  en fonction de  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$ . Donner les matrices de  $P_0$  et  $P_1$  dans la base des  $|j m\rangle$ .

**e.** On pose  $E = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)})$ . Montrer que  $E|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = |\varepsilon_2 \varepsilon_1\rangle$ . Interpréter l'opérateur  $E$  et en déduire le comportement des états triplets et singulet sous l'action de  $E$ . Expliquer.

**f.** L'Hamiltonien libre pour le spin du positronium sur  $\mathcal{H}$  est donné par  $H_0 = E_0 I + a \vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$ , où  $E_0$  et  $a > 0$  sont des constantes positives. Déterminer les vecteurs et valeurs propres de  $H_0$ .

On rappelle que pour un *électron* un spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ , de masse  $m$  et de charge  $q$ , interagit avec un champ magnétique  $\vec{B}$  selon  $-\frac{q}{m}\vec{S} \cdot \vec{B}$ .

**g.** On place le positronium dans un champ magnétique constant  $\vec{B} = B\hat{z}$ ,  $B > 0$ , dirigé selon l'axe  $\hat{z}$ . Si  $-e$  désigne la charge de l'électron et si on décide que le premier facteur de l'espace d'Hilbert produit tensoriel  $\mathcal{H}$  décrit l'électron et le second facteur le positron, montrer que l'Hamiltonien sur  $\mathcal{H}$  prend la forme dite de Zeeman,  $H = H_0 + \frac{e\hbar}{2m}B(\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)})$ .

**h.** On définit le paramètre  $b$  par la relation  $ab = \frac{e\hbar}{2m}B$ . Déterminer la matrice de  $H$  dans la base des  $|j m\rangle$  ordonnée selon  $\{|1 1\rangle, |1 -1\rangle, |1 0\rangle, |0 0\rangle\}$  en fonction de  $E_0$ ,  $a$  et  $b$ .

**i.** Déterminer les valeurs propres de  $H$  et discuter leurs comportements en fonction de  $b$ , lorsque  $b \rightarrow 0$  (champ magnétique faible) et lorsque  $b \rightarrow +\infty$  (champ magnétique fort).

**j.** Déterminer quels sont les vecteurs propres de  $H$ , en régime de champ faible, d'une part, et, en régime de champ fort, d'autre part.

## 16. Décomposition en représentations irréductibles.

Le tenseur de rang 2,  $T \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  s'écrit dans la base canonique comme  $T = T^{k\ell} e_k \otimes e_\ell$ , et ses *neuf* composantes  $T^{k\ell}$  peuvent être mise sous forme matricielle. Si  $R$  est une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ ,  $T$  se transforme sous le groupe orthogonal comme  $T'^{k\ell} = R^k_m R^\ell_n T^{mn}$ . On définit

$$S^{mn} = \frac{1}{2}(T^{mn} + T^{nm}) = S^{nm}, \quad A^{mn} = \frac{1}{2}(T^{mn} - T^{nm}) = -A^{nm}, \quad \text{et } s = \text{tr}T = \text{tr}S.$$

1) Montrer que  $S'^{k\ell} = S'^{\ell k}$  et que  $A'^{k\ell} = -A'^{\ell k}$  sous toute transformation linéaire, et que  $s' = s$  (invariance de la trace) seulement sous transformation orthogonale.

2) A partir des neuf vecteurs  $e_{mn} := e_m \otimes e_n$  formant la base canonique, on pose

$$e_{(mn)} = \frac{1}{2}(e_{mn} + e_{nm}), \quad e_{[mn]} = \frac{1}{2}(e_{mn} - e_{nm}), \quad \text{et } e = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 e_{mm}.$$

Combien y a-t-il de vecteurs  $e_{(mn)}$  linéairement indépendants, d'une part et de vecteurs  $e_{[mn]}$  linéairement indépendants, d'autre part. Montrer que  $T = S^{mn}e_{(mn)} + A^{mn}e_{[mn]}$ .

3) On définit  $\tilde{S}^{mn} = S^{mn} - \frac{S}{3}\delta^{mn}$ . Montrer que  $\text{tr}\tilde{S} = 0$ .

4) On pose  $\tilde{e}_{(mn)} = e_{(mn)} - \delta_{mn}e$ . Combien y a-t-il de tels vecteurs linéairement indépendants? Montrer que l'on a la décomposition

$$T = se + \tilde{S}^{mn}\tilde{e}_{(mn)} + A^{mn}e_{[mn]},$$

et en déduire la décomposition en sous-espaces irréductibles de dimensions respectives 1, 5 et 3 de  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ .

## 17. Particules identiques : Fermions.

1) Rappeler la propriété que doivent vérifier les vecteurs d'état d'un système formé de deux fermions sous l'échange de ces derniers.

En déduire les combinaisons physiquement permises entre les états quantiques d'espace et les états de spin en fonction de leurs propriétés respectives de symétrie sous l'échange des deux fermions.

Les états de spin  $\frac{1}{2}$  d'un électron sont notés  $|\pm\rangle = |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ , alors que les états d'espace sont donnés par les harmoniques sphériques,  $Y_\ell^m = |\ell, m\rangle$  avec  $|m| \leq \ell$ , vecteurs propres communs à  $\vec{L}^2$  et  $L_z$  correspondant à un moment angulaire *orbital*  $\ell$ . On forme une *paire* d'électrons.

2) On s'intéresse tout d'abord à la composition des états de spin  $\frac{1}{2}$ . En vous reportant au tableau des coefficients de Clebsch-Gordan (CG) sur la composition de deux moments angulaires, donner les valeurs a priori possibles du spin total  $S$  ainsi que les états  $|S, M'\rangle$  correspondants et la dénomination qui leur est consacrée. Préciser le comportement de ces états sous l'échange des deux fermions.

3) On suppose que chacun des électrons de la paire est dans un état  $\ell = 1$  du moment angulaire orbital. Par composition de deux tels moments angulaires orbitaux, (voir tableau des CG) quelles seraient, a priori, les valeurs possibles du moment angulaire orbital total  $L$ ?

Discuter suivant la parité de  $L$ , les propriétés de symétrie des états  $Y_L^M = |L, M\rangle$  sous l'échange des deux fermions.

4) En déduire les couples de valeurs  $(L, S)$  et les valeurs du moment angulaire total  $J$  des états quantiques physiquement permis satisfaisant à la question 1) pour cette paire d'électrons. (Expliquez clairement votre démarche).

5) En déduire la dimension de chacun des espaces  $\mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_S$  des états physiquement permis suivant les valeurs du couple  $(L, S)$ .

6) Pour  $L = 2$  et  $M = 0$ , à partir de la table des CG, expliciter la fonction d'onde totale  $Y_L^M(\vec{x}_1, \vec{x}_2) |0, 0\rangle$  en fonction des états  $Y_\ell^m$  et  $|\pm\rangle$  de chacun des deux électrons.

## 18. Calcul de vecteurs propres et changement de base.

La représentation unitaire obtenue en faisant agir les matrices de rotations sur  $\mathbb{C}^3$  correspond au spin 1. Dans la base canonique  $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle$  on a les matrices

$$\ell_x = ir_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_y = ir_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_z = ir_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Les états propres (normés à l'unité) de  $\ell_z$  sont notés  $|1, m\rangle$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $m$ ?

- 2) Calculer ces vecteurs propres  $|1, m\rangle$  normés à l'unité de  $\ell_z$  dans la base  $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle$ .
- 3) Par construction, les  $|1, m\rangle$  forment une nouvelle base orthonormée de  $\mathbb{C}^3$ . A une phase près, on pose (cf cours pour les harmoniques sphériques  $Y_1^m$ )

$$|1, 1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \quad |1, 0\rangle = |z\rangle, \quad |1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle).$$

Déterminer la matrice de passage de la base canonique  $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle$  à la base standard  $|1, m\rangle$ .

- 4) Calculer les matrices des opérateurs  $\ell_x, \ell_y$  et  $\ell_z$  dans la base standard  $|1, m\rangle$ .

### 19. Addition de spins.

Un système constitué de deux particules quantiques, l'une de spin 1 et l'autre de spin 2, est au repos dans une configuration pour laquelle le spin total est  $J = 3$  et le nombre magnétique  $M = 1$ .

- 1) Ecrire à l'aide de la table des coefficients de Clebsch-Gordan, l'état  $|3, 1\rangle$  dans la base produit tensoriel.
- 2) Si on mesurait l'observable  $J_z$  relative à la particule de spin 2, alors que le système est dans l'état  $|3, 1\rangle$ , déterminer les valeurs possibles de cette observable.
- 3) Calculer les probabilités respectives d'obtenir chacune de ces valeurs.

### 20. Additions de moments angulaires.

L'électron d'un atome d'hydrogène se trouve dans l'état de spin "down" et dans l'état  $\psi_{nlm} = \psi_{510}$ . Si on pouvait mesurer le carré du moment angulaire total  $\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2$  pour l'électron seul (sans tenir compte du spin du proton), quelles valeurs propres obtiendrait-on et avec quelles probabilités ?

### 21. Symétrie $SU(2)$ d'isospin.

Le nucléon  $N$  est un modèle de particule à deux niveaux dont le proton  $p$  et le neutron  $n$  sont deux états internes distincts dit états d'isospin (Heisenberg, 1932). *En parfaite analogie avec le spin  $\frac{1}{2}$* , l'état général d'isospin  $|N\rangle$  est représenté par un vecteur de l'espace d'Hilbert  $\mathbb{C}^2 = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  sur lequel agit le groupe  $SU(2)$  décrivant la symétrie d'isospin. Les générateurs autoadjoints de  $SU(2)$  seront notés  $\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$  (afin de les distinguer des opérateurs de spin  $\frac{1}{2}$ ). La base canonique  $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  est le doublet d'isospin formé des vecteurs propres communs à  $\vec{T}^2$  et  $T_3$ . On pose  $|p\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$  et  $|n\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ . Une transformation de  $SU(2)$  s'écrira à nouveau  $e^{-i\alpha \hat{n} \cdot \vec{T}}$ . Si  $H$  désigne l'Hamiltonien décrivant l'interaction forte, l'invariance d'isospin se traduit par  $[H, e^{-i\alpha \hat{n} \cdot \vec{T}}] = 0$ .

- 1) Calculer  $e^{-i\pi T_2}|p\rangle$  et  $e^{-i\pi T_2}|n\rangle$ . Que conclure sur l'action de la transformation  $e^{-i\pi T_2}$  ?
- 2) On considère un état à deux nucléons  $|N \otimes N'\rangle = |N\rangle \otimes |N'\rangle$  décrit par un vecteur de  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Calculer  $e^{-i\pi T_2} \otimes e^{-i\pi T_2}|p \otimes p\rangle$  et  $e^{-i\pi T_2} \otimes e^{-i\pi T_2}|n \otimes n\rangle$ .
- 3) Comparer les valeurs moyennes  $\langle p \otimes p | H \otimes H | p \otimes p \rangle$  et  $\langle n \otimes n | H \otimes H | n \otimes n \rangle$ .
- 4) Quel comportement de l'interaction forte vis à vis de la charge électrique peut-on déduire de la symétrie d'isospin ?

### 22. Règles de sélection et réactions nucléaires.

En plus du nucléon  $|N\rangle \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  (doublet d'isospin, cf exo précédent), il y a le pion  $|\pi\rangle \in \mathcal{H}_1$  triplet d'isospin, dont les trois états d'isospin sont  $|\pi^\pm\rangle := |1, \pm 1\rangle$  et  $|\pi^0\rangle := |1, 0\rangle$  comme pour

un spin 1. On s'intéresse à la diffusion pion-nucléon  $\pi + N \rightarrow \pi' + N'$  ou plus précisément aux transitions entre états pion-nucléon  $|\pi, N\rangle := |\pi\rangle \otimes |N\rangle$ ,

$$|1, m_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_2\rangle \rightarrow |1, m'_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m'_2\rangle.$$

Ces derniers sont décrits comme vecteurs dans l'espace  $\mathcal{H}_{(\pi, N)} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ .

1) Donner la décomposition de l'espace  $\mathcal{H}_{(\pi, N)}$  en représentations irréductibles de la symétrie  $SU(2)$  d'isospin et donner leurs dimensions respectives.

2) Avec la table des coefficients de Clebsch-Gordan, écrire les états pion-nucléon  $|\pi, N\rangle$  dans la base des états  $|J, M\rangle$  relatifs à l'isospin total dicté par la décomposition.

3) La probabilité de transition (ou de réaction) est donnée par le module au carré de de l'amplitude de diffusion  $A := \langle \pi', N' | \mathbf{S} | \pi, N \rangle$  où  $\mathbf{S} = \exp(-\frac{i}{\hbar} t H)$  est l'opérateur de diffusion associé à l'interaction forte. L'invariance sous la symétrie d'isospin de  $H$  (cf exo 4) montre que  $\mathbf{S}$  l'est aussi et est une fonction du Casimir  $\vec{T}^2$ . Par conséquent, l'isospin *total* est conservé dans la réaction pion-nucléon et on a

$$\langle J', M' | \mathbf{S} | J, M \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \langle J | \mathbf{S} | J \rangle$$

où intervient l'élément de matrice réduit, et il y en a deux  $A_2 = \langle \frac{1}{2} | \mathbf{S} | \frac{1}{2} \rangle$  et  $A_4 = \langle \frac{3}{2} | \mathbf{S} | \frac{3}{2} \rangle$ .

Montrer alors que

$$\langle \pi', N' | \mathbf{S} | \pi, N \rangle = \left( C_{J=\frac{1}{2}}^{m_1+m_2, m_1, m_2} C_{J=\frac{1}{2}}^{m'_1+m'_2, m'_1, m'_2} A_2 + C_{J=\frac{3}{2}}^{m_1+m_2, m_1, m_2} C_{J=\frac{3}{2}}^{m'_1+m'_2, m'_1, m'_2} A_4 \right) \delta_{m_1+m_2}^{m'_1+m'_2}$$

4) En déduire dix processus de réaction  $\pi + N \rightarrow \pi' + N'$  possibles.

5) On suppose que les amplitudes  $A_2$  et  $A_4$  ne dépendent pas de l'énergie. Montrer que l'opérateur de diffusion  $\mathbf{S}$  s'écrit dans la base des états  $|J, M\rangle$  sous forme d'une matrice par blocs

$$\mathbf{S} = \left( \begin{array}{c|c} A_4 I_4 & 0 \\ \hline 0 & A_2 I_2 \end{array} \right).$$

6) La section efficace de tels processus est proportionnelle à la probabilité de transition

$$\sigma(\pi + N \rightarrow \pi' + N') \simeq |\langle \pi', N' | \mathbf{S} | \pi, N \rangle|^2 = |A|^2.$$

Exprimer à partir de  $A_2$  et  $A_4$  les sections efficaces des diffusions élastiques  $\sigma_+(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)$  et  $\sigma_-(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)$ , ainsi que celle avec échange de charge  $\sigma'_-(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)$ .

7) Analyser pour chacune de ces trois sections efficaces les cas où l'une ou l'autre des amplitudes d'isospin domine,  $|A_2| \ll |A_4|$  ou  $|A_2| \gg |A_4|$ .

8) Les mesures à basse énergie des sections efficaces totales  $\sigma_T(\pi^+ p) \approx \sigma^+$  et  $\sigma_T(\pi^- p) \approx \sigma_- + \sigma'_-$  donnent  $\sigma_T(\pi^+ p)/\sigma_T(\pi^- p) \approx 3$  au niveau d'un même pic de résonance.

En déduire quelle amplitude d'isospin domine et conclure sur la validité du concept d'isospin.

9) C'est le pic de résonance  $\Delta$ , particule intermédiaire. Donner l'espace des états d'isospin de la résonance  $\Delta$  et décrire les états internes de cette particule intermédiaire en explicitant la charge électrique.

@@@

MQ-I – CORRECTION des exercices

**1. Notations de Dirac.**

1) On a  $\langle \lambda\varphi + \mu\psi | \psi' \rangle = \langle \lambda\varphi + \mu\psi, \psi' \rangle = \bar{\lambda}\langle \varphi, \psi' \rangle + \bar{\mu}\langle \psi, \psi' \rangle = \bar{\lambda}\langle \varphi | \psi' \rangle + \bar{\mu}\langle \psi | \psi' \rangle = (\bar{\lambda}\langle \varphi | + \bar{\mu}\langle \psi |) | \psi' \rangle$  quel que soit  $|\psi'\rangle$ , CQFD.

2) Ecrivons  $\langle \varphi | A^* | \psi \rangle = \langle \varphi, A^* \psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, A\varphi \rangle} = \overline{\langle \psi | A | \varphi \rangle}$  ce qui constitue la définition de Dirac pour l'adjoint.

3) L'adjoint d'une dyade  $P = |\psi\rangle\langle\varphi|$  se calcule grâce à la formule précédente :  $\langle \varphi' | P^* | \psi' \rangle = \langle \psi' | P | \varphi' \rangle = \overline{\langle \psi' | \psi \rangle \langle \varphi | \varphi' \rangle} = \overline{\langle \psi' | \psi \rangle} \langle \varphi | \varphi' \rangle = \langle \varphi' | \varphi \rangle \langle \psi | \psi' \rangle = \langle \varphi' | \varphi \rangle \langle \psi | \psi' \rangle$  quels que soient  $|\varphi'\rangle$  et  $|\psi'\rangle$ ; donc

$$(|\psi\rangle\langle\varphi|)^* = |\varphi\rangle\langle\psi| \quad (\spadesuit)$$

On a  $P^2 = |\psi\rangle\langle\varphi||\psi\rangle\langle\varphi| = P = |\psi\rangle\langle\varphi|$  si  $\langle\varphi|\psi\rangle = 1$ ; mais d'autre part  $P = P^*$  si  $|\varphi\rangle = \lambda|\psi\rangle$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  (c.f.  $(\spadesuit)$ ). Il s'ensuit que notre dyade  $P$  est un projecteur si  $|\varphi\rangle = |\psi\rangle/\langle\psi|\psi\rangle$  avec  $|\psi\rangle \neq 0$ ; alors

$$P = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

4) Le système  $\{|n\rangle\}$  est orthonormé si  $\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$ . Ce système est complet si, pour tout vecteur  $|\psi\rangle$  de l'espace de Hilbert, on a  $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n |n\rangle$  avec  $\psi_n = \langle n | \psi \rangle$ , c'est à dire  $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n | \psi \rangle = (\sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n |) |\psi\rangle$ , i.e. la *relation de fermeture*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n | = \mathbb{I}.$$

5) La trace d'un opérateur  $A$  est (en dimension finie) définie comme la somme des éléments diagonaux de sa matrice  $\{A_j^k\}$  dans une base quelconque :  $\text{Tr}(A) := \sum_n A_n^n$ . Nous aurons donc formellement dans notre base hilbertienne orthonormée

$$\text{Tr}(A) := \sum_n \langle n | A | n \rangle \quad (\langle m | n \rangle = \delta_{mn})$$

et donc  $\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\varphi|) = \sum_n \langle n | |\psi\rangle\langle\varphi| | n \rangle = \sum_n \langle \varphi | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \langle \varphi | \sum_n |n\rangle\langle n | \psi \rangle = \langle \varphi | \mathbb{I} | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle$ .  
Finalement

$$\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\varphi|) \equiv \langle \varphi | \psi \rangle.$$

**2. Espace de Hilbert à deux dimensions.**

1) Le polynôme caractéristique de  $A \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$  est  $\mathcal{P}(\lambda) := \det(A - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$  et donc  $\mathcal{P}(A) = 0$  (théorème de Cayley-Hamilton). On trouve  $A^{-1} = (\text{Tr}(A)\mathbb{I} - A)/\det(A)$ .

2) Les matrices self-adjointes (on dit aussi hermitiennes)  $2 \times 2$  sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & b \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C})$$

3) Montrons que toute valeur propre de  $A = A^*$  est réelle. Supposons que  $A\psi = \lambda\psi$  avec  $\psi \neq 0$ . On a  $\langle \psi, A\psi \rangle = \lambda\|\psi\|^2 = \langle A\psi, \psi \rangle = \bar{\lambda}\|\psi\|^2$  donc  $\lambda = \bar{\lambda}$ .

Montrons que si  $A = A^*$  et  $A\psi = \lambda\psi$  &  $A\psi' = \lambda'\psi'$  avec  $\lambda \neq \lambda'$  alors  $\psi \perp \psi'$ . On a  $\langle \psi', A\psi \rangle = \lambda \langle \psi', \psi \rangle = \langle A\psi', \psi \rangle = \lambda' \langle \psi', \psi \rangle$  donc  $\langle \psi, \psi' \rangle = 0$ .

4) Par définition de  $B$ ,  $B\psi = A\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}\psi = (\lambda - \frac{1}{2}\text{Tr}(A))\psi$  si  $\psi$  est vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda$ . Donc  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) + \frac{1}{2}\text{Tr}(A)$ .

5) Les racines du polynôme caractéristique  $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 + \det(A)$  sont les valeurs propres  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{-\det(A)}$  si  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  de trace nulle.

6) On trouve  $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$  grâce à la relation  $A^2 = -\det(A)\mathbb{I}$ . Les  $P_{\pm}$  sont donc des projecteurs (supplémentaires car  $P_+ + P_- = \mathbb{I}$ ) et auto-adjoints puisque  $A$  est auto-adjoint.

La définition des  $P_{\pm}$  entraîne :  $\lambda_+P_+ + \lambda_-P_- = A$ .

7) Soit  $\psi$  un vecteur tel que  $\psi_+ := P_+\psi \neq 0$ . Alors  $A\psi_+ = \lambda_+P_+P_+\psi + \lambda_-P_-P_+\psi = \lambda_+P_+\psi = \lambda_+\psi_+$  puisque  $P_+^2 = P_+$  et  $P_-P_+ = 0$ . Donc  $\psi_+$  est bien vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda_+$ . Idem :  $\psi_-$  est vecteur propre de  $A$  de valeur propre  $\lambda_-$ .

8) On vient de voir que si  $A = A^\dagger$  et  $\text{tr}A = 0$  alors  $A = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ . À présent, si  $M \in M_2(\mathbb{C})$  est une matrice complexe  $2 \times 2$  et  $M_2(\mathbb{C})$  est un espace vectoriel complexe de dimension  $\dim_{\mathbb{C}} = 4$  et on cherche à montrer que les quatre matrices  $\{\sigma_{\mu}\}_{\mu=0}^4$  avec  $\sigma_0 = \mathbb{I}$  et  $\sigma_{\mu} = \sigma_k$  pour  $\mu = k = 1, 2, 3$  forment une base de  $M_2(\mathbb{C})$ , et donc que toute matrice  $M$  se décompose de manière unique comme  $M = \lambda^{\mu}\sigma_{\mu}$ . Il s'agit de trouver un produit scalaire sur  $M_2(\mathbb{C})$  de sorte à calculer les coefficients  $\lambda^{\mu}$ . Remarquons d'emblée que  $\text{tr}\sigma_{\mu} = 2\delta_{\mu 0}$  puisque  $\text{tr}\sigma_k = 0$ . On en déduit  $\text{tr}M = \text{tr}\lambda^{\mu}\sigma_{\mu} = 2\lambda^0$ , d'où  $\lambda^0 = \frac{1}{2}\text{tr}M$ . Reste à déterminer les  $\lambda^k$ . Regardons le produit

$$M\sigma_k = \lambda^{\mu}\sigma_{\mu}\sigma_k = \lambda^0\sigma_k + \lambda^{\ell}\sigma_{\ell}\sigma_k \stackrel{\text{eq.}(\sigma)}{=} \lambda^0\sigma_k + \lambda^{\ell}(\delta_{\ell k}\mathbb{I} + i\varepsilon_{\ell km}\sigma_m).$$

Ainsi,  $\text{tr}M\sigma_k = 2\lambda^k$ . Pour résumer les composantes sont données par  $\lambda^{\mu} = \frac{1}{2}\text{tr}(M\sigma_{\mu})$ .

Si de plus  $M^\dagger = M$  alors  $(\lambda^{\mu}\sigma_{\mu})^\dagger = \bar{\lambda}^{\mu}\sigma_{\mu} = \lambda^{\mu}\sigma_{\mu}$  d'où  $\lambda^{\mu} \in \mathbb{R}$ .

**3. Spineurs.** Tout d'abord, on vérifie bien que le paramétrage donné de  $\Psi$  est bien un vecteur normé de  $\mathbb{C}^2$  et donc correspond à un point de la sphère  $S_3 \subset \mathbb{R}^4$ . Pour trouver ce paramétrage, on procède comme suit. On écrit chacune des composantes complexes  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2$  de  $\Psi$  sous forme trigonométrique  $\psi_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ ,  $|\psi_k| = \rho_k$  et  $\theta_k$  fixé à  $2\pi$  près.

**Paramétrage des modules.** La contrainte  $|\Psi|^2 = 1$  conduit à  $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1$  et on pose  $\rho_k = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{k+1}\eta)$ ,  $k = 1, 2$ . Le nombre réel  $\eta$  doit vérifier  $|\eta| \leq 1$ , avec  $\eta = 2\rho_1^2 - 1 = \rho_1^2 - \rho_2^2$ .

**Paramétrage des arguments.** On pose  $\theta_k = \frac{1}{2}(\alpha + (-1)^k\varphi)$ ,  $k = 1, 2$  d'où inversement,  $\alpha = \theta_1 + \theta_2$  et  $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ . Si on se donne les  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2$ , on définit de façon unique (mod  $2\pi$ ) l'expression de du vecteur d'état  $\Psi$ ,

$$\Psi(\alpha, \varphi, \eta) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 e^{i\theta_1} \\ \rho_2 e^{i\theta_2} \end{pmatrix} = \frac{e^{i\alpha/2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \sqrt{1+\eta} \\ e^{i\varphi/2} \sqrt{1-\eta} \end{pmatrix}$$

Toute modification des angles  $\alpha$  ou de  $\varphi$  donne un autre point de la sphère  $S_3$ .

On peut poser ensuite  $\eta = \cos\theta$  avec  $\theta \in [0, \pi]$ , d'où avec les identités trigonométriques  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ ,

$$\sqrt{\frac{1+\eta}{2}} = \cos\theta/2, \quad \sqrt{\frac{1-\eta}{2}} = \sin\theta/2$$

sans aucune ambiguïté de signe sur  $[0, \pi]$ .

Finalement en éliminant la phase globale  $e^{i\alpha/2}$ , on obtient le paramétrage de tout état de spin (défini à une phase près)

$$\chi(\theta, \varphi) = |\theta, \varphi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos\theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin\theta/2 \end{pmatrix}$$

avec  $0 \leq \varphi < 2\pi$  et  $\theta \in [0, \pi]$ .

#### 4. Spin $\frac{1}{2}$ : expérience de Stern et Gerlach..

1) Les matrices de Pauli étant des involutions de trace nulle, leur spectre est  $\{+1, -1\}$ . Soit  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  une base orthonormée de  $\mathbb{C}^2$  telle que  $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ , par exemple

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve aisément que les vecteurs

$$|\pm \hat{x}\rangle = \frac{|+\rangle \pm |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

forment un système orthonormé de vecteurs propres de  $\sigma_x$  de valeurs propres  $\pm 1$ . De même

$$|\pm \hat{y}\rangle = \frac{|+\rangle \pm i|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

forment un système orthonormé de vecteurs propres de  $\sigma_y$  de valeurs propres  $\pm 1$ , et ... bien sûr

$$|\pm \hat{z}\rangle = |\pm\rangle.$$

[cf exo 3 du DM-5].

2) Le spineur  $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$  définit un état quantique normalisé si  $\langle\psi|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1$ . Comme le spectre de  $\sigma_x$  est  $\pm 1$ , une mesure de  $S_x$  dans cet état ne peut donner que  $\pm \frac{\hbar}{2}$ ; la probabilité pour que cette mesure donne  $+\frac{\hbar}{2}$  est (calculée ici par tous les moyens possibles)

$$\text{Prob}(|\psi\rangle = |+\hat{x}\rangle) = \|P_{\hat{x}}\psi\|^2 = \langle\psi|P_{\hat{x}}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(1 + \langle\psi, \sigma_x|\psi\rangle) = |\langle+\hat{x}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}|a + b|^2,$$

le calcul effectif étant donné par le module au carré de l'amplitude de probabilité  $\langle+\hat{x}|\psi\rangle$ .

On trouve de la même manière  $\text{Prob}(|\psi\rangle = |-\hat{x}\rangle) = \frac{1}{2}|a - b|^2$ .

Exemples : si  $\varepsilon = \pm$ ,  $\text{Prob}(|\varepsilon\hat{y}\rangle = |\varepsilon'\hat{x}\rangle) = \text{Prob}(|\varepsilon\hat{z}\rangle = |\varepsilon'\hat{x}\rangle) = \frac{1}{2}$ .

3) On trouve également  $\text{Prob}(|\psi\rangle = |\pm\hat{y}\rangle) = |\langle\pm\hat{y}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}|a \mp ib|^2$ .

4) Définissons la direction

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

par sa longitude  $\varphi \in [0, 2\pi]$  et sa colatitude  $\theta \in [0, \pi]$ . La composante du vecteur de spin selon cette direction est  $\vec{S} \cdot \vec{U} = S_x U_x + S_y U_y + S_z U_z = S(\theta, \varphi)$ , c'est à dire

$$S(\theta, \varphi) = \frac{\hbar}{2} \sigma(\theta, \varphi) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Mais  $\sigma(\theta, \varphi)$  est toujours involutive et de trace nulle, donc de spectre  $\{+1, -1\}$ . Les valeurs que fournit une mesure du spin dans la direction  $(\theta, \varphi)$  sont les valeurs propres de  $S(\theta, \varphi)$ , c'est à dire  $\pm \frac{1}{2}\hbar$ .

5) Soient  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} \pm \sigma(\theta, \varphi))$  les projecteurs propres de  $\sigma(\theta, \varphi)$ . Maintenant le vecteur  $P_+|+\rangle \propto \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|-\rangle$  est vecteur propre de  $\sigma(\theta, \varphi)$  de valeur propre  $+1$ , on peut donc écrire :

$$|\theta, \varphi, +\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

à une phase près. Il vient de même (à une phase près)

$$|\theta, \varphi, -\rangle = |\pi - \theta, \pi + \varphi, +\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2) e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

6) On remarque que  $|\theta, \varphi + 2\pi, \varepsilon\rangle = -|\theta, \varphi, \varepsilon\rangle$  bien que  $\vec{U}(\theta, \varphi + 2\pi) = \vec{U}(\theta, \varphi)$ . Il faut donc une rotation d'angle  $4\pi$  autour de  $\vec{e}_z$  pour retrouver le ket initial.

7) La probabilité de trouver  $+\frac{\hbar\sigma}{2}$  lors d'une mesure de  $S(\theta, \varphi)$  si le système est dans l'état quantique  $|+\rangle$  est donc  $\text{Prob}(|+\rangle = |\theta, \varphi, +\rangle) = |\langle\theta, \varphi, +|+\rangle|^2 = \cos^2(\theta/2)$  et enfin<sup>3</sup>

$$\text{Prob}(|+\rangle = |\theta, \varphi, \pm\rangle) = \begin{cases} \cos^2(\theta/2) \\ \sin^2(\theta/2) \end{cases} \quad (\clubsuit)$$

8) Un champ magnétique à fort gradient dans la direction  $\vec{e}_z$  sépare complètement les états propres de la composante  $M_z = \gamma S_z$  du moment magnétique des atomes. Dans leur expérience historique de 1922, Stern et Gerlach "polarisent" ainsi des atomes d'argent et observent *deux* (2) taches sur un détecteur à la sortie du dispositif. Ces deux taches correspondent respectivement aux états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  de spin  $\frac{1}{2}$  qui est donc le spin des atomes d'argent.

L'interprétation de cette expérience en terme de moment magnétique orbital est impossible : il faudrait observer un nombre impair de taches.

On observe trois taches pour des atomes de spin 1, quatre pour ceux de spin  $\frac{3}{2}$ , etc... Dans la limite classique des spins élevés, c'est un *continuum* de taches qui serait observé : l'expérience de Stern et Gerlach est donc incompréhensible classiquement ; elle a fourni la première mise en évidence du spin en tant qu'observable quantique.

9) Les atomes d'argent sont polarisés selon  $\vec{e}_z$  par un premier appareil de Stern et Gerlach. La fraction des atomes ainsi préparés dans l'état  $|+\rangle$  est dirigée vers un deuxième appareil de Stern et Gerlach qui les polarise selon une direction  $\vec{e}_z'$  telle que  $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z' = \cos\theta$ . Quid des taches observées à la sortie du deuxième polariseur ?

Comme expliqué plus haut, on observe deux taches au plus. Mais quelle est leur intensité respective ? Il s'agit de mesurer le moment magnétique  $M(\theta, \varphi)$  des atomes dans l'état  $|+\rangle$  (l'angle  $\varphi$  étant arbitraire). Une mesure de ce moment magnétique ne peut donner que  $\pm\frac{1}{2}\gamma\hbar$ . La probabilité de trouver  $+\frac{1}{2}\gamma\hbar$  lors d'une mesure de  $M(\theta, \varphi)$  dans l'état  $|+\rangle$  est donc  $\text{Prob}(|\theta, \varphi, +\rangle = |+\rangle)$ . L'intensité  $I_+(\theta, \varphi)$  de la tache "+" à la sortie est donc proportionnelle à cette probabilité. Grâce à  $(\clubsuit)$  on obtient

$$I_{\pm}(\theta) \propto \begin{cases} \cos^2(\theta/2) \\ \sin^2(\theta/2) \end{cases}$$

et l'on a bien deux taches pour  $\theta \neq 0, \pi$  —autrement le polariseur est *transparent* [cf exo 1]. Ces taches ont même intensité pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

## 5. Sphère de Bloch.

1)  $b \neq 0$ , on peut écrire  $|\chi\rangle = b(c|+\rangle + |-\rangle) =: b|\psi\rangle$ . Les deux vecteurs d'état colinéaires  $|\chi\rangle$  et  $|\psi\rangle$  (a priori non normés) décrivent le même état *physique* car

<sup>3</sup>La probabilité totale est bien égale à 1!

i) les projecteurs orthogonaux associés sont égaux

$$P_\chi = \frac{|\chi\rangle\langle\chi|}{\langle\chi|\chi\rangle} \equiv P_\psi = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

ii) ces deux états sont solutions de l'équation de Schrödinger qui est *linéaire*

iii) toute mesure d'une observable  $\mathcal{A}$  à laquelle correspond un opérateur auto-adjoint  $A$  conduit à la même valeur moyenne

$$\frac{\langle\chi|A|\chi\rangle}{\langle\chi|\chi\rangle} = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

Le vecteur d'état  $|\psi\rangle = c|+\rangle + |-\rangle$  est caractérisé par un seul nombre complexe  $c$ .

**Remarque.** Comme on a supposé  $b \neq 0$  on ne peut pas considérer les états colinéaires à  $|+\rangle$ .

2) Pour  $k = 1, 2, 3$  un calcul direct donne les trois nombres réels

$$s_k = \frac{\langle\chi|S_k|\chi\rangle}{\|\chi\|^2} = \frac{\hbar/2}{1+c\bar{c}} \langle\psi|\sigma_k|\psi\rangle,$$

d'où de manière plus explicite

$$s_1 = \frac{\hbar}{2} \frac{c+\bar{c}}{1+c\bar{c}}, \quad s_2 = \frac{\hbar}{2} \frac{i(c-\bar{c})}{1+c\bar{c}}, \quad s_3 = \frac{\hbar}{2} \frac{c\bar{c}-1}{1+c\bar{c}}.$$

Si  $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$  alors  $\|\vec{s}\| = \hbar/2$  donc définit un point de la sphère de rayon  $\hbar/2$ .

En écrivant  $\vec{s}$  en coordonnées sphériques  $\vec{s} = \|\vec{s}\| \hat{s} = \frac{\hbar}{2} \hat{s}(\theta, \varphi)$ , avec pour vecteur directeur unitaire

$$\hat{s}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c+\bar{c}}{1+c\bar{c}} \\ \frac{i(c-\bar{c})}{1+c\bar{c}} \\ \frac{c\bar{c}-1}{1+c\bar{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Cette correspondance entre la direction  $\hat{s} \in S^2$  et le nombre complexe  $c \in \mathbb{C} \simeq S^2 \setminus \{N\}$  définit la projection stéréographique relativement au pôle Nord  $N$  définie par  $\frac{1}{2}\hat{z}$ , voir Fig.1.

En effet, d'une part, de la troisième composante, on en déduit<sup>4</sup> le module

$$|c|^2 = c\bar{c} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = 1/\tan^2(\theta/2),$$

et, d'autre part, la combinaison

$$\hat{s}_1 - i\hat{s}_2 = \frac{2c}{1+c\bar{c}} \implies c = \frac{1+c\bar{c}}{2}(\hat{s}_1 - i\hat{s}_2) = \left(1 + \frac{1}{\tan^2(\theta/2)}\right) \frac{\sin\theta}{2} e^{-i\varphi} = \frac{e^{-i\varphi}}{\tan(\theta/2)},$$

permettant d'obtenir  $c$  en écriture trigonométrique. On obtient ainsi le vecteur d'état

$$|\psi\rangle = \frac{e^{-i\varphi}}{\tan(\theta/2)} |+\rangle + |-\rangle$$

---

<sup>4</sup>Identités trigonométriques  $\cos a = \frac{1-\tan^2(a/2)}{1+\tan^2(a/2)}$  et  $\sin a = \frac{2\tan(a/2)}{1+\tan^2(a/2)}$ .

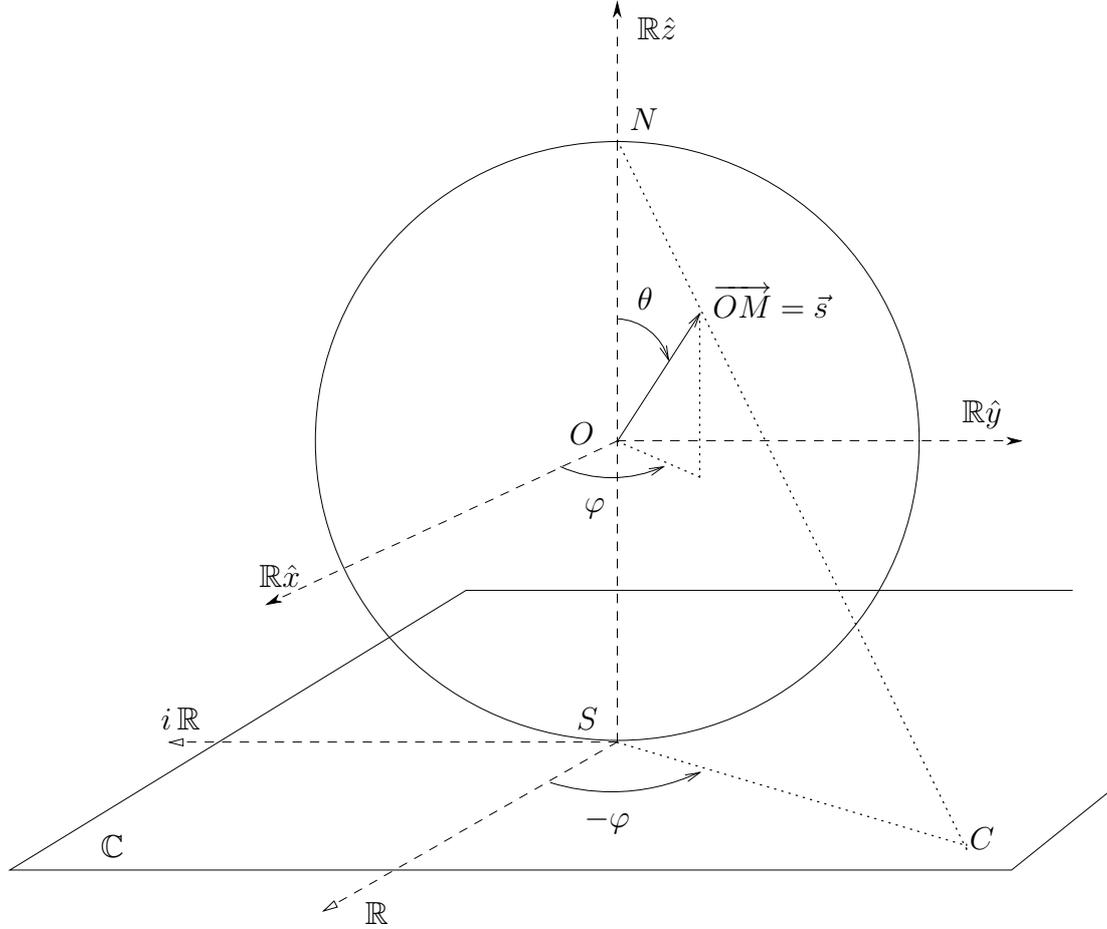


FIG. 1 – Projection stéréographique pour la sphère de rayon  $\frac{1}{2}$  par rapport au pôle Nord

et si on souhaite le normer à l'unité

$$|\hat{\psi}\rangle = \frac{1}{(1 + |c|^2)^{1/2}} |\psi\rangle = e^{-i\varphi} \cos(\theta/2) |+\rangle + \sin(\theta/2) |-\rangle = e^{-i\varphi/2} \chi(\theta, \varphi)$$

où  $\chi(\theta, \varphi) = |\theta, \varphi\rangle$  est le spineur construit dans l'exo 2 (ou dans la question 3-5). Tout se calcule à une phase près!

3) L'affixe  $c = e^{-i\varphi} / \tan(\theta/2)$  du point  $C \in \mathbb{C}$  a pour module  $|c| = 1 / \tan(\theta/2)$  et pour argument  $-\varphi$ , voir Fig.1.

Ceci étant, la projection stéréographique du point  $M$  de la sphère de rayon  $\frac{1}{2}$  (en unité de  $\hbar$ ) relie univoquement le vecteur  $\vec{s} = \langle \chi | \vec{S} | \chi \rangle$  et les composantes scalaires complexes de l'état quantique  $|\chi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$  via le nombre complexe  $c = a/b$  comme illustré dans la Fig.2.

Cette projection indique qu'en terme de mesure de l'observable de spin, il est impossible de distinguer dans  $\mathbb{C}^2$  le vecteur d'état  $|\chi\rangle = \frac{b e^{-i\varphi/2}}{(1+|c|^2)^{1/2}} |\theta, \varphi\rangle$  ( $b \neq 0$ ) du vecteur d'état normé  $|\theta, \varphi\rangle$ , comme souligné en i) de la question 1) puisque mesure = projection orthogonale. C'est pour cette raison que ces deux vecteurs d'état représentent le *même état physique*, ce dernier étant caractérisé par un **rayon quantique**; c'est à dire une droite complexe de  $\mathbb{C}^2$ .

Ainsi l'état physique du spin correspondant à la direction  $(\theta, \varphi)$  est donné par le sous-espace de dimension complexe un de  $\mathbb{C}^2$

$$\mathcal{H}_{\theta, \varphi} = \{ |\chi\rangle = \lambda |\theta, \varphi\rangle \in \mathbb{C}^2, \quad \lambda \in \mathbb{C} \}$$

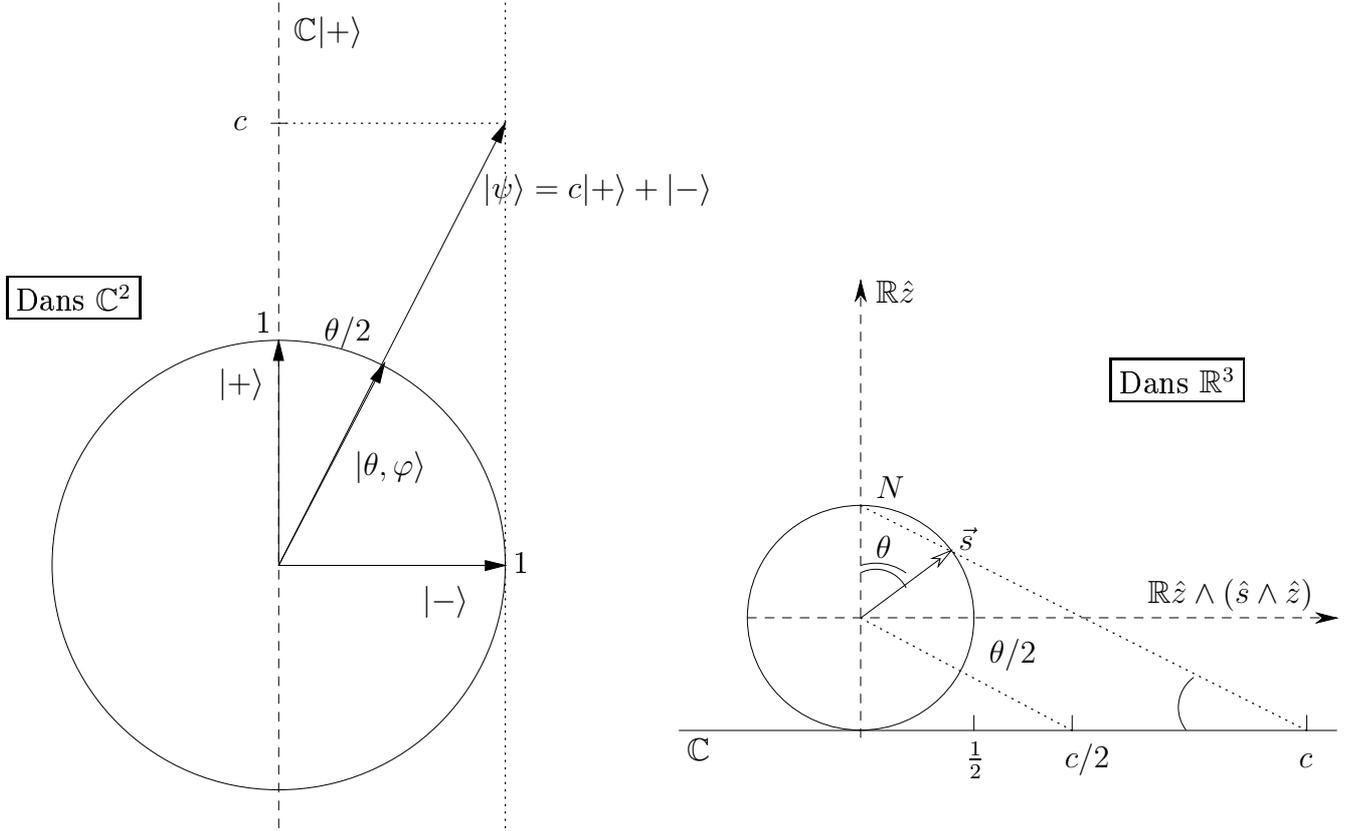


FIG. 2 – Illustration “imagée” de l’espace des spins  $\mathbb{C}^2$  et la correspondance dans l’espace réel  $\mathbb{R}^3$  via projection stéréographique avec  $|c| = 1/\tan(\theta/2)$ .

Le pôle Nord  $N$  représente l’état physique associé à  $|+\rangle$ . L’ensemble des rayons est ce que l’on appelle l’espace projectif de  $\mathbb{C}^2$  (ou encore droite projective complexe) noté  $P(\mathbb{C}^2)$ . Un rayon représente donc un point de la droite projective complexe qui est l’ensemble des droites complexes de  $\mathbb{C}^2$ , ce que l’on peut écrire comme

$$P(\mathbb{C}^2) = \{\mathbb{C}|\hat{\psi}\rangle \text{ avec } \hat{\psi} \in \mathbb{C}^2, \|\hat{\psi}\| = 1\},$$

La construction de la question 2) montre que l’espace projectif de  $\mathbb{C}^2$  s’identifie à une sphère dans  $\mathbb{R}^3$ , autrement dit  $P(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$ , appelée sphère de Riemann ou encore de Poincaré-Bloch.

## 6. Spin $\frac{1}{2}$ dans un champ magnétique.

1) L’hamiltonien d’interaction (aimantation) est donc  $H = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$ . Mais puisque  $\vec{B} = B(\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_z)$  avec  $B \equiv \|\vec{B}\|$ , on a en posant,  $\cos\theta = B_0/B$  et  $\sin\theta = B_1/B$ ,

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n}(\theta, \varphi = 0) \quad \text{où} \quad \omega \equiv -\gamma B.$$

Compte tenu des résultats obtenus dans l’exo 2 du TD II, on trouve aisément que  $H|\psi_{\pm}\rangle = E_{\pm}|\psi_{\pm}\rangle$  avec

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\omega}{2} \quad \text{et} \quad |\psi_{\pm}\rangle = |\theta, 0, \pm\rangle.$$

2) L’état de spin initial de notre particule est  $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ , superposition suivante d’états stationnaires :  $|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2)|\psi_+\rangle - \sin(\theta/2)|\psi_-\rangle$ . En intégrant l’équation de Schrödinger-

Pauli  $i\hbar (d/dt)|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$  dans la base  $\{|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}$  qui diagonalise  $H$ , alors par évolution  $|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)|\psi(0)\rangle$ , et on trouve qu'à tout instant

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\theta/2) |\psi_+\rangle e^{-iE_+t/\hbar} - \sin(\theta/2) |\psi_-\rangle e^{-iE_-t/\hbar}.$$

3) La probabilité qu'a le système d'être à l'instant  $t$  dans l'état  $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$  est donc  $\mathcal{P}_{++}(t) = \text{Prob}(|\psi(t)\rangle = |+\rangle) = |\langle +|\psi(t)\rangle|^2$ . Un calcul élémentaire donne

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{++}(t) &= |\cos(\theta/2) \langle +|\psi_+\rangle e^{-i\omega t/2} - \sin(\theta/2) \langle +|\psi_-\rangle e^{i\omega t/2}|^2 \\ &= |(1 + \cos \theta)/2 e^{-i\omega t/2} + (1 - \cos \theta)/2 e^{i\omega t/2}|^2 \\ &= |\cos(\omega t/2) - i \cos \theta \sin(\omega t/2)|^2 \\ &= 1 - \sin^2 \theta \sin^2(\omega t/2). \end{aligned}$$

Finalement, puisque  $\sin \theta = \omega_1/\omega = \omega_1/\sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}$ , on obtient la *formule de Rabi* :

$$\mathcal{P}_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} \sin^2 \left( \frac{t}{2} \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2} \right).$$

$$4) \mathcal{P}_{+-}(t) = 1 - \mathcal{P}_{++}(t).$$

## 7. Spin $\frac{1}{2}$ dans un champ magnétique tournant et résonance.

0) De  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = U_t|\psi(t)\rangle$  on obtient

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t |\tilde{\psi}(t)\rangle &= i\hbar \left( (\partial_t U_t) |\psi(t)\rangle + U_t \partial_t |\psi(t)\rangle \right) \stackrel{\S}{=} i\hbar (\partial_t U_t) |\psi(t)\rangle + U_t i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle \\ &= i\hbar (\partial_t U_t) U_t^{-1} |\tilde{\psi}(t)\rangle + U_t H(t) |\psi(t)\rangle = \tilde{H}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle. \end{aligned}$$

D'où l'identification  $\tilde{H}(t) = U_t H(t) U_t^{-1} + i\hbar \partial_t U_t U_t^{-1}$ .

§ On peut faire traverser  $U_t$  par  $i\hbar$  sans changer de signe car  $U_t$  est unitaire (subtilité).

1) Remarquer que  $\vec{B}(t) = R(\omega t, \vec{e}_z) (B_0 \vec{e}_z + B_1 \vec{e}_x)$ . Donc  $R(\alpha, \hat{n}) = R(-\omega t, \vec{e}_z)$  de sorte à se placer dans le référentiel dans lequel le champ magnétique apparaît statique,  $\vec{B}_{\text{stat}} = R(-\omega t, \vec{e}_z) \vec{B}(t)$ .

2) On a donc  $U_t = U(R(-\omega t, \vec{e}_z)) = \exp(i\frac{\omega t}{2} \sigma_z)$ . D'après la question 0) et le fait que  $U(R) \vec{S} U(R)^{-1} = R^{-1} \vec{S}$ , ( $\vec{S}$  est une observable vectorielle), on obtient successivement

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= -\gamma U(R(-\omega t, \vec{e}_z)) \vec{S} \cdot \vec{B}(t) U(R(\omega t, \vec{e}_z)) + i\hbar \partial_t \exp(i\frac{\omega t}{2} \sigma_z) \exp(-i\frac{\omega t}{2} \sigma_z) \\ &= -\gamma (R(\omega t, \vec{e}_z) \vec{S}) \cdot \vec{B}(t) - \hbar \frac{\omega}{2} \sigma_z = -\gamma \vec{S} \cdot (R(-\omega t, \vec{e}_z) \vec{B}(t)) - \omega S_z \\ &\stackrel{1)}{=} -\gamma (B_1 S_x + B_0 S_z) - \omega S_z =: -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}_{\text{eff}}. \end{aligned}$$

3)  $\vec{B}_{\text{eff}} = (B_0 + \frac{\omega}{\gamma}) \vec{e}_z + B_1 \vec{e}_x$  ce qui revient à translater la composante  $B_0$  selon  $\hat{z}$  de  $\omega/\gamma$ .

Ainsi la précession de Larmor  $\omega_0$  selon  $\hat{z}$  est elle aussi translaturée de  $-\omega$ . Ainsi  $\tilde{H} = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{eff}}$  et  $\partial_t \tilde{H} = 0$ .

4) Notons au passage que  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar} \tilde{H} t) |\tilde{\psi}(0)\rangle$  par intégration, ce qui donne l'évolution du spin en présence du champ tournant.

On a  $|\psi(0)\rangle = |+\rangle \implies |\tilde{\psi}(0)\rangle = |+\rangle$ . De l'exercice précédent, on doit faire la substitution  $\omega_0 \rightarrow \Delta\omega$  dans la formule pour  $\mathcal{P}_{+-}(t)$ .

5) Voir Cohen-Tanoudji et al., complément F<sub>IV</sub>, par exemple. Il y a un phénomène de résonance pour  $\Delta\omega \simeq 0$ , ce qui veut dire  $\Delta\omega \ll \omega_1$ . Pour certaines valeurs de  $t$  on a  $\mathcal{P}_{+-}(t) = 1$ . Par exemple  $t = \pi/\omega_1$ . C'est le "flip" du spin.

## 8. Hamiltonien de Pauli.

Calcul du terme

$$\begin{aligned} \left( \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}(\vec{q}, t)) \right)^2 &= (p_k - eA_k)(p_\ell - eA_\ell)\sigma^k\sigma^\ell = (p_k - eA_k)(p_\ell - eA_\ell)(\delta^{k\ell} + i\varepsilon^{k\ell m}\sigma_m) \\ &= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - ie\varepsilon^{k\ell m}(p_kA_\ell + A_kp_\ell)\sigma_m \\ &= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - ie\varepsilon^{k\ell m}(A_kp_\ell + A_\ellp_k - i\hbar\partial_kA_\ell)\sigma_m \\ &= (\vec{p} - e\vec{A})^2 - \hbar e \underbrace{\varepsilon^{k\ell m}\partial_kA_\ell}_{B_m=(\vec{\nabla}\times\vec{A})_m} \sigma_m = (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

## 9. Inégalités de Heisenberg.

1) Soient  $A$  &  $B$  deux "observables" de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , i.e.  $A = A^*$  &  $B = B^*$ . La valeur moyenne  $\langle [A, B] \rangle = \langle AB \rangle - \langle BA \rangle = z - \bar{z}$  (avec  $z := \langle AB \rangle$ ) est un imaginaire pur.

On a  $|z - \bar{z}|^2 = |2i\text{Im}(z)|^2 = 4|\text{Im}(z)|^2 \leq 4|z|^2$  car  $|\text{Im}(z)| \leq |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Donc  $|\langle [A, B] \rangle|^2 \leq 4|\langle AB \rangle|^2$ , mais  $|\langle AB \rangle|^2 = |\langle \psi, AB\psi \rangle|^2 = |\langle A\psi, B\psi \rangle|^2 \leq \|A\psi\|^2\|B\psi\|^2$  (inégalité de Schwarz). Par définition de la valeur moyenne,  $A$  étant self-adjoint, on a  $\|A\psi\|^2 = \langle A^2 \rangle$  et donc

$$(\heartsuit) \quad \frac{1}{4}|\langle [A, B] \rangle|^2 \leq \langle A^2 \rangle \cdot \langle B^2 \rangle.$$

2) Posons  $A = M - \langle M \rangle \mathbb{1}$  et  $B = N - \langle N \rangle \mathbb{1}$ ,  $M$  et  $N$  étant self-adjoints. Il vient trivialement  $[A, B] = [M, N]$  et, puisque  $\langle A^2 \rangle = \langle (M - \langle M \rangle \mathbb{1})^2 \rangle = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 =: (\Delta M)^2$ , on a finalement, grâce à  $(\heartsuit)$ , l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta M \cdot \Delta N \geq \frac{1}{2}|\langle [M, N] \rangle|.$$

3a) Puisque  $[X, P] = i\hbar\mathbb{1}$ , on a

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}.$$

3b) Sachant que  $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ , il vient

$$\Delta L_x \cdot \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2}|\langle L_z \rangle|.$$

4a) Idem que pour  $S$

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y \geq \frac{\hbar}{2}|\langle S_z \rangle|.$$

4b) Rappelons que  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{\hbar}{2}\hat{n}$  et  $(S_k)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\mathbb{1}$ . On trouve dans l'état  $|\hat{n}+\rangle$ ,  $\Delta S_k = \frac{\hbar}{2}(1 - n_k^2)^{1/2}$ , et  $\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2}n_z$ . L'inégalité de Heisenberg dans le cas du spin  $\frac{1}{2}$  s'écrit en utilisant le fait que  $|\hat{n}| = 1$ ,

$$\sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2 + n_x^2 n_y^2} = \sqrt{n_z^2 + n_x^2 n_y^2} \geq |n_z|.$$

4c) L'inégalité est saturée pour  $n_x n_y = 0$ . Donc  $\hat{n}$  appartient à l'un des deux plans d'équation  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Faites-vous un dessin.

### 10. Dégénérescence du spectre du carré du moment angulaire.

Si  $\psi$  est vecteur propre de  $C$  de valeur propre  $\lambda$ , il en est de même de  $A\psi$  et  $B\psi$  car  $[A, C] = [B, C] = 0$ . Raisonnons par l'absurde : supposons  $\lambda$  valeur propre non dégénérée de  $C$ . Il existe alors  $a, b$  réels non nuls tels que  $A\psi = a\psi$  et  $B\psi = b\psi$ ; donc  $[A, B]\psi = (ab - ba)\psi = 0$ . Si toutes les valeurs propres  $\{\lambda_\alpha\}$  de  $C$  étaient non dégénérées, on trouverait une base  $\{\psi_\alpha\}$  de vecteurs propres tels que  $[A, B]\psi_\alpha = 0$ ; d'où  $[A, B] = 0$  contrairement à l'hypothèse. Donc  $C$  possède nécessairement des valeurs propres dégénérées.

Exemple :  $A = J_x, B = J_y$  et  $C = \vec{J}^2$ .

**11. Spin 1.** Un calcul direct dans la base canonique de  $\mathbb{C}^3$  donne les expressions matricielles

$$J_x = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre alors que  $J_x, J_y, J_z$  sont auto-adjoints, que  $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$  etc... et qu'enfin

$$\vec{J}^2 = 2\hbar^2 I.$$

D'où  $j(j+1) = 2$  et  $\vec{J}$  est bien un moment angulaire de spin  $j = 1$ .

### 12. Additions de spins.

1/ Cas des baryons : En termes de spins, comme  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$ , ceci conduit à  $\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2} \oplus 3/2$ , et  $\frac{1}{2} \otimes 0 = \frac{1}{2}$ . Donc les baryons ont spin  $3/2$  ou  $1/2$ , le spin  $1/2$  étant obtenu par deux compositions distinctes. Les baryons légers ont spin  $1/2$  (proton, neutron) ou  $3/2$  ( $\Delta, \Omega^-$ ). Les baryons lourds ont des spins plus élevés car les quarks ont un moment orbital non nul.

2/  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$ , ce qui donne un spin  $0$  ou  $1/2$  pour les mésons, spins d'ailleurs observés pour les mésons légers (les  $\pi$  et  $K$  ont spin  $0$ , les  $\rho$  et  $\omega$  ont spin  $1$ ).

**13. Particules de spin 1/2.** Rappelons que sur l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ , l'observable de spin est

$$S_{\hat{n}} = \frac{\hbar}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}.$$

Les extensions sur  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  suivant le numéro de la particule considérée sont

$$S_{\hat{n}}^{(1)} = \frac{\hbar}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}, \quad \text{et} \quad S_{\hat{k}}^{(2)} = \frac{\hbar}{2} \mathbb{I} \otimes \hat{k} \cdot \vec{\sigma},$$

ce qui, sur  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ , donne lieu à l'opérateur

$$S_{\hat{n}}^{(1)} S_{\hat{k}}^{(2)} = S_{\hat{n}} \otimes S_{\hat{k}} = \frac{\hbar^2}{4} \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{k} \cdot \vec{\sigma}.$$

Il faut donc calculer l'image de l'état singulet  $|00\rangle$  par cet opérateur en prenant bien garde à l'action sur chacun des facteurs du produit tensoriel. On a avec  $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} S_{\hat{n}} \otimes S_{\hat{k}} |00\rangle &= \frac{\hbar^2}{4} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{k} \cdot \vec{\sigma}) |00\rangle = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma} |+\rangle \otimes \hat{k} \cdot \vec{\sigma} |-\rangle - \hat{n} \cdot \vec{\sigma} |-\rangle \otimes \hat{k} \cdot \vec{\sigma} |+\rangle) \\ &= \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} n_z \\ n_x + in_y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k_x - ik_y \\ -k_z \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} n_x - in_y \\ -n_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k_z \\ k_x + ik_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour calculer la valeur moyenne demandée, il reste à prendre le produit scalaire défini sur  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  comme le produit des produits scalaires dans chacun des espaces  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \langle 00 | S_{\hat{n}} \otimes S_{\hat{k}} | 00 \rangle &= \frac{\hbar^2}{8} \left( \langle + - | \begin{pmatrix} n_z \\ n_x + in_y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k_x - ik_y \\ -k_z \end{pmatrix} \rangle - \langle - + | \begin{pmatrix} n_z \\ n_x + in_y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k_x - ik_y \\ -k_z \end{pmatrix} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle + - | \begin{pmatrix} n_x - in_y \\ -n_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k_z \\ k_x + ik_y \end{pmatrix} \rangle + \langle - + | \begin{pmatrix} n_x - in_y \\ -n_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} k_z \\ k_x + ik_y \end{pmatrix} \rangle \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8} \left( -2n_z k_z - (n_x + in_y)(k_x - ik_y) - \overline{(n_x + in_y)(k_x - ik_y)} \right) = \frac{-\hbar^2}{4} \hat{n} \cdot \hat{k}. \end{aligned}$$

#### 14. Addition de deux moments angulaires.

1)  $(\vec{J}_{\text{tot}})^2 = (\vec{J}_{(1)})^2 + (\vec{J}_{(2)})^2 + 2\vec{J}_{(1)} \cdot \vec{J}_{(2)}$  où le produit scalaire d'opérateurs vectoriels s'interprète comme  $\vec{J}_{(1)} \cdot \vec{J}_{(2)} = J_k \otimes J^k = \vec{J}_{(2)} \cdot \vec{J}_{(1)}$ . Ainsi

$$[(\vec{J}_{\text{tot}})^2, J_{(1)z}] = 2[J_k \otimes J^k, J_z \otimes \mathbb{I}] = 2[J_k, J_z] \otimes J^k = 2i\hbar \varepsilon_{kz\ell} J_\ell \otimes J^k = 2i\hbar \varepsilon_{z\ell k} J_\ell \otimes J^k = 2i\hbar (\vec{J}_{(1)} \times \vec{J}_{(2)})_z.$$

2) De manière générale en utilisant l'algèbre du moment angulaire :

$$[(\vec{J}_{\text{tot}})^2, J_{(1)\ell}] = 2[J_k \otimes J^k, J_\ell \otimes \mathbb{I}] = 2[J_k, J_\ell] \otimes J^k = 2i\hbar \varepsilon_{k\ell m} J_m \otimes J^k = 2i\hbar \varepsilon_{\ell m k} J_m \otimes J^k = 2i\hbar (\vec{J}_{(1)} \times \vec{J}_{(2)})_\ell, \text{ d'où le résultat.}$$

3) Puisque  $\vec{J}_{(1)} \cdot \vec{J}_{(2)} = \vec{J}_{(2)} \cdot \vec{J}_{(1)}$ , il suffit d'échanger 1  $\longleftrightarrow$  2.

On obtient ainsi  $[(\vec{J}_{\text{tot}})^2, J_{(2)\ell}] = -2i\hbar (\vec{J}_{(1)} \times \vec{J}_{(2)})_\ell$ .

4) Par calcul direct en utilisant les résultats 2 et 3.

#### 15. Effet Zeeman du positronium.

a.  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^4$  et est de dimension complexe  $2 \times 2 = 4$ .

b. Par définition  $\vec{\sigma}_{(1)} \vec{\sigma}_{(2)} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \otimes \sigma_i$ . L'action explicite de chacune des matrices de Pauli  $\sigma_i$  sur les états de  $\mathbb{C}^2$  à un spin  $\frac{1}{2}$ ,  $|\varepsilon\rangle$ , avec  $\varepsilon = \pm 1$  est  $\sigma_1|\varepsilon\rangle = |-\varepsilon\rangle$ ,  $\sigma_2|\varepsilon\rangle = i\varepsilon|-\varepsilon\rangle$ , et  $\sigma_3|\varepsilon\rangle = \varepsilon|\varepsilon\rangle$ . D'où

$$\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) |-\varepsilon_1 -\varepsilon_2\rangle + \varepsilon_1 \varepsilon_2 |\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle;$$

autrement dit  $\vec{\sigma}_{(1)} \vec{\sigma}_{(2)} |++\rangle = |++\rangle$ ,  $\vec{\sigma}_{(1)} \vec{\sigma}_{(2)} |+-\rangle = 2|+-\rangle - |++\rangle - |--\rangle$ ,  $\vec{\sigma}_{(1)} \vec{\sigma}_{(2)} |-+\rangle = 2|-+\rangle - |+-\rangle - |--\rangle$  et  $\vec{\sigma}_{(1)} \vec{\sigma}_{(2)} |--\rangle = |--\rangle$ .

c. On calcule  $(\vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)})^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\vec{\sigma}_{(1)}^2 + \vec{\sigma}_{(2)}^2) + 2\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} = \frac{\hbar^2}{2} (3I + \vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)})$  car  $\vec{\sigma}^2 = 3\mathbb{I}$ . Ainsi

$$\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} = \frac{2}{\hbar^2} (\vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)})^2 - 3I_4 = (2j(j+1) - 3)I_4,$$

puisque  $(\vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)})^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle$  par construction de la base des  $|j m\rangle$ . Sur les états triplets  $j = 1$ ,  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} |1 m\rangle = |1 m\rangle$  et sur l'état singulet  $j = 0$ ,  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} |0 0\rangle = -3 |0 0\rangle$ . La matrice de  $\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)}$  dans la base des  $|j m\rangle$  ordonnée selon les états triplets puis singulet  $\{|1 1\rangle, |1 0\rangle, |1 -1\rangle, |0 0\rangle\}$  s'écrit (ou par blocs)

$$\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & -3 \end{array} \right).$$

Le commutateur se calcule facilement  $[\vec{\sigma}_{(1)}\vec{\sigma}_{(2)}, \vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)}] = [\frac{2}{\hbar^2}(\vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)})^2 - 3I_4, \vec{S}_{(1)} + \vec{S}_{(2)}] = 0$ ,  $\vec{\sigma}_{(1)}\cdot\vec{\sigma}_{(2)}$  commute avec l'opérateur moment angulaire total, c'est donc un opérateur scalaire.

**d.** On a  $P_0 + P_1 = I_4$  sur  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$ . Décomposition spectrale de l'opérateur  $\vec{\sigma}_{(1)}\cdot\vec{\sigma}_{(2)} = P_1 - 3P_0$ .  
On résout un système à deux équations et deux inconnues  $P_0$  et  $P_1$ , et on trouve

$$P_1 = \frac{1}{4}(3I_4 + \vec{\sigma}_{(1)}\cdot\vec{\sigma}_{(2)}) \quad \text{et} \quad P_0 = \frac{1}{4}(I_4 - \vec{\sigma}_{(1)}\cdot\vec{\sigma}_{(2)}).$$

Par définition, les matrices de  $P_0$  et  $P_1$  dans la base des  $|j m\rangle$  sont (forme par blocs)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

**e.** D'après b) on a bien  $E|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = |\varepsilon_2 \varepsilon_1\rangle$ ,  $E$  permute les deux états de spins du produit tensoriel. Par ailleurs, en utilisant d) on a  $E = \frac{1}{2}(I_4 + \vec{\sigma}_{(1)}\cdot\vec{\sigma}_{(2)}) = P_1 - P_0$ . Ceci montre que les états triplets sont symétriques et l'état singulet est antisymétrique sous l'échange des deux spins.

**f.** L'Hamiltonien libre pour le spin du positronium sur  $\mathcal{H}$  est donné par  $H_0 = E_0 I_4 + a \vec{\sigma}_{(1)}\vec{\sigma}_{(2)}$ , où  $E_0$  et  $a > 0$  sont des constantes positives. Les vecteurs propres de  $H_0$  sont donc ceux de  $\vec{\sigma}_{(1)}\vec{\sigma}_{(2)}$ , donc les états  $|j m\rangle$ . Et les valeurs propres de  $H_0$  sont donc d'après c)  $H_0|1 m\rangle = (E_0 + a)|1 m\rangle$  et  $H_0|0 0\rangle = (E_0 - 3a)|0 0\rangle$ .

**g.** Par calcul direct, on a  $H = H_0 - (\frac{-e\hbar}{2m}\vec{\sigma}_{(1)} + \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \vec{B} = H_0 + \frac{e\hbar}{2m}B(\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)})$ .

**h.** La base des  $|j m\rangle$  étant celles des vecteurs propres de  $H_0$  il reste à regarder l'action de  $\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)}$  sur cette base.  $(\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)})|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle = 0$  si  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  et  $(\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)})|1 0\rangle = 2|0 0\rangle$  et  $(\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)})|0 0\rangle = 2|1 0\rangle$ , d'où la matrice  $H$  dans la base  $\{|1 1\rangle, |1 -1\rangle, |1 0\rangle, |0 0\rangle\}$  en fonction de  $E_0$ ,  $a$  et  $b$

$$H = H_0 + ab(\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)}) = \begin{pmatrix} E_0 + a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 + a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 + a & 2ab \\ 0 & 0 & 2ab & E_0 - 3a \end{pmatrix}.$$

**i.** Vu l'allure de la matrice de  $H$ , il reste à diagonaliser le dernier bloc  $2 \times 2$  correspondant aux vecteurs  $\{|1 0\rangle, |0 0\rangle\}$ ,

$$E_0 \mathbb{I} + a \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 2b & -3 \end{pmatrix} =: E_0 \mathbb{I} + aM,$$

d'où  $\det(M - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 + 2\lambda - (3 + 4b^2) = 0$  qui a pour discriminant réduit  $\Delta' = 4(1 + b^2) > 0$  d'où les deux valeurs propres simples  $\lambda_{\pm} = -1 \pm 2\sqrt{1 + b^2}$  d'où les deux autres valeurs propres de  $H$ ,  $E_{\pm} = E_0 - a(1 \pm 2\sqrt{1 + b^2})$ . Dans les limites demandées,  $E_- \rightarrow E_0 + a$  et  $E_+ \rightarrow E_0 - 3a$  lorsque  $b \rightarrow 0$ , d'une part, et,  $E_{\pm} = \mp 2ab$  lorsque  $b \rightarrow \infty$ , d'autre part.

**j.** Les vecteurs propres de  $H$ , en régime de champ faible, sont ceux de  $H_0$  donc les  $|j m\rangle$ , tandis que ceux en régime de champ fort, tendent vers ceux de  $\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)}$ , à savoir,

$$(\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)})|+-\rangle = 2|+-\rangle \quad \text{et} \quad (\sigma_{z(1)} - \sigma_{z(2)})|-+\rangle = -2|-+\rangle.$$

Les vecteurs propres de  $H$  sont donc dans ce régime les états  $|\varepsilon_1 \varepsilon_2\rangle$ , avec  $\varepsilon_k = \pm 1$ , pour  $k = 1, 2$ . En champ fort, c'est l'interaction de chaque spin  $1/2$  qui domine le couplage spin-spin.

**16. Décomposition en représentations irréductibles.** Pour vous-mêmes.

**17. Particules identiques : Fermions.**

1) Les vecteurs d'états d'un système de deux fermions doivent être anti-symétriques sous l'échange des deux fermions  $\Psi(x_1, x_2) = -\Psi(x_2, x_1)$ . En particulier, si on prend un état factorisé,  $\Psi = \varphi \otimes \chi \in L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2j+1}$  (séparation des parties espace et spin) alors on a les deux combinaisons suivantes :  $\varphi$  symétrique et  $\chi$  anti-symétrique, ou,  $\varphi$  anti-symétrique et  $\chi$  symétrique.

2) Une lecture directe des CG pour  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  conduit aux états triplets  $|1M\rangle$  symétriques, et, à un état singulet  $|00\rangle$  antisymétrique, sous l'échange des deux spins  $\frac{1}{2}$  (cf le cours!).

3) Par composition de  $\ell_1 \times \ell_2 = 1 \times 1$ , le moment angulaire orbital total prend comme valeurs  $L = 0, 1, 2$ , de  $|\ell_1 - \ell_2|$  à  $\ell_1 + \ell_2$ . Ensuite, la table des CG, indique que les états couplés  $Y_L^M = |L, M\rangle$  sont symétriques pour  $L = 0, 2$  et antisymétriques pour  $L = 1$ .

4)  $L$  correspond à la partie espace tandis que  $S$  correspond à la partie spin des états à deux fermions. Le spin total est  $J = L + S$ . Pour avoir un état antisymétrique, en accord avec la question 1, les couples  $(L, S)$  possibles sont : Orbital symétrique et spin antisymétrique donc que  $(L, S) = (0, 0)$  (resp.  $(2, 0)$ ) et  $J = 0$  (resp.  $J = 2$ ), d'une part, et, orbital antisymétrique et spin symétrique avec  $(L, S) = (1, 1)$  et  $J = 2$ , d'autre part.

5)  $\mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_S$  est de dimension  $(2L + 1)(2S + 1)$ , d'où pour  $(L, S) = (0, 0)$ , de dimension un, pour  $(L, S) = (1, 1)$ , de dimension neuf, et pour  $(L, S) = (2, 0)$  de dimension cinq.

6) En tenant compte que de la partie de la fonction d'onde relative au moment angulaire total, il s'agit de décomposer le spineur à quatre composantes construit sur l'état singulet de spin  $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = Y_2^0(\vec{x}_1, \vec{x}_2) |0, 0\rangle = \langle x_1 \otimes x_2 | Y_{L=2}^{M=0} |0, 0\rangle$  dans la base découplée de  $(L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2) \otimes (L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2)$  formée des spineurs à deux composantes  $\psi_{\ell m}^\varepsilon = Y_\ell^m \otimes |\varepsilon\rangle$  relatifs à chacun des fermions. A partir d'une lecture verticale des CG, et en omettant les symboles  $\otimes$  tout en respectant l'ordre, on a successivement :

$$\begin{aligned} Y_{L=2}^{M=0} |0, 0\rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{6}} Y_1^1 Y_1^{-1} + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^0 Y_1^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} Y_1^{-1} Y_1^1 \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} (Y_1^1 |+\rangle Y_1^{-1} |-\rangle - Y_1^1 |-\rangle Y_1^{-1} |+\rangle) + Y_1^0 |+\rangle Y_1^0 |-\rangle - Y_1^0 |-\rangle Y_1^0 |+\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (Y_1^{-1} |+\rangle Y_1^1 |-\rangle - Y_1^{-1} |-\rangle Y_1^1 |+\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} (\psi_{11}^+ \otimes \psi_{1-1}^- - \psi_{1-1}^- \otimes \psi_{11}^+) + \frac{1}{2} (\psi_{1-1}^+ \otimes \psi_{11}^- - \psi_{11}^- \otimes \psi_{1-1}^+) + \psi_{10}^+ \otimes \psi_{10}^- - \psi_{10}^- \otimes \psi_{10}^+ \right) \end{aligned}$$

On vérifie bien que cette fonction d'onde est antisymétrique sous l'échange des deux fermions

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} (\psi_{11}^+(x_1) \psi_{1-1}^-(x_2) - \psi_{1-1}^-(x_1) \psi_{11}^+(x_2)) + \frac{1}{2} (\psi_{1-1}^+(x_1) \psi_{11}^-(x_2) - \psi_{11}^-(x_1) \psi_{1-1}^+(x_2)) \right. \\ &\quad \left. + \psi_{10}^+(x_1) \psi_{10}^-(x_2) - \psi_{10}^-(x_1) \psi_{10}^+(x_2) \right) = -\Psi(x_2, x_1) \end{aligned}$$

**18. Calcul de vecteurs propres et changement de base.**

1)  $j = 1$  donc  $m = \pm 1, 0$ .

2) Les vecteurs d'état sont définis à une phase près, comparer votre résultat aux vecteurs

$$|1, 1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = |z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Amusez-vous à vérifier pour vous faire la main sur les "à une phase près" que

$$|1, 1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix} = e^{3i\pi/4} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle) \right),$$

et trouver la phase pour  $|1, -1\rangle$ . Dans la décomposition sphérique choisie et avec l'ordre  $m$  décroissant, la matrice de passage  $P$  est unitaire  $P^\dagger = P^{-1}$  et s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } |1, m\rangle = P_{am}|a\rangle, \quad m = \pm 1, 0, \text{ et } a = x, y, z$$

4) Dans la base standard  $|1, m\rangle$ , celle de  $\ell_z$  est immédiate par construction (question 2). Les deux autres se déduisent de la formule de conjugaison bien connue qui se retrouve facilement

$$\langle 1, m' | \ell_k | 1, m \rangle = \langle a | (P_{am'})^* \ell_k P_{bm} | b \rangle = (P^\dagger)_{m'a} \langle a | \ell_k | b \rangle P_{bm} = (P^{-1} \ell_k P)_{m'm}.$$

Ainsi, les nouvelles matrices qui vérifient toujours l'algèbre de Lie  $[J_k, J_\ell] = i\varepsilon_{k\ell m} J_m$  du moment angulaire sont

$$\ell_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 19. Addition de spins.

1) De la table des CG pour  $2 \times 1$  on obtient la combinaison linéaire dans  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1$

$$|3, 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{15}} |2, 2\rangle \otimes |1, -1\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}} |2, 1\rangle \otimes |1, 0\rangle + \sqrt{\frac{6}{15}} |2, 0\rangle \otimes |1, +1\rangle.$$

2) Mesurer  $J_z$  sur la particule de spin 2 seulement sur l'état  $|3, 1\rangle$  revient à considérer sur  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1$  l'observable  $J_z \otimes I$  dont les valeurs propres sont  $m\hbar$ , avec  $m = 2, 1, 0$ .

3) Les probabilités respectives,  $\text{proba}_m = \langle 3, 1 | P_m | 3, 1 \rangle$ , s'obtiennent à partir des valeurs moyennes des trois projecteurs spectraux relatifs à la particule de spin 2,  $P_m = |2, m\rangle \langle 2, m| \otimes I$ , pour  $m = 2, 1, 0$ . On trouve :  $\text{proba}_2 = \frac{1}{15}$ ,  $\text{proba}_1 = \frac{8}{15}$  et  $\text{proba}_0 = \frac{6}{15}$ .

## 20. Additions de moments angulaires.

$\vec{L}^2$  a pour valeur propre 2 avec  $\ell = 1$  et  $L_z$  a  $m = 0$ , tandis que le spin "down" donne  $m = -1/2$ . L'électron est donc dans l'état factorisé  $|10\rangle \otimes |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$ , état qu'il faut décomposer

sur la base des vecteurs propres  $|JM\rangle$  de  $\vec{J}^2$  avec  $0 + (-1/2) = -1/2$  comme valeur propre de  $J_z$ . De la table  $1 \times \frac{1}{2}$  des Clebsh-Gordan on lit

$$|10\rangle \otimes |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle,$$

décomposition sur un spin total  $J = 3/2$  et  $J = 1/2$  donnant respectivement les valeurs propres  $\hbar^2 J(J+1) = 15\hbar^2/4$  et  $3\hbar^2/4$  de  $\vec{J}^2$ . Comme pour l'exercice précédent, on regarde les projecteurs  $P_J = |J - \frac{1}{2}\rangle\langle J - \frac{1}{2}|$  et la proba $_J = \|P_J|10\rangle \otimes |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle\|^2$ . On trouve proba $_{J=3/2} = 2/3$  et proba $_{J=1/2} = 1/3$ .

## 21. Symétrie $SU(2)$ d'isospin.

1) Des définitions  $e^{-i\pi T_2} = e^{-i\pi/2\sigma_2} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \sigma_2 = -i\sigma_2$  on obtient  $e^{-i\pi T_2}|p\rangle = |n\rangle$  et  $e^{-i\pi T_2}|n\rangle = -|p\rangle$ . Echange les deux états du doublet d'isospin.

2) Avec la question 1) on obtient

$$e^{-i\pi T_2} \otimes e^{-i\pi T_2}|p \otimes p\rangle = |n \otimes n\rangle, \quad e^{-i\pi T_2} \otimes e^{-i\pi T_2}|n \otimes n\rangle = |p \otimes p\rangle.$$

3) On utilise l'invariance d'isospin  $[H, e^{-i\alpha \hat{n} \cdot \vec{T}}] = 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle p \otimes p | H \otimes H | p \otimes p \rangle &= \langle e^{-i\pi T_2} \otimes e^{-i\pi T_2} | n \otimes n \rangle | H \otimes H | e^{-i\pi T_2} \otimes e^{-i\pi T_2} | n \otimes n \rangle \rangle \\ &= \langle n \otimes n | e^{+i\pi T_2} \otimes e^{+i\pi T_2} H \otimes H e^{-i\pi T_2} \otimes e^{-i\pi T_2} | n \otimes n \rangle \\ &= \langle n \otimes n | H \otimes H | n \otimes n \rangle. \end{aligned}$$

L'interaction forte est indépendante de la charge électrique.

## 22. Règles de sélection et réactions nucléaires.

1)  $\mathcal{H}_{(\pi, N)} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}_{\frac{3}{2}} \oplus \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  et les dimensions respectives sont  $3 \otimes 2 = 2 \oplus 4$ .

2) La table des CG pour  $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$  lue dans le sens horizontal donne

$$\begin{aligned} |\pi^+ p\rangle &= |1, +1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle, & |\pi^0 p\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |\pi^- p\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, & |\pi^+ n\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |\pi^0 n\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, & |\pi^- n\rangle &= |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle \end{aligned}$$

3) Passer de la base découplée du produit tensoriel à la base couplée se fait par l'intermédiaire des CG,  $C_{J_1 \frac{1}{2}}^{M m_1 m_2}$ , qui rappellent le sont proportionnels à  $\delta_{m_1+m_2}^M$ . On a

$$|\pi, N\rangle = |\pi \otimes N\rangle = |1, m_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_2\rangle = C_{J=\frac{1}{2}}^{m_1+m_2, m_1, m_2} | \frac{1}{2}, m_1+m_2 \rangle + C_{J=\frac{3}{2}}^{m_1+m_2, m_1, m_2} | \frac{3}{2}, m_1+m_2 \rangle$$

où les sommes portent  $|m_1 + m_2| \leq \frac{1}{2}$  et  $|m_1 + m_2| \leq \frac{3}{2}$  respectivement. On a la même chose avec  $|\pi', N'\rangle$  et les sommes portent sur  $|m'_1 + m'_2| \leq \frac{1}{2}$  et  $|m'_1 + m'_2| \leq \frac{3}{2}$  respectivement. L'orthogonalité des doublets  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  et quadruplets  $\mathcal{H}_{3/2}$  d'isospin, fait apparaître la règle de sélection  $\delta_{m_1+m_2}^{m'_1+m'_2}$  et on obtient le résultat demandé.

4) Les processus permis sont sélectionnés par le terme  $\delta_{m_1+m_2}^{m'_1+m'_2}$  et ils se lisent directement dans la table  $1 \times \frac{1}{2}$  des CG. Ainsi on a les six processus de nature élastique  $\pi + N \rightarrow \pi + N$  qui correspondent aux six états de la base découplée du produit tensoriel pour lesquels on a  $\delta_{m_1+m_2}^{m'_1+m'_2} = \delta_{m_1}^{m'_1} \delta_{m_2}^{m'_2}$ . Il y a encore quatre autres processus possibles donnés par  $m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2 = \frac{1}{2}$  et  $m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2 = -\frac{1}{2}$ ,

$$\pi^+ + n \longleftrightarrow \pi^0 + p, \quad \pi^- + p \longleftrightarrow \pi^0 + n$$

qui correspondent à des transferts de la charge électrique.

5) Les interactions fortes intervenant dans le processus respectent l'isospin; ceci se traduit par la décomposition 1) en espaces irréductibles. Donc forcément les restrictions sur chacun de ces sous-espaces irréductibles sont multiples de l'identité (lemme de Schur).

6)  $\sigma_+ = |A_4|^2$ ,  $\sigma_- = \frac{2}{9}|A_4 - A_2|^2$  et  $\sigma'_- = \frac{1}{9}|A_4 + 2A_2|^2$ .

7) Si  $|A_2| \ll |A_4|$  alors  $\sigma_+ = |A_4|^2$ ,  $\sigma_- \simeq \frac{2}{9}|A_4|^2$  et  $\sigma'_- = \frac{1}{9}|A_4|^2$ .

Si  $|A_2| \gg |A_4|$  alors  $\sigma_+ = |A_4|^2$ ,  $\sigma_- \simeq \frac{2}{9}|A_2|^2$  et  $\sigma'_- \simeq \frac{4}{9}|A_2|^2$ .

8) Dans le régime  $|A_2| \ll |A_4|$  on a  $\sigma_+ : \sigma_- : \sigma'_- = 9 : 1 : 2$ . Et c'est dans ce régime qu'il y a accord avec  $\sigma_T(\pi^+p)/\sigma_T(\pi^-p) \approx 3$ .

9) Avec l'écriture  $|\pi^+p\rangle = |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle$  état qui porte deux charges + on en déduit  $\Delta^{++} = |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle$ . Puis, ainsi de suite,  $\Delta^+ = |\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ ,  $\Delta^0 = |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  et  $\Delta^- = |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$ .