

## 1 Effet photoélectrique.

Une version moderne de l'expérience de Hertz et Hallwachs, portant sur l'effet photoélectrique, est réalisée moyennant un laser à longueur d'onde  $\lambda$  réglable. L'expérimentateur enregistre les valeurs suivantes pour l'énergie cinétique maximale des photo-électrons :

$\lambda$ [nm]	444	480	523	605	640
$\nu$ [Hz]					
$E_{\text{cin}}$ [eV]	0.66	0.44	0.25	-	-

1. Expliquez l'absence de photo-électrons pour les grandes longueurs d'ondes.
2. Complétez la ligne des fréquences  $\nu$  dans le tableau ci-dessus, et tracez le graphe  $E_{\text{cin}}$  vs  $\nu$ .
3. Utilisez le graphe pour déterminer la constante de Planck  $h$  (avec unités). Sachant que  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{C}$ , convertissez  $h$  en unités SI.
4. Déterminez l'énergie de liaison des électrons pour le matériau utilisé.

## 2 Photocathode en potassium.

La raie verte du mercure possède une longueur d'onde de  $\lambda = 546.1$  nm. Cette lumière éclaire une photoélectrode en potassium, dont le travail de sortie est de 2.36 eV. Dites si cette lumière est capable d'en extraire des électrons, et le cas échéant calculez leur vitesse.

## 3 Expérience de Davisson et Germer.

L'expérience de Davisson et Germer consiste à envoyer des électrons accélérés par une tension de  $U = 54$  V sur un mono-cristal de nickel pour mesurer l'intensité du faisceau réfléchi en fonction de l'angle  $\alpha$  entre rayons incident et réfléchi. Dans les questions 1-4, nous étudions les interférences autour du chemin classique qu'emprunteraient des électrons corpusculaires.

1. Pour des plans cristallins de distance  $d$ , quelle serait la dépendance angulaire de l'intensité réfléchie prédite par une théorie classique ?
2. Sachant que  $m_e = 511 \text{ keV}c^{-2}$ , comparez l'énergie cinétique des électrons à leur énergie de repos. Un calcul relativiste s'avère-t-il nécessaire ?
3. Calculez la vitesse des électrons incidents et leur longueur d'onde de de Broglie  $\lambda$ .
4. L'expérimentateur trouve un maximum de l'intensité réfléchie pour  $\alpha = 50^\circ$ . Déterminez la distance  $d$  entre les plans cristallins impliqués qui découle de la condition d'interférence constructive de Bragg appliquée à la trajectoire classique des électrons.

## 4 Lois de Wien et de Stefan-Boltzmann.

La densité d'énergie d'un corps noir à température  $T$  est donnée par la loi de Planck,

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu .$$

1. Pour une température  $T$  donnée, tracez le graphe  $u(\nu, T)$  en fonction de la fréquence  $\nu$ . Déterminez les comportements asymptotiques pour  $\nu \rightarrow 0$  et  $\nu \rightarrow \infty$ .
2. Loi de Wien : Déterminez la fréquence  $\nu_{\max}(T)$  du maximum de  $u(\nu, T)$ . Expliquez ainsi le changement de couleur d'un fer chauffé. Astuce : estimez la position du maximum de  $\frac{x^3}{e^x - 1}$ .
3. Le flux total de radiation (*émittance*) s'obtient comme  $j(T) = \frac{c}{4}u(T)$ , avec  $u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T)d\nu$ . Déduisez-en la loi de Stefan et Boltzmann,  $j(T) = \sigma T^4$ , et sa constante  $\sigma$ . Astuce :  $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ .

## 5 Quantification de Bohr et Sommerfeld.

La quantification de Bohr et Sommerfeld débute avec la solution "classique", c.à.d. Newtonienne, du problème, exprimée en termes de coordonnées  $q$  et impulsions conjuguées  $p$ . Pour des orbites périodiques, on impose ensuite la condition de quantification :

$$\oint p dq = n h \quad \text{où } n \text{ entier positif.}$$

Rappelez le modèle d'atome de Rutherford . Explicitez ses solution circulaires. Pour ces orbites de rayon  $r$ , démontrez ensuite que la procédure de quantification ci-dessus reproduit le modèle d'atome de Bohr. Pour cela, identifiez :

1.  $p$  avec la quantité de mouvement de l'électron et  $q$  avec sa position sur le cercle ;
2.  $p$  avec le moment angulaire  $L$  de l'électron et  $q$  avec l'angle  $\varphi$  sur le cercle.

## 6 Puits de Bohr et Sommerfeld.

Appliquez la procédure de quantification de Bohr et Sommerfeld à une particule de masse  $m$  évoluant dans un puits infini unidimensionnel qui est représenté par le potentiel  $V(x) = 0$  pour  $0 \leq x \leq L$ , et  $V(x) = \infty$  sinon.

Recherchez la solution classique pour  $x(t)$  et  $p(t)$ , et calculez sa périodicité  $T$  en fonction de l'impulsion initiale. Quantifiez et déterminez les niveaux d'énergie. Adaptez le résultat à un puit de profondeur finie. Plus tard, comparez les deux cas, de manière qualitative, avec la solution obtenue par l'équation de Schrödinger.

## 7 Equation de Klein et Gordon.

Erwin Schrödinger en 1925, puis Oskar Klein et Walter Gordon en 1926, ont développé une équation d'onde afin de décrire des particules relativistes libres de masse  $m$  sous forme

d'“ondes de matière”,

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + k_c^2 \right] \phi(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad (1)$$

avec  $\Delta$  le Laplacien et  $k_c$  une constante.

1. Quelle est l'unité SI de  $k_c$ ? Construisez une grandeur de même unité SI en utilisant comme ingrédient uniquement les données du problème et des constantes fondamentales. Faites le lien avec la longueur d'onde de Compton,  $\lambda_c = h/mc$ .
2. En une dimension ( $\Delta \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ), spécifiez une solution monochromatique et déterminez la relation de dispersion  $\omega(k)$ .
3. Généralisez ce résultat à trois dimensions pour trouver des ondes planes. Démontrez que le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est toujours orthogonal aux plans d'ondes.
4. En utilisant les relations de de Broglie et d'Einstein, démontrez que la relation de dispersion précédemment trouvée correspond au lien entre énergie relativiste,  $E = \gamma mc^2$ , et impulsion relativiste,  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ , avec  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  le facteur de Lorentz.

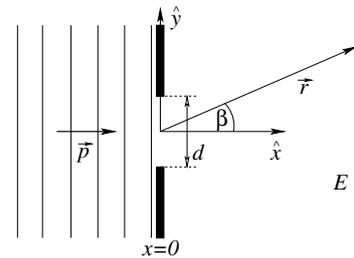
## 8 Grille de Young

En 1959, Möllenstedt et Jönsson ont réalisé pour la première fois la fameuse expérience d'interférence de Young avec des électrons. Ces derniers étaient accélérés par une tension de  $U = 40 \text{ kV}$  pour former un faisceau monochromatique. Comme grille servait un film de cuivre dans lequel il y avait des fentes étroites de longueur  $100 \mu\text{m}$  et de largeur  $0.6 \mu\text{m}$ . La distance entre deux fentes voisines était de  $2.2 \mu\text{m}$ .

Pour des fentes supposées infiniment étroites, calculez les angles sous lesquelles on observe une interférence constructive. Combien de maxima peut-on observer ?

## 9 Diaphragme : corpuscules, ondes et probabilités.

Un faisceau d'électrons, tous d'impulsion  $\vec{p}$ , passe par un diaphragme en forme de fente et de largeur  $d$ . Les électrons sont détectés sur un écran fluorescent  $E$  que nous supposons loin du diaphragme,  $\|\vec{r}\| \gg d, \lambda$ . Par simplicité, nous traitons ce phénomène à deux dimensions, c.à.d. dans le plan  $z = 0$ , et nous utilisons l'expression asymptotique<sup>1</sup>  $\psi(\vec{r}, t) \sim \frac{\exp[i(kr - \omega t)]}{\sqrt{r}}$  pour les ondes circulaires sortantes.



1. Décrivez l'image attendue pour un faisceau composé d'électrons corpusculaires.
2. Par la suite, nous considérons des électrons à caractère ondulatoire. Donnez l'expression de l'onde incidente ci-dessus. Quel est le lien entre  $\vec{p}$ ,  $\vec{k}$  et  $\lambda$  ?
3. Rappelez le principe de Huygens-Fresnel. Décrivez ainsi l'image attendue sur l'écran.

1. Un traitement plus rigoureux impliquerait des ondes cylindriques, décrites en termes de fonctions de Bessel  $J_n(k\rho)$  et de Hankel  $Y_n(k\rho)$ .

4. Évaluez l'onde incidente pour des points  $\vec{y} = y\vec{e}_y$  au sein de la fente. Construisez ainsi l'expression asymptotique de l'onde sortante de ce point  $\vec{y}$ .
5. Pour  $\|\vec{r}\| \gg d$ , évaluez le déphasage  $\Delta\varphi(y)$  entre l'onde provenant de  $\vec{y}$  et celle de  $\vec{0}$ . Moyennant une série de Taylor dans l'exposant, écrivez  $\psi_y(\vec{r}, t)$  comme produit d'une onde circulaire provenant du centre de la fente,  $\vec{0}$ , et d'un facteur de phase fonction de  $k$ ,  $\beta$  et  $y$ .
6. Par superposition des ondes sortantes, démontrez que l'onde transmise  $\psi_{\text{tr}}(\vec{r}, t)$  est une onde circulaire partant de  $\vec{0}$ , multipliée par une fonction  $F(\xi = \frac{kd}{2} \sin \beta)$ . Esquissez  $F(\xi)$ . Pourquoi  $\psi_{\text{tr}}$  ne peut représenter une densité de probabilité?
7. Pour  $k$  fixe, esquissez les figures de diffraction observées pour des fentes de largeur  $d = \frac{4\pi}{k}$  et  $d = \frac{6\pi}{k}$  en fonction de  $\sin \beta$ .
8. Une description alternative, envisagée dans le passé, implique des "variables cachées" locales : ainsi chaque électron suivrait une trajectoire prédéterminée par une variable cachée, inaccessible par principe pour l'expérimentateur. Trouvez des endroits dans les figures de diffraction qui invalident de telles théories.
9. Bonbon mathématique : les résultats précédents permettent de calculer l'intégrale de Dirichlet,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ , ainsi que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ .

## 10 Ondes sphériques.

Prouvez qu'une onde sphérique  $\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \exp[i(kr - \omega t)]$  satisfait l'équation d'onde tridimensionnelle  $\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$ . Faites le calcul en coordonnées cartésiennes et en coordonnées sphériques, où

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

et établissez le lien entre  $k$  et  $\omega$ .

## 11 Solutions de l'équation de Schrödinger libre.

Adaptez les résultats de l'exercice 10 pour trouver des solutions planes et sphériques de l'équation de Schrödinger libre

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t).$$

Calculez la relation de dispersion  $\omega(\vec{k})$ . Démontrez que les ondes sphériques convergentes (rentrantes), de type  $\frac{1}{r} \exp[i(kr + \omega t)]$ , ne satisfont pas à l'équation de Schrödinger.

## 12 Paquet d'ondes gaussien.

Soit  $g(k) = e^{-d^2(k-k_0)^2/2}$  une gaussienne centrée sur l'impulsion  $p_0 = \hbar k_0$ . Une superposition d'ondes selon  $\psi(x, t) = A \int \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx - \omega(k)t)} g(k)$ , génère un *paquet d'ondes gaussien*.

- Tracez le graphe de  $g(k)$  (i) pour  $k_0 = 2$  et  $d = 1$  ; et (ii) pour  $k_0 = 5$  et  $d = 2$ . Donnez l'unité de  $d$  et établissez son lien avec la largeur des courbes.
- Déterminez  $A$  de sorte que  $\psi$  soit normé. Astuce :  $\int d\xi e^{-\alpha\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$  pour  $\text{Re } \alpha > 0$ .
- Déterminez  $\omega_0$  et  $v_0$  de sorte que  $\omega(k) = \omega_0 + v_0(k - k_0) + \frac{\hbar}{2m}(k - k_0)^2$  correspond à la relation de dispersion d'une particule libre. Quelle est la signification physique de  $v_0$  ?
- En utilisant le résultat précédent, démontrez que le paquet d'ondes  $\psi(x, t)$  s'écrit comme le produit d'une onde de pulsation  $\omega_0$  et d'une gaussienne centrée sur  $x = v_0 t$  et de largeur  $d\alpha(t)$  [où  $\alpha(t)$  est une fonction adimensionnée]. Astuces : (i) écrire l'exposant de l'intégrande comme fonction quadratique en  $k' = k - k_0$  ; (ii) complétion quadratique de l'exposant afin d'obtenir une intégrale gaussienne.
- Démontrez que la densité de probabilité  $|\psi(x, t)|^2$  est une gaussienne centrée sur  $x = v_0 t$ , et que sa largeur croît avec le temps. Le paquet reste-t-il confiné ?
- Démontrez que le produit des "incertitudes" en impulsion et en endroit est toujours supérieur à  $\hbar$  (principe d'incertitude de Heisenberg). Astuce : utilisez les largeurs des gaussiennes comme incertitudes.

### 13 Vitesse et impulsion du paquet gaussien.

En partant des résultats de l'exercice 12,

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{d\alpha(t)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - v_0 t}{d\alpha(t)} \right)^2 \right] e^{i(k_0 x - \omega(k_0) t)}, \text{ avec } \alpha(t) = \sqrt{1 + i \frac{\hbar t}{m d^2}},$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = g(k) e^{-i\omega(k)t} = A \exp \left[ -\frac{1}{2} d^2 (k - k_0)^2 \right] e^{-i\omega(k)t},$$

calculez :

- la densité de probabilité  $\rho$  et le courant  $j$  associé ;
- l'espérance de la position,  $\langle x \rangle_t$ , et sa dérivée temporelle,  $\frac{d\langle x \rangle_t}{dt}$  ;
- l'espérance de la quantité de mouvement, une première fois à partir de  $\psi(x, t)$ , et une deuxième fois à partir de la transformée de Fourier  $\tilde{\psi}(k, t)$ .

Commentez les résultats. (Les intégrations se simplifient en exploitant la symétrie.)

### 14 Equation de continuité.

Le but de cet exercice est de vérifier, pour des cas spécifiques, l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \text{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0,$$

avec  $\rho = \psi^* \psi$  et  $\vec{j} = \frac{1}{m} \text{Re} (\psi^* \hat{p} \psi)$ .

1. Un paquet d'onde libre et unidimensionnel,  $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} f(x - vt)$ , avec  $f$  une fonction réelle décrivant l'enveloppe et  $(\omega, k)$  la "composante principale" du paquet. Interprétez la contrainte qui découle de la continuité.
2. Une onde sphérique  $\psi(r, \phi, \theta, t) = \frac{1}{r} \exp[i(kr - \omega t)]$ , sachant que  $\text{grad} f(r) = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} f(r)$  et  $\text{div} \vec{A}(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A_r(r)$  pour des fonctions à symétrie sphérique.

## 15 Opérateurs adjoints.

Calculez les adjoints (ou conjugués hermitiens) des opérateurs suivants :

1. d'un nombre complexe  $c$  ;
2. de  $\frac{d^2}{dx^2}$  ;
3. de  $x + \frac{d}{dx}$  ;
4. de la somme  $\hat{A} + \hat{B}$  et du produit  $\hat{A}\hat{B}$  de deux opérateurs ;
5. d'une matrice  $\mathbf{A}$  de dimension  $n \times n$  et à coefficients complexes ;
6. de  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r}$ , avec  $(r, \vartheta, \phi)$  coordonnées sphériques ;
7. de la composante radiale de la quantité de mouvement,  $\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right)$  en ajustant  $n$  de sorte que l'opérateur soit hermitien ;<sup>2</sup>
8. de  $\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n}{r} \right) = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} r^n$  en ajustant  $n$  de sorte que  $\hat{p}_r = \hat{p}_r^\dagger$  en  $D$  dimensions.

## 16 Commutateurs.

Calculez les commutateurs suivants :

1.  $\left[ x, \frac{d^2}{dx^2} \right]_-$  et  $\left[ x, \frac{d^n}{dx^n} \right]_-$  ;
2.  $\left[ x^n, \frac{d}{dx} \right]_-$  ;
3.  $\left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{d}{dx} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{d}{dx} \right) \right]_-$  ;
4.  $\left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]_-$  ;
5.  $\left[ \hat{A}, \hat{B}^n \right]_-$  pour  $n$  entier positif et pour  $\hat{C} = \left[ \hat{A}, \hat{B} \right]_-$  commutant avec  $\hat{B}$  ;
6.  $\left[ \hat{A}, e^{\hat{B}} \right]_-$  dans les mêmes conditions qu'à la question précédente, sachant que l'exponentielle d'un opérateur est définie par sa série de Taylor ;
7. Prouvez que  $\left[ \hat{A}, f(\hat{B}) \right]_- = \left[ \hat{A}, \hat{B} \right]_- \frac{df}{d\hat{B}}(\hat{B})$  si  $\left[ \hat{A}, \hat{B} \right]_-$  commute avec  $\hat{B}$ .

---

2. On remarquera que le carré de  $\hat{p}_r$  correspond à la partie radiale du Laplacien multipliée par  $-\hbar^2$ .

## 17 Marche de potentiel.

Une onde monochromatique progressive provenant des abscisses négatives rencontre une marche de potentiel, représentée par  $V(x) = V_0\Theta(x)$ , avec  $V_0 > 0$  et  $\Theta(x)$  la fonction de Heaviside [définie comme  $\Theta(x \geq 0) = \{1\}$ ].

1. Expliquez qualitativement ce qui va se passer pour des énergies  $E \geq V_0$ .
2. Cherchez la solution  $\psi_{<}(x, t)$  dans le domaine  $x < 0$  et spécifiez son énergie  $E$  en fonction de l'impulsion des ondes incidentes,  $p_i$ . On considère  $E$  fixée à cette valeur par la suite.
3. Pour  $E > V_0$ , spécifiez la solution la plus générale dans le domaine  $x > 0$ ,  $\psi_{>}^{(1)}(x, t)$ , et raccordez-là à  $\psi_{<}(x, t)$ . Une des amplitudes est nulle : dites laquelle et pourquoi.
4. Pour  $E < V_0$ , spécifiez la solution la plus générale dans le domaine  $x > 0$ ,  $\psi_{>}^{(2)}(x, t)$ , et raccordez-là à  $\psi_{<}(x, t)$ . Une des amplitudes est nulle : dites laquelle et pourquoi.
5. Dans les deux cas,  $E \geq V_0$ , calculez les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$ , définis comme rapports entre flux de probabilité réfléchi/transmis et flux incident. Démontrez que  $R + T = 1$ .

## 18 Effet tunnel.

Dans cet exercice, nous étudions l'interaction d'une particule provenant de  $x = -\infty$  avec une barrière de potentiel rectangulaire,

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{pour } |x| < a \text{ (avec } V_0 > 0) \\ 0 & \text{pour } |x| > a. \end{cases}$$

1. Expliquez qualitativement ce qui se passe pour une particule incidente, classique ou quantique, avec (a) énergie  $E > V_0$ , (b)  $E < V_0$ .
2. Démontrez que l'équation de Schrödinger indépendante du temps admet des solutions de forme

$$\psi(x) = \begin{cases} A_+e^{ikx} + A_-e^{-ikx} & \text{pour } x < -a; \\ B_+e^{\kappa x} + B_-e^{-\kappa x} & \text{pour } -a < x < +a; \\ C_+e^{ikx} + C_-e^{-ikx} & \text{pour } x > +a. \end{cases}$$

En posant  $E < V_0$ , déterminez  $k$  et  $\kappa$  en fonction de  $E$  et  $V_0$

3. Énoncez les conditions de Born pour  $x = -a$ . Écrivez les contraintes pour les amplitudes  $A_{\pm}$  et  $C_{\pm}$  sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = \mathbf{M}(-a) \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}(-a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{i\kappa}{k}\right) e^{-\kappa a + ika} & \left(1 + \frac{i\kappa}{k}\right) e^{\kappa a + ika} \\ \left(1 + \frac{i\kappa}{k}\right) e^{-\kappa a - ika} & \left(1 - \frac{i\kappa}{k}\right) e^{\kappa a - ika} \end{pmatrix}.$$

4. Prouvez que les conditions de Born pour  $x = +a$  s'écrivent de manière analogue moyennant la matrice  $\mathbf{M}(+a)$ . Calculez la matrice liant les coefficients  $A_{\pm}$  et  $C_{\pm}$ .

5. Démontrez que le coefficient de transmission  $T$  est

$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_{\pm}^2}{4} \sinh^2 2\kappa a} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{\pm} = \frac{\kappa}{k} \pm \frac{k}{\kappa}$$

6. Calculez le coefficient de réflexion  $R$  et dites si  $T + R = 1$ .

7. Démontrez que le coefficient de transmission  $T$  est dominé par un facteur  $e^{-4a\kappa}$  pour une barrière haute et large,  $\kappa a \gg 1$ . Déduisez-en la formule de Gamow pour la probabilité de tunnel,  $T(E) \propto \exp[-2 \int_a^b g(x) dx]$ , en déterminant la fonction  $g(x)$ .

## 19 Etats liés du double puits $\delta$ .

Cet exercice porte sur les états liés d'un double puits delta, défini par le potentiel

$$V(x) = -\alpha [\delta(x - d) + \delta(x + d)] .$$

1. Démontrez que l'équation de Schrödinger indépendante du temps admet des solutions de forme

$$\psi(x) = \begin{cases} A_+ e^{\kappa x} + A_- e^{-\kappa x} & \text{pour } x < -d; \\ B_+ e^{\kappa x} + B_- e^{-\kappa x} & \text{pour } -d < x < +d; \\ C_+ e^{\kappa x} + C_- e^{-\kappa x} & \text{pour } +d < x; \end{cases}$$

2. Pourquoi les coefficients  $A_-$  et  $C_+$  doivent-ils être nuls ?

3. Énoncez les conditions de Born pour  $x = \pm d$ , ainsi que les contraintes qui en découlent pour les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  restants.

4. Mettez les contraintes de la question précédente sous la forme  $B_{\pm} = f(\kappa, \kappa_0) B_{\mp}$ , où  $\kappa_0 = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$  provient de la solution du puits delta simple et  $f(\kappa, \kappa_0)$  est une fonction qui ne dépend pas de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

5. Démontrez ainsi que les états propres sont soit pairs, soit impairs. Prouvez que la contrainte sur  $f(\kappa, \kappa_0)$  peut se mettre sous la forme  $\kappa - \kappa_0 = \pm \beta \kappa_0 e^{-2\kappa d}$  en déterminant  $\beta$ .

6. Démontrez graphiquement l'existence d'un état liant,  $\kappa_1$ , avec  $E_1 < E_0 = -\frac{\hbar^2 \kappa_0^2}{2m}$ . Sous quelle condition existe-t-il un état antiliant,  $\kappa_2$ , avec  $0 > E_2 > E_0$  ?

7. Donnez l'expression complète des 2 états en termes de  $\kappa_{1,2}$ .

## 20 Théorème d'Ehrenfest.

Une particule de masse  $m$  évoluant dans un potentiel  $V(\vec{r})$  est décrite par un hamiltonien  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$ .

Soit  $\psi(\vec{x}, t)$  un état propre de  $\hat{H}$ . Démontrez que les espérances  $\langle \vec{r} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \vec{r} \psi \rangle$  et  $\langle \hat{p} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \hat{p} \psi \rangle$  reproduisent les équations de mouvement classiques. Pour cela, étudiez  $\frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} \psi \rangle$ , avec  $\hat{A} = \vec{r}, \hat{p}$ .

## 21 Incertitude de l'oscillateur harmonique.

Prouvez que les incertitudes  $\Delta x$  et  $\Delta p$  dans le  $n$ -ième état propre de l'oscillateur harmonique satisfont à l'équation

$$\Delta x \Delta p = \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) .$$

Démontrez ainsi que l'espérance  $\langle \hat{H} \rangle = \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle \hat{x}^2 \rangle$  ne peut être inférieure à  $\frac{1}{2} \hbar \omega$ .

Astuce : les valeurs moyennes  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  se calculent convenablement en utilisant les opérateurs  $a$  et  $a^+$ .

## 22 Etat propre de l'oscillateur harmonique.

En utilisant l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique

$$\hat{H} = \hbar \omega \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right)$$

adaptez les coefficients du polynôme  $p(\xi) = \xi^2 + b\xi + c$  de sorte que  $\psi(\xi) = p(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$  représente un état propre de  $\hat{H}$ . Normalisez cet état, calculez son énergie et son évolution temporelle.

## 23 États cohérents de l'oscillateur harmonique.

On appelle "états cohérents"  $|\phi\rangle$  les états propres de l'opérateur destruction,

$$\hat{a}|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle ,$$

où  $\phi \in \mathbb{C}$  est la valeur propre associée.

1. On développe l'état cohérent dans la base des états propres de l'oscillateur harmonique,  $|\phi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle c_k$ , où  $|k\rangle$  désigne le  $k$ -ième état propre de l'hamiltonien. Déterminez les coefficients  $c_k$  pour que  $|\phi\rangle$  soit un état propre de  $\hat{a}$  avec la valeur propre  $\phi$ .
2. Normalisez l'état cohérent  $|\phi\rangle$ .
3. Quelle est l'évolution temporelle de l'état propre  $|k\rangle$ ? Déduisez-en celle de l'état cohérent,  $|\phi\rangle$ .
4. Démontrez que la dépendance temporelle de l'espérance de la position dans l'état  $|\phi\rangle$  est  $\langle x(t) \rangle_{\phi} = \sqrt{2} x_0 |\phi| \cos(\omega t - \delta)$ , avec  $\delta = \arg \phi$  et  $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ .
5. Calculez la dépendance temporelle de l'espérance de l'impulsion,  $\langle \hat{p}(t) \rangle_{\phi}$ .
6. Prouvez que  $\langle \hat{p}(t) \rangle_{\phi} = m \frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle_{\phi}$ . Interprétez ces résultats.
7. Calculez les incertitudes  $\Delta x$  et  $\Delta p$  pour les états cohérents.

## 24 Mesures dans un système à trois états.

Un expérimentateur mesure l'observable  $A$  dans un système quantique. Il constate qu'il n'y a que trois résultats possibles :  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . En jouant sur les paramètres expérimentaux, il apprend à préparer le système dans trois états,  $|u_{i=1,2,3}\rangle$ , dans lesquelles une mesure de  $A$  donne de façon certaine le résultat  $a_i$ .

1. Le système est maintenant préparé dans les états initiaux  $|\phi_1\rangle \sim |u_1\rangle + 2|u_2\rangle + 3|u_3\rangle$  et  $|\phi_2\rangle \sim |u_1\rangle + 2i|u_2\rangle - 3|u_3\rangle$ . Pour chacun de ces deux états (non normés), déterminez les probabilités avec lesquelles les résultats  $a_i$  sont mesurés.
2. Uniquement pour les états ayant produit  $a_2$  lors de la première mesure, notre expérimentateur choisit de mesurer  $A$  une deuxième fois. Déterminez les probabilités de voir  $a_i$  lors de cette deuxième étape.

## 25 Mesures dans un système à deux états.

Un expérimentateur prépare un système quantique dans un état initial  $|\psi_1\rangle$  et mesure l'observable  $X$ . Il répète ce processus un grand nombre de fois, et trouve statistiquement la moitié du temps le résultat  $a$ , l'autre moitié le résultat  $b$ . Il obtient le même comportement pour un deuxième état initial,  $|\psi_2\rangle$ .

Or, pour les états initiaux superposés  $|\psi_3\rangle \sim |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$  et  $|\psi_4\rangle \sim |\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle$ , il trouve respectivement  $p_{a,3} = \frac{2}{3}$  et  $p_{b,3} = \frac{1}{3}$  et  $p_{a,4} = \frac{2}{5}$  et  $p_{b,4} = \frac{3}{5}$ .

Notre expérimentateur se pose alors la question comment superposer  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$  pour obtenir à coup sûr les résultats  $a$  ou  $b$ . Pour l'aider, décomposez les états  $|\psi_{1,2}\rangle$  selon

$$|\psi_1\rangle = \alpha_1|u_a\rangle + \beta_1|u_b\rangle \quad \text{et} \quad |\psi_2\rangle = \alpha_2|u_a\rangle + \beta_2|u_b\rangle,$$

et déterminez les  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  qui donnent les probabilités observées.

Astuces : (i) normalisez les états, (ii) démontrez que vous pouvez rendre  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  réels en passant aux états  $|\tilde{u}_{a,b}\rangle = e^{i\varphi_{a,b}}|u_{a,b}\rangle$ , tandis que  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  doivent rester complexes.

## 26 Système à deux niveaux.

Considérons deux états quantiques isolés,  $|\phi_{1,2}\rangle$ , avec les énergies respectives  $E_{1,2}^0 = E_0 \mp \Delta$ . Introduisons maintenant un couplage  $\hat{H}_c|\phi_{1,2}\rangle = K|\phi_{2,1}\rangle$  entre ces deux états.

1. Ecrivez l'hamiltonien avec couplage.
2. Déterminez ses états propres  $\psi_{1,2}$  et leurs énergies  $E_{1,2}$ .
3. Introduisez des coordonnées polaires dans l'espace des paramètres,  $(\Delta, K) \rightarrow (R, \vartheta)$ . Démontrez ainsi que  $E_{1,2} = E_0 \mp R$  et que les états  $|\psi_{1,2}\rangle$  normalisés s'expriment facilement comme combinaisons linéaires des états isolés avec des amplitudes qui dépendent de  $\vartheta/2$ .

- Un expérimentateur prépare deux états initiaux identiques,  $|\alpha\rangle = |\phi_1\rangle$ . Pendant un laps de temps  $t$ , le premier évolue dans le système sans couplage, tandis que le deuxième y est exposé. Pour les deux cas, calculez  $|\alpha(t)\rangle$  ainsi que la probabilité avec laquelle on observe  $|\phi_2\rangle$ .

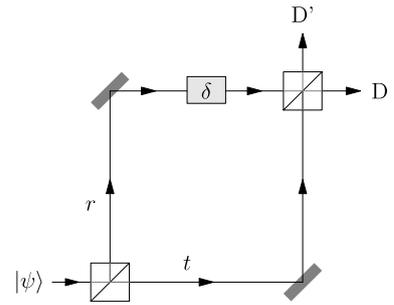
## 27 Interféromètre Mach-Zehnder.

Dans un interféromètre Mach-Zehnder, la lumière peut prendre deux chemins pour arriver aux détecteurs  $D$  et  $D'$  dont la sensibilité permet de détecter des photons individuels. On peut régler le flux incident de sorte qu'un seul photon se trouve dans l'appareil à la fois : on mesure ainsi l'interférence du photon "avec lui-même".

Pour décrire ce phénomène, nous considérons que chaque lame semi-réfléchissante (symbolisée par les carrés sur l'illustration) scinde l'état incident en une partie transmise inchangée, d'amplitude  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , et une partie réfléchie, d'amplitude  $r = \frac{i}{\sqrt{2}}$ , et orthogonale à l'état incident,

$$|0\rangle \xrightarrow{\text{lame}} t|0\rangle + r|1\rangle \quad \text{et} \quad |1\rangle \xrightarrow{\text{lame}} t|1\rangle + r|0\rangle \quad ,$$

tandis que les miroirs (en gris sur l'illustration) n'affectent pas l'état.



- Ecrivez l'effet des lames semi-réfléchissantes sur les états sous forme d'une matrice  $U$ . Vérifiez qu'elle est unitaire. Pourquoi doit-elle avoir cette propriété ?
- Déterminez l'effet des deux lames successives sur un état incident  $|\psi\rangle = |0\rangle$  (ou  $|1\rangle$ ). Déduisez-en les probabilités de détecter le photon en  $D$  ou  $D'$ .
- Comme indiqué sur la figure, le photon subit un déphasage supplémentaire  $e^{i\delta}$  sur l'un des deux parcours. Exprimez l'effet de ce déphasage sur les probabilités de détection en fonction de  $\frac{\delta}{2}$ .

## 28 Commutateurs et moment angulaire.

L'opérateur du moment angulaire est défini par  $\hat{L} = \vec{r} \wedge \hat{p}$ ; alternativement, ses composantes sont  $\hat{L}_j = \varepsilon_{jkl} x_k \hat{p}_l$ , avec  $\varepsilon_{jkl}$  le tenseur de Levi-Civita. Calculez :

- $[\hat{L}_j, \hat{p}_k]_-$  ;
- $[\hat{L}_j, x_k]_-$  ;
- $[\hat{L}_j, \hat{L}_k]_-$  ;
- $[\vec{a} \cdot \hat{L}, \vec{b} \cdot \hat{L}]_-$ , avec  $\vec{a}, \vec{b}$  des vecteurs constants ;
- $[\sigma_j, \sigma_k]_-$  avec  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ , et  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  les matrices de Pauli ;
- $\alpha$  de sorte que  $\hat{S}_j = \alpha \sigma_j$  obéit aux mêmes règles de commutation que  $\hat{L}_j$ .

## 29 Moment angulaire $L = 1$ .

1. Pour  $L = 1$ , exprimez les opérateurs  $\hat{L}_\pm$  et  $\hat{L}_z$  sous forme matricielle en choisissant une base dans laquelle  $\hat{L}_z$  est diagonal.
2. Déduisez-en les matrices représentant  $\hat{L}_x$  et  $\hat{L}_y$ . Vérifiez leurs règles de commutation.
3. Calculez les valeurs et vecteurs propres de  $\hat{L}_x$ . Déduisez-en la probabilité qu'un système initialement préparé en  $|l = 1, m = 1\rangle$  selon l'axe  $z$  soit mesuré dans l'état  $m = 1$  selon l'axe  $x$ .

## 30 Moment angulaire et harmoniques sphériques.

Les composantes du moment angulaire sont  $\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}[-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}]$ ,  $\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}]$ , et  $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$  en coordonnées sphériques.

1. Exprimez  $\hat{L}_\pm$  en coordonnées sphériques.
2. Sachant que  $Y_{l=1,m=-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\varphi}\sin\theta$ , appliquez  $\hat{L}_+$  successivement pour trouver les états avec  $m \geq 0$ .
3. Appliquez  $\hat{L}_z$  sur ces états. Dites s'il s'agit d'états propres et, le cas échéant, donnez leurs valeurs propres.

## 31 Effet Zeeman.

L'hamiltonien  $\hat{H} = \frac{(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2}{2m}$  décrit une particule libre, de charge  $q$  et de masse  $m$ , dans un champ magnétique.

1. Démontrez que la jauge symétrique,  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$ , produit un champ magnétique  $\vec{B}$  constant.
2. Pour des champs faibles, on peut négliger les contribution  $\mathcal{O}(\vec{B}^2)$ . Démontrez ainsi que l'hamiltonien s'exprime comme somme de celui d'une particule libre et d'un terme proportionnel à  $\vec{B} \cdot \hat{\vec{L}}$ . Déterminez la constante de proportionnalité et faites le rapprochement avec le magnéton de Bohr  $\mu_B$ .
3. En appliquant le même raisonnement à l'électron de l'atome d'hydrogène, montrez qu'un champ magnétique selon l'axe  $z$  lève la dégénérescence en  $m$  des états  $\psi_{nlm}(\vec{r})$ .